

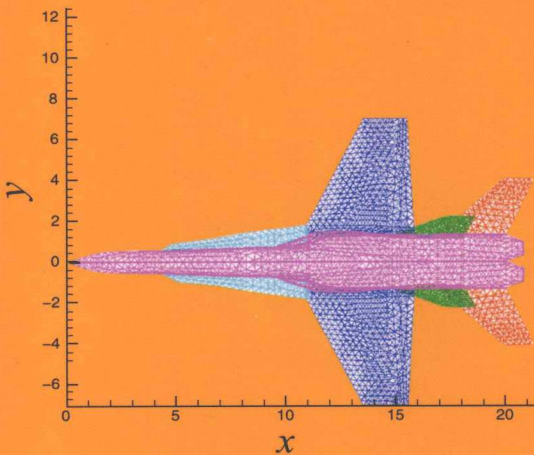


大飞机出版工程  
总主编 顾诵芬

# 非线性有限元及其 在飞机结构设计中的应用

Nonlinear Finite Element Method and Applications  
in Aircraft Structural Design

朱菊芬 汪海 徐胜利 编著



上海交通大学出版社  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS



国家出版基金项目  
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

大飞机出版工程  
总主编 顾诵芬

# 非线性有限元及其 在飞机结构设计中的应用

---

Nonlinear Finite Element Method and Applications  
in Aircraft Structural Design

朱菊芬 汪海 徐胜利 编著

 上海交通大学出版社  
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

## 内 容 提 要

本书重点介绍了结构力学中非线性问题的基本原理和有限元分析方法的基础知识。全书分为八章,系统地阐述了材料的弹塑性本构关系和大变形条件下基本方程的拉格朗日描述,同时给出了材料几何、非线性有限元列式和相应的设计程序。书中还详述了几何非线性理论在飞机结构设计稳定性分析中的应用。本书可作为高等工科院校理工科研究生、高年级本科生教材,也可供广大工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

非线性有限元及其在飞机结构设计中的应用 / 朱菊芬, 汪海, 徐胜利编著. —上海:上海交通大学出版社, 2011  
(大飞机出版工程)  
ISBN 978 - 7 - 313 - 07101 - 9

I. ①非… II. ①朱…②汪…③徐… III. ①非线性—有限元分析—应用—飞机—结构设计 IV. ①V221  
②0241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 015938 号

## 非线性有限元及其在飞机结构设计中的应用

朱菊芬 汪海 徐胜利 编著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 韩建民

常熟市华通印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

开本: 787mm×1092mm 1/16 印张: 15.75 字数: 306 千字

2011 年 5 月第 1 版 2011 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 313 - 07101 - 9/V 定价: 65.00 元

---

版权所有 侵权必究

## 丛书编委会

### 总主编:

顾诵芬(中国航空工业集团公司科技委副主任、两院院士)

### 副总主编:

金壮龙(中国商用飞机有限责任公司副董事长、总经理)

马德秀(上海交通大学党委书记、教授)

### 编委:(按姓氏笔画排序)

王礼恒(中国航天科技集团公司科技委主任、院士)

王宗光(上海交通大学原党委书记、教授)

刘洪(上海交通大学航空航天学院教授)

许金泉(上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院工程力学系主任、教授)

杨育中(中国航空工业集团公司原副总经理、研究员)

吴光辉(中国商用飞机有限责任公司副总经理、总设计师、研究员)

汪海(上海交通大学航空航天学院副院长、研究员)

沈元康(国家民航总局原副局长、研究员)

陈刚(上海交通大学副校长、教授)

陈迎春(中国商用飞机有限责任公司常务副总设计师、研究员)

林忠钦(上海交通大学副校长、教授)

金兴明(上海市经济与信息化委副主任、研究员)

金德琨(中国航空工业集团公司科技委委员、研究员)

崔德刚(中国航空工业集团公司科技委委员、研究员)

敬忠良(上海交通大学航空航天学院常务副院长、教授)

傅山(上海交通大学航空航天学院研究员)

## 总 序

国务院在 2007 年 2 月底批准了大型飞机研制重大科技专项正式立项,得到全国上下各方面的关注。“大型飞机”工程项目作为创新型国家的标志工程重新燃起我们国家和人民共同承载着“航空报国梦”的巨大热情。对于所有从事航空事业的工作者,这是历史赋予的使命和挑战。

1903 年 12 月 17 日,美国莱特兄弟制作的世界第一架有动力、可操纵、重于空气的载人飞行器试飞成功,标志着人类飞行的梦想变成了现实。飞机作为 20 世纪最重大的科技成果之一,是人类科技创新能力与工业化生产形式相结合的产物,也是现代科学技术的集大成者。军事和民生对飞机的需求促进了飞机迅速而不间断的发展,应用和体现了当代科学技术的最新成果;而航空领域的持续探索 and 不断创新,为诸多学科的发展和相关技术的突破提供了强劲动力。航空工业已经成为知识密集、技术密集、高附加值、低消耗的产业。

从大型飞机工程项目开始论证到确定为《国家中长期科学和技术发展规划纲要》的十六个重大专项之一,直至立项通过,不仅使全国上下重视起我国自主航空事业,而且使我们的人民、政府理解了我国航空事业半个世纪发展的艰辛和成绩。大型飞机重大专项正式立项和启动使我们的民用航空进入新纪元。经过 50 多年的风雨历程,当今中国的航空工业已经步入了科学、理性的发展轨道。大型客机项目其产业链长、辐射面宽、对国家综合实力带动性强,在国民经济发展和科学技术进步中发挥着重要作用,我国的航空工业迎来了新的发展机遇。

大型飞机的研制承载着中国几代航空人的梦想,在 2016 年将要造出与波音

B737 和空客 A320 改进型一样先进的“国产大飞机”已经成为每个航空人心中奋斗的目标。然而,大型飞机覆盖了机械、电子、材料、冶金、仪器仪表、化工等几乎所有工业门类,集成了数学、空气动力学、固体力学、材料学、人机工程学、自动控制学等多种学科,是一个复杂的科技创新系统。为了迎接新形势下理论、技术和工程等方面的严峻挑战,迫切需要引入、借鉴国外的优秀出版物和数据资料,总结、巩固我们的经验和成果,编著一套以“大飞机”为主题的丛书,借以推动服务“大型飞机”作为推动服务整个航空科学的切入点,同时对于促进我国航空事业的发展和加快航空紧缺人才的培养,具有十分重要的现实意义和深远的历史意义。

2008年5月,中国商用飞机有限公司成立之初,上海交通大学出版社就开始酝酿“大飞机出版工程”,这是一项非常适合“大飞机”研制工作时宜的事业。新中国第一位飞机设计宗师——徐舜寿同志在领导我们研制中国第一架喷气式歼击教练机——歼教1时,亲自撰写了《飞机性能捷算法》,及时编译了第一部《英汉航空工程名词字典》,翻译出版了《飞机构造学》、《飞机强度学》,从理论上保证了我们飞机研制工作。我本人作为航空事业发展50年的见证人,欣然接受了上海交通大学出版社的邀请担任该丛书的主编,希望为我国的“大型飞机”研制发展出一份力。出版社同时也邀请了王礼恒院士、金德琨研究员、吴光辉总设计师、陈迎春副总设计师等航空领域专家撰写专著、精选书目,承担翻译、审校等工作,以确保这套“大飞机”丛书具有高品质和重大的社会价值,为我国的大飞机研制以及学科发展提供参考和智力支持。

编著这套丛书,一是总结整理50多年来航空科学技术的重要成果及宝贵经验;二是优化航空专业技术教材体系,为飞机设计技术人员培养提供一套系统、全面的教科书,满足人才培养对教材的迫切需求;三是为大飞机研制提供有力的技术保障;四是将许多专家、教授、学者广博的学识见解和丰富的实践经验总结继承下来,旨在从系统性、完整性和实用性角度出发,把丰富的实践经验进一步理论化、科学化,形成具有我国特色的“大飞机”理论与实践相结合的知识体系。

“大飞机”丛书主要涵盖了总体气动、航空发动机、结构强度、航电、制造等专业方向,知识领域覆盖我国国产大飞机的关键技术。图书类别分为译著、专著、教材、

工具书等几个模块;其内容既包括领域内专家们最先进的理论方法和技术成果,也包括来自飞机设计第一线的理论和实践成果。如:2009年出版的荷兰原福克飞机公司总师撰写的 *Aerodynamic Design of Transport Aircraft* (《运输类飞机的空气动力设计》),由美国堪萨斯大学2008年出版的 *Aircraft Propulsion* (《飞机推进》)等国外最新科技的结晶;国内《民用飞机总体设计》等总体阐述之作和《涡量动力学》、《民用飞机气动设计》等专业细分的著作;也有《民机设计1000问》、《英汉航空双向词典》等工具类图书。

该套图书得到国家出版基金资助,体现了国家对“大型飞机项目”以及“大飞机出版工程”这套丛书的高度重视。这套丛书承担着记载与弘扬科技成就、积累和传播科技知识的使命,凝结了国内外航空领域专业人士的智慧和成果,具有较强的系统性、完整性、实用性和技术前瞻性,既可作为实际工作指导用书,亦可作为相关专业人员的学习参考用书。期望这套丛书能够有益于航空领域里人才的培养,有益于航空工业的发展,有益于大飞机的成功研制。同时,希望能为大飞机工程吸引更多的读者来关心航空、支持航空和热爱航空,并投身于中国航空事业而做出一点贡献。

顾诵芬

2009年12月15日

# 前 言

为了满足我国“大型飞机”重大专项对飞机研制人才的迫切需求,上海交通大学在上海市政府的大力支持下,启动了“上海交通大学大型民机创新工程”项目。本书作为该项目三个子项目之一的“人才工程”配套内容,于2008年初正式立项,并在2009年春季和秋季两个学期的飞行器设计研究生“特班”得以试用和完善。

众所周知,工程结构中的许多力学问题,从本质上讲都是非线性的。结构力学中的线性假设,是早期(19世纪中叶)受当时计算工具和计算方法的限制而不得不对实际问题所作的一种简化。由于现代飞机结构日趋大型、整体、复杂化,而且许多主承力构件还大量采用了先进复合材料,使得许多结构件在高载、高温和反复变载条件下呈现出一系列复杂的非线性现象,因此,对飞机结构进行非线性分析是十分必要的。有限元方法是目前求解结构力学中非线性问题最便捷、最有效的数值方法,现有的大型、高速计算机和成熟、有效的计算软件使得结构的非线性分析成为可能。随之,从20世纪70年代起一个以大型结构分析软件为标志的《计算结构力学》新学科应运而生,并发展迅猛。

近年来,我国从国外引进的大型通用结构分析软件较多,如 NASTRAN、MARC、ABAQUS 等,这些软件已经在我国航空航天的相关科研院所得到普遍使用,且大多具备较强的非线性分析功能。但是,现有的科研技术人员对这些软件的非线性分析功能的使用与开发还很不够,其主要原因是缺乏非线性分析的基础理论知识。为了帮助他们了解非线性问题的力学原理以及非线性有限元的计算方法,看懂相关文献资料,很好地使用和开发现有的通用商业软件,解决非线性结构分析的问题,本书作者以在大连理工大学工作期间的教学讲义和相关科研成果为基础,并结合最近几年的工程应用需求编写了这本著作。



本书在编写过程中,考虑到主要阅读对象是工科专业毕业的硕士研究生,因此,本书内容在理论上偏重基本概念并举一反三,方法上力求反映国内外新近研究成果;应用上紧密结合航空工程结构并给出具体实施的方法和步骤;表达上力求深入浅出,方便读者学习。本书共分为8章,前6章由朱菊芬教授编写。第1章简要介绍非线性问题的分类和一些基本概念,使读者对非线性有限元方法有个概貌了解和粗浅认识。同时,对线性有限元方法的基本原理作简要回顾。第2章介绍了材料非线性的本构关系,重点是一般工程材料的塑性本构理论,包括屈服、强化、加卸载准则和塑性流动法则等。第3章讲述了弹塑性有限元方法的实施办法和具体步骤。第4章从工程应用的角度,给出以增量/迭代型为主的非线性方程组的求解方法和步骤,同时还介绍了能跟踪几何非线性路径的弧长法。第5章阐述了大变形条件下几何非线性基本方程的Lagrange描述和应力、应变度量。第6章给出了几何非线性理论与求解方法的具体实施步骤和过程。第7、8章是由朱菊芬与汪海教授编写的结构非线性稳定性分析和在飞机结构分析中的应用。薄壁结构非线性稳定性分析和研究是几何非线性理论在工程应用中的衍生学科,也是作者科研工作的主要内容。

为了使读者深入理解本教程的基本理论和方法,具体了解非线性有限元分析的实施过程,最后还附有三个教学程序,可供研究生学习和用作数值试验。这三个教学程序是作者在讲授“非线性有限元”这门课程中逐步成型的。最后的整理和编写工作由大连理工大学徐胜利博士完成。

本书除为飞机结构强度专业硕士班作为教材之外,还可用作高等工科院校工程学科的研究生、高年级本科生的教材或参考书,也可作为广大工程技术人员学习非线性有限元分析的参考书。由于作者知识面和学术水平有限,加上时间仓促,书中不妥和错误敬请批评指正。

最后,感谢大连理工大学和上海交通大学上过这门课的历届研究生为本书的电子文档所做的工作。

编著者

## 主要符号及术语对照表

3-node beam isoperimetric element	三结点等参梁单元
4-node quadrilateral isoperimetric element	四结点等参四边形单元
8-node isoperimetric element	八结点等参单元
accumulated plastic strain	累积塑性应变( $\epsilon_a^p$ )
accuracy	精确度
adjacent coordinate system	相邻坐标系
advanced composites	先进复合材料
Almansi strain	阿尔曼西应变( $e_{ij}$ )
arc length method	弧长法
axisymmetric problem	轴对称问题
Bauschinger effect	鲍氏效应
bifurcation instability	分支型失稳
body configuration	物体构型
computer aided design	计算机辅助设计(CAD)
computer aided manufacture	计算机辅助制造(CAM)
consistency condition	一致性条件
constitution relation	本构关系
contact nonlinearity	接触非线性
convergence criterion	收敛准则
coordinate transformation	坐标变换
criterion load	临界载荷
current coordinate system	瞬时坐标系

damage failure	损伤破坏
deformation energy	变形能
degree of freedom	自由度
direct-iterative method	直接迭代法(割线刚度法)
discretization	离散化
displacement compatibility equations	位移协调方程
displacement mode	位移模式
Drucker-Prager yield criterion	Drucker-Prager 屈服准则
dynamic hardening model	随动强化模型
eigenvalue vector	特征向量
eigenvalue value	特征值( $\lambda$ )
elastic-plastic matrix	弹塑性矩阵( $\mathbf{D}_{ep}$ )
element stiffness matrix	单元刚度矩阵( $\mathbf{K}^e$ )
equilibrium conditions	平衡条件
equivalent strain	等效应变( $\bar{\epsilon}$ )
equivalent stress	等效应力( $\bar{\sigma}$ )
equivalent stress	相继屈服应力( $\sigma'_s$ )
Eulerian stress	欧拉应力
external work	外力功
failure criterion	破坏准则
flowchart	流程图
Gauss integration	高斯积分
generalized eigenvalues equations	广义特征值方程
geometric matrix	几何矩阵( $\mathbf{B}$ )
geometric nonlinearity	几何非线性
governing equations	控制方程
Green strain	格林应变( $\mathbf{E}_{ij}$ )
hardening material	强化材料
Hooke's law	虎克定律
incremental equilibrium equations	增量平衡方程

inequilibrium force vector	不平衡力向量( $\mathbf{Z}$ )
initial coordinate system	初始坐标系
initial stress matrix	初应力阵( $\mathbf{K}_0$ )
initial yield criterion	初始屈服准则
initiation yield stress	初始屈服应力( $\sigma_s^0$ )
isoparametric element	等参单元
isoperametric transformation	等参变换
isotropic elasticity	各向同性弹性
isotropic hardening model	各向同性强化模型
iterative method	迭代法
Jacobian determinant	雅可比行列式( $\det \mathbf{J}$ )
Kirchhoff stress	克希霍夫应力( $\mathbf{S}_j^k$ )
Lagrangian stress	拉格朗日应力( $\mathbf{T}_{ij}$ )
laminate plate	层合板
large deformation matrix	大位移阵( $\mathbf{K}_L$ )
linearization	线性化
load-deflection curve	载荷-挠度曲线
mass conservation	质量守恒
material nonlinearity	材料非线性
incremental/iterative method	增量/迭代型方法
mixed method	混合法
modified Newton-Raphson method	修正的牛顿-拉夫森法
Mohr-Coulomb yield criterion	摩尔-库仑屈服准则
Newton-Raphson method	牛顿-拉夫森法
nonlinear elasticity	非线性弹性
nonlinear equilibrium path	非线性平衡路径
nonlinear finite element method	非线性有限元方法(NFEM)
perfect plastic material	理想塑性材料
plane strain	平面应变
plane stress	平面应力

plastic flow rule	塑性流动法则
Poisson ratio	泊松比( $\nu$ )
post-buckling	后屈曲
pre-buckling	前屈曲
principle of virtual work	虚功原理
pure incremental method	纯增量法
reference configuration	参考构型
residual deformation	残余变形
rigid rotation	刚体转动
second invariant of stress deviator	应力偏量第二不变量( $J_2$ )
snap-back	回弹
snap-through	跳跃
strain deviator tensor	应变偏张量( $e_{ij}$ )
strain tensor	应变张量( $\epsilon_{ij}$ )
stress deviator tensor	应力偏张量( $S_{ij}$ )
stress tensor	应力张量( $\sigma_{ij}$ )
tangent stiffness matrix	切线刚度矩阵( $\mathbf{K}_T$ )
tensor notation	张量符号
theory of strength	强度理论
total Lagrangian formulation	全局的拉格朗日表示
total potential energy	总位能
Tresca yield criterion	屈雷斯加屈服准则
ultimate instability	极值型失稳
uniaxial tensile curve	单向拉伸曲线
updated Lagrangian formulation	更新的拉格朗日表示
upload surface equations	加载面方程
upload/unload/neutral loading	加载、卸载和中性变载
Virtual Engineering and Science	虚拟工程与科学研究
virtual strain	虚应变
visco-elasticity	黏弹性

---

visco-plasticity	黏塑性
volume incompressibility	体积不可压缩
Von-Karman large deflection theory	冯-卡门大挠度理论
Von-Mises yield criterion	冯-米赛斯屈服准则
Young's modulus	杨氏模量( $E$ )

# 目 录

- 1 绪论 1
  - 1.1 非线性有限元概述 1
    - 1.1.1 有限元方法的产生和发展 1
    - 1.1.2 非线性有限元的分类和求解方法 3
  - 1.2 线性有限元的回顾 5
    - 1.2.1 本构关系 5
    - 1.2.2 几何方程 6
    - 1.2.3 平衡方程 8
    - 1.2.4 有限元方法的三个基本步骤 10
  - 1.3 等参单元 11
    - 1.3.1 单元位移插值 11
    - 1.3.2 基于坐标变换的等参单元 12
    - 1.3.3 八结点等参轴对称单元的几何阵  $B$  和单元刚度矩阵  $K^e$  15
    - 1.3.4 三结点等参梁单元的几何阵  $B$  和单元刚度矩阵  $K^e$  18
- 2 材料非线性的本构关系——塑性本构理论 22
  - 2.1 单向拉伸试验和塑性变形的特点 22
  - 2.2 初始屈服准则 23
    - 2.2.1 屈服函数的一般形式 23
    - 2.2.2 与静水压力无关的屈服准则 24
    - 2.2.3 考虑静水压力影响的屈服准则 27
  - 2.3 塑性应力-应变关系的增量理论 28
    - 2.3.1 塑性流动法则 28
    - 2.3.2 增量理论的一般表达式 29
  - 2.4 强化模型 31
    - 2.4.1 强化模型的一般表达式 32

- 2.4.2 各向同性强化模型 32
- 2.4.3 随动强化模型 35
- 2.5 加、卸载准则 36
  - 2.5.1 加载、卸载和中性变载 36
  - 2.5.2 强化材料的加卸载准则 37
- 2.6 弹塑性矩阵的一般形式 38
  - 2.6.1 一致性条件 38
  - 2.6.2 增量形式的弹塑性矩阵  $D_{ep}$  38
  - 2.6.3 Von-Mises 各向同性强化材料的弹塑性矩阵 40
  - 2.6.4 平面问题的弹塑性矩阵 41
  - 2.6.5 两个公式的证明 41
- 3 弹塑性有限元方法的实施 46
  - 3.1 增量平衡方程和切线刚度矩阵 46
    - 3.1.1 分段线性化的求解思想 46
    - 3.1.2 增量平衡方程和切线刚度矩阵的推导 46
  - 3.2 强化系数  $H'$  的数值表示 48
    - 3.2.1 解析表达式 48
    - 3.2.2 实验方法 50
  - 3.3 过渡单元弹塑性矩阵的确定 50
    - 3.3.1 三种变形状态 50
    - 3.3.2 加权平均的弹塑性矩阵  $\overline{D}_{ep}$  50
    - 3.3.3 过渡单元  $m$  值的确定 51
  - 3.4 采用纯增量法作弹塑性有限元分析的步骤 53
  - 3.5 受均匀内压作用厚壁筒的弹塑性分析 54
    - 3.5.1 程序设计框图 54
    - 3.5.2 屈服条件和弹塑性矩阵 55
    - 3.5.3 受均匀内压  $p$  作用厚壁筒的解析解 56
- 4 非线性方程组的解法 61
  - 4.1 非线性方程组的一般形式 61
  - 4.2 载荷增量法 62
  - 4.3 迭代法 63
    - 4.3.1 直接迭代法 63
    - 4.3.2 Newton - Raphson 迭代法(N-R 法) 64
    - 4.3.3 修正的 N-R 迭代法 66



- 4.4 混合法 67
- 4.5 等弧长法及其改进 68
  - 4.5.1 等弧长法 69
  - 4.5.2 弧长法的改进 72
  - 4.5.3 收敛到某些预定载荷值的弧长法 73
- 4.6 迭代收敛准则和增量步的选取 75
  - 4.6.1 收敛准则 75
  - 4.6.2 增量步长的选择 76
- 5 大变形问题的基本方程和 Lagrange 表示法 79
  - 5.1 物体的运动分析和应变度量 79
    - 5.1.1 物体运动方程 80
    - 5.1.2 Almansi 应变和 Green 应变 80
  - 5.2 物体内一点的应力度量 85
    - 5.2.1 Euler 应力 85
    - 5.2.2 Lagrange 应力 85
    - 5.2.3 Kirchhoff 应力 86
    - 5.2.4 三种应力之间的关系 86
  - 5.3 大变形过程的弹性本构方程 87
  - 5.4 Lagrange 坐标系下的有限元列式推导 88
    - 5.4.1 T. L. 方法 88
    - 5.4.2 U. L. 方法 92
    - 5.4.3 T. L. 法与 U. L. 法的比较 94
  - 5.5 基本概念提要 95
- 6 几何非线性有限元的具体实施 97
  - 6.1 Lagrange 方程及其求解步骤 97
    - 6.1.1 Lagrange 方程及求解格式 97
    - 6.1.2 T. L. 方法的算法和求解步骤 98
    - 6.1.3 U. L. 方法的算法和求解步骤 100
  - 6.2 轴对称、梁、板单元切线刚度的推导 102
    - 6.2.1 大变形八结点等参轴对称单元切线刚度矩阵 102
    - 6.2.2 大挠度平面弯曲梁单元切线刚度矩阵 106
    - 6.2.3 大挠度板单元切线刚度矩阵 109
  - 6.3 几何非线性典型算例 114
    - 6.3.1 周边固支受均布载荷作用的圆板 114