大学物理
学习指导书

主编 刘帅 林蔺 宋阳 梁平平

高等教育出版社

大学物理学习指导书

Daxue Wuli Xuexi Zhidaoshu

主编　刘帅　林蔺　宋阳　梁平平

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是配套《大学物理》(上、下册)的学习指导书和习题详解。内容包括：质点运动学、质点运动定律与守恒定律、刚体的定轴转动、机械振动、机械波、气体动理论、热力学基础、狭义相对论、量子物理基础、光的干涉、光的衍射、光的偏振、静电场、静电场中的导体和电介质、恒定磁场、电磁感应、电磁波。书中编者根据长期教学实践的经验和体会，归纳和总结了求解大学物理习题的解题思路、解题方法和各种解题技巧并着重指出各章习题的解答运用哪些基本概念和基本规律、解题中的难点和容易犯错误的地方以及应该注意的主要问题等，对读者学习或复习大学物理有较好的借鉴作用。编者还十分注意解题的规范性和示范性，同时强调解题的灵活性和解题技巧，并力争做到简明扼要，突出物理图像和解题思路，以提高读者分析问题和解决问题的能力。

本书可作为理工科院校本科学生学习“大学物理”课程的课后练习用书，也可作为教师在布置作业、考试命题及试题库选题时的参考书，还可供自学者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习指导书 / 刘帅等主编 . -- 北京 : 高等教育出版社 , 2016.3

ISBN 978-7-04-044684-5

Ⅰ . ①大… Ⅱ . ①刘… Ⅲ . ①物理学 – 高等学校 – 教学参考资料 Ⅳ . ① O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 015052 号

策划编辑 马天魁　　责任编辑 马天魁　　封面设计 赵　阳　　版式设计 赵　阳
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 陈旭颖　　责任印制 耿　轩

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京市大天乐投资管理有限公司	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
			http://www.hepmall.com
开　　本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	21	版　　次	2016 年 3 月第 1 版
字　　数	380 千字	印　　次	2016 年 3 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	36.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　44684-00

contents

目 录

chapter 1

第 1 章 质点运动学

基本要求

1. 掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述质点运动及运动变化的物理量。理解这些物理量的矢量性、瞬时性和相对性。

2. 理解运动方程的物理意义及作用。掌握运用运动方程确定质点的位置、位移、速度和加速度的方法，以及已知质点运动的加速度和初始条件求速度、运动方程的方法。

3. 能计算质点在平面内运动时的速度和加速度，以及质点作圆周运动时的角速度、角加速度、切向加速度和法向加速度。

4. 会求简单的质点相对运动问题。

内容提要

1. 描述质点运动及运动变化的物理量

① 位置矢量：由坐标原点引向质点所在位置的有向线段，简称位矢，它表示了质点在空间中的位置。在三维直角坐标系中，它的矢量表达式为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

其大小为

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

其方向可由它与 x、y、z 三个坐标轴所夹三个角 α、β、γ 的余弦来表示：

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\ \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\ \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

② 位移矢量：由运动起点 A 引向运动终点 B 的有向线段，它表示了质点在给定时间内位置的总变化。

在二维直角坐标系中，位移矢量可表示为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=(x_B-x_A)\boldsymbol{i}+(y_B-y_A)\boldsymbol{j}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}$$

其大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

方向为

$$\tan\alpha=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

式中 α 角为位移矢量与 x 轴正方向所夹的角，应按逆时针算起。

③ 速度矢量：定义为 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 即位置矢量对时间的一阶导数；在直线运动中，$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$。

在二维直角坐标系中，速度可表示为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

式中 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_x$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y$；速度大小为

$$|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

速度矢量表示了质点位置变动的快慢和方向。

④ 加速度矢量：加速度矢量被定义为速度对时间的一阶导数，或位置矢量对时间的二阶导数。即

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

在二维直角坐标系中，$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$ 或 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}$，其中 $\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=a_x$，$\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=a_y$；$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=a_x$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=a_y$。

加速度大小和方向可分别表示为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}\ ,\ \alpha=\arctan\frac{a_y}{a_x}$$

在自然坐标系中，表示为 $a=a_n\boldsymbol{e}_n+a_t\boldsymbol{e}_t$

式中 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$，$a_t=\dfrac{dv}{dt}$ 。

加速度的物理意义是：它表示了质点速度变化的快慢与方向，或者说，法向加速度 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$，表示了质点运动方向变化的快慢程度，而切向加速度 $a_t=\dfrac{dv}{dt}$，则表示了质点速度大小变化的快慢程度。在这里要特别注意，加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$，即加速度等于速度矢量对时间的一阶导数，而作为加速度 $\boldsymbol{a}$ 的一部分的切向加速度 $a_t=\dfrac{dv}{dt}$，即切向加速度大小等于速度大小对时间的一阶导数。还要注意一般情况下 $|\boldsymbol{a}|=\left|\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|\neq\dfrac{dv}{dt}$。

2. 运动方程与轨迹方程

① 运动方程：质点的位置随时间变化的关系。它的矢量表达式为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

分量表达式为

$$x=x(t),\ y=y(t)$$

上式也可称为参数方程，时间 t 为参数。

② 轨迹方程：从运动方程中消去参数 t 而得到的两个坐标间的关系式，即 $y=f(x)$ 或 $f(x,y)=0$。

3. 运动学两类基本问题

第一类问题　已知运动方程求速度、加速度等。此类问题的基本解法是根据各量定义求导数。

第二类问题　已知速度函数（或加速度函数）及初始条件求运动方程。此类问题的基本解法是根据各量之间的关系求积分。

4. 圆周运动的线量和角量描述（见下表）

线量	角量	线量与角量关系
位置 s	角位置 θ	$s=R\theta$
路程 Δs	角位移 $\Delta\theta=\theta(t+\Delta t)-\theta(t)$	$\Delta s=R\Delta\theta$

续表

线量	角量	线量与角量关系
速度 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{e}_t=\frac{ds}{dt}\boldsymbol{e}_t$	角速度 $\omega=\frac{d\theta}{dt}$	$v=R\omega$
加速度 $a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$ $a_n=\frac{v^2}{R}$	角加速度 $\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$	$a_t=R\alpha$ $a_n=R\omega^2$

5. 质点相对运动

质点相对于运动参考系的运动称为相对运动。

解决相对运动的问题，需要将运动参考系与不动参考系之间的相关参量进行变换。

对于位矢，有 $\boldsymbol{r}_{绝对}=\boldsymbol{r}_{相对}+\boldsymbol{r}_{牵连}$；

对于速度，有 $\boldsymbol{v}_{绝对}=\boldsymbol{v}_{相对}+\boldsymbol{v}_{牵连}$；

对于加速度，有 $\boldsymbol{a}_{绝对}=\boldsymbol{a}_{相对}+\boldsymbol{a}_{牵连}$。

习　　题

题 1–1　一质点在 Oxy 平面上运动，运动方程为 $x=3t$，$y=t^2$。式中 t 以 s 为单位，x、y 以 m 为单位。（1）以时间 t 为变量，写出质点位置矢量的表达式；（2）求出 $t=1$ s 时刻和 $t=2$ s 时刻之间的位移；（3）计算 $t=0$ s 时刻到 $t=4$ s 时刻内的平均速度；（4）求出质点速度矢量表达式；（5）计算 $t=0$ s 到 $t=4$ s 内质点的平均加速度；（6）求出质点加速度矢量的表达式。

分析：本题应当注意，任意时刻的速度或加速度应当给出矢量形式的一般表达式，然后再代入具体时刻来解出某一时刻的具体数值。要注意概念的区分，如位移和位移的大小，速度及速度的大小。

解：（1）$\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}$

（2）将 $t=1$ s，$t=2$ s 代入上式即有

$$\boldsymbol{r}_1=(3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\ \text{m}$$

$$\boldsymbol{r}_2=(6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\ \text{m}$$

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(3\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j})\ \text{m}$$

（3）

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}\ \mathrm{m}$$

$$\boldsymbol{r}_4 = (12\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}_4 - \boldsymbol{r}_0}{(4-0)\mathrm{s}}$$

$$= \frac{12\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j}}{4}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$= (3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

（4）

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (3\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j})\ \text{（SI 单位）}$$

（5）

$$\boldsymbol{v}_0 = 3\boldsymbol{i}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$\boldsymbol{v}_4 = (3\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}_4 - \boldsymbol{v}_0}{4}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}} = (2\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

（6）

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = (2\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

题 1-2 已知质点沿 x 轴作直线运动，其运动方程为 $x = 1 + 4t - t^2$（SI 单位），求：（1）质点在运动开始后 3.0 s 内的位移的大小；（2）质点在该时间内所通过的路程。

解：（1）

$$t = 0\ \mathrm{s}\ 时，x_1 = 1\ \mathrm{m}$$

$$t = 3\ \mathrm{s}\ 时，x_2 = 4\ \mathrm{m}$$

则质点在运动开始后 3.0 s 内的位移的大小为

$$|\Delta x| = |x_2 - x_1| = 3\ \mathrm{m}$$

（2）质点作往复运动，应先求出速度为 0 时的时间。

当 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4 - 2t = 0$ 时，质点改变方向，得到

$$t = 2\ \mathrm{s}$$

则

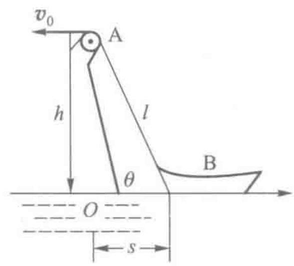
$$\Delta x_1 = x_2 - x_0 = 4\ \mathrm{m}$$

$$\Delta x_2 = x_3 - x_2 = 1\ \mathrm{m}$$

所以，质点在 3.0 s 内的路程为

$$s=\left|\Delta x_1\right|+\left|\Delta x_2\right|=5\ \mathrm{m}$$

题 1–3　在离水面高 h 的岸上，有人用绳子拉船靠岸，如题 1-3 图所示。当人以 v_0 的匀速率收绳时，试求船运动的速度的大小和加速度的大小。



题 1–3 图

分析：本题借助运动模型的约束条件，即 $l^2=h^2+s^2$ 来帮助求解问题。显然，在 h 保持不变的情况下，l、s 的微分存在必然联系。借助 l、s 随时间的变化量即可求解出问题的答案。通过本题，可以看出应用微分方程解决问题具有较大的灵活性。

解：设 t 时刻人到船之间绳的长度为 l，此时绳与水面成 θ 角，由图可知

$$l^2=h^2+s^2$$

将上式对时间 t 求导，得

$$2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

根据速度的定义，则

$$v_{绳}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=v_0$$

$$v_{船}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

即

$$v_{船}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{s}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{l}{s}v_0$$

$$v_{船}=\frac{lv_0}{s}=\frac{\left(h^2+s^2\right)^{1/2}v_0}{s}$$

将 $v_{船}$ 再对 t 求导，则船的加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}v_{船}}{\mathrm{d}t}=\frac{s\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}-l\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}{s^2}v_0$$

$$=\frac{v_0 s - l v_{船}}{s^2} v_0$$

$$=\frac{\left(s-\frac{l^2}{s}\right) v_0^2}{s^2}$$

$$=-\frac{h^2 v_0^2}{s^3}$$

结果中的负号表示加速度的方向与坐标轴正向相反。

题 1–4 质点沿 x 轴运动，其加速度和位置的关系为 $a=6x^2$，a 的单位为 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$，x 的单位为 m。质点在 $x=0$ 处，速度为 $10\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，试求质点在任意坐标处的速度值。

分析： 在本题中，加速度 a 与时间的函数关系并不知道。显然用公式 $\int a\mathrm{d}t=\int \mathrm{d}v$ 无法求解；但在其微分式 $a\mathrm{d}t=\mathrm{d}v$ 中却可以灵活处理。可以利用关系式 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 将时间 t 消掉，从而找到 v 与 x 的关系。这样的处理方法是根据已知条件和所求解的问题灵活进行调整的常用方法。

解：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

分离变量得

$$v\mathrm{d}v=a\mathrm{d}x=6x^2\mathrm{d}x$$

两边积分

$$\int_{10}^{v} v\mathrm{d}v=\int_0^x 6x^2\mathrm{d}x$$

得

$$\frac{1}{2}\left(v^2-10^2\right)=2x^3$$

则

$$v=2\sqrt{x^3+25}\left(\mathrm{m \cdot s^{-1}}\right)$$

题 1–5 已知一质点作直线运动，其加速度为 $a=4+2t$（SI 单位），开始运动时，$x=5$ m，$v=0$，求：（1）该质点在 t 时刻的速度；（2）该质点在 t 时刻的位置。

解：（1）

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4+2t$$

从而

$$dv = (4 + 2t)\,dt$$

两边积分，$\int_0^v dv = \int_0^t (4+2t)dt$ 从而求出质点在 t 时刻的速度为

$$v = 4t + t^2$$

（2）由

$$v = \frac{dx}{dt} = 4t + t^2$$

于是有

$$dx = (4t + t^2)\,dt$$

两端积分

$$\int_5^x dx = \int_0^t (4t + t^2) dt$$

得

$$x = 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5$$

题 1–6 一质点自原点开始沿抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 运动，它在 Ox 轴上的分速度为一常量，其值为 $v_x = 4.0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，求质点位于 $x = 2.0$ m 的速度和加速度。

分析：可以先求解出质点沿 x 轴的运动方程，然后通过轨道方程求解出质点在 y 轴的运动方程。

解：根据$v_x = \frac{dx}{dt} = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$，有

$$\int_0^x dx = \int_0^t 4dt$$

因此

$$x = 4t$$

又 $y = \frac{1}{2}x^2$，所以

$$y = 8t^2$$

于是

$$\boldsymbol{r} = 4t\boldsymbol{i} + 8t^2\boldsymbol{j}$$

则质点的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=4\boldsymbol{i}+16t\boldsymbol{j}$$

质点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=16\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

根据 $x=2.0$ m 时，$t=0.5$ s，可得

$$\boldsymbol{v}=(4\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$
$$\boldsymbol{a}=16\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

题 1–7 质点在 Oxy 平面内运动，其运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}-2t^2\boldsymbol{j}$（SI 单位）。求：

（1）质点的轨迹方程；

（2）在 $t_1=1$ s 到 $t_2=2$ s 时间内的平均速度；

（3）$t_1=1$ s 时的速度；

（4）$t_1=1$ s 时的切向和法向加速度的大小。

分析：本题中需要注意，加速度是速度对时间的一阶导数。而切向加速度是速率（速度的大小）对时间的一阶导数（在自然坐标系下）。

解：（1）由题知 $x=2t$，且 $y=-2t^2$，消去 t 得质点的轨迹方程：

$$y=-\frac{1}{2}x^2$$

（2）当 $t=1$ s 时，$\boldsymbol{r}_1=(2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})$ m；当 $t=2$ s 时，$\boldsymbol{r}_2=(4\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j})$ m。质点的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}$$

则质点的平均速度为

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{(2-1)\ \mathrm{s}}$$
$$\bar{\boldsymbol{v}}=(2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

（3）根据 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}-2t^2\boldsymbol{j}$，可得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$$

当 $t=1$ s 时，速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

（4）加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

加速度大小为

$$a=4\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

此外，根据 $$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4+16t^2}$$
可得质点切向加速度为

$$a_{\mathrm{t}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{16t}{\sqrt{4+16t^2}}$$

法向加速度为

$$a_{\mathrm{n}}=\sqrt{a^2-a_{\mathrm{t}}^2}=\frac{4}{\sqrt{1+4t^2}}$$

于是当 $t=1$ 时，有 $a_{\mathrm{t}}=3.58\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$，$a_{\mathrm{n}}=1.79\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$。

题1–8 一质点具有恒定加速度 $\boldsymbol{a}=(6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$，在 $t=0$ 时，其速度为零，位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=(10\boldsymbol{i})\ \mathrm{m}$。求：

（1）在任意时刻的速度和位置矢量；

（2）质点在 Oxy 平面上的轨迹方程。

解：（1）根据 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，有

$$\int_0^{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t\boldsymbol{a}\mathrm{d}t=\int_0^t(6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$

则

$$\boldsymbol{v}=6t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j}$$

根据 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，有

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\int_0^t\boldsymbol{v}\mathrm{d}t\\&=\int_0^t(6t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t\\&=3t^2\boldsymbol{i}+2t^2\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

则

$$\boldsymbol{r}=(3t^2+10)\boldsymbol{i}+2t^2\boldsymbol{j}$$

（2）由 $\boldsymbol{r} = (3t^2 + 10)\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j}$，得

$$x = 3t^2 + 10$$

$$y = 2t^2$$

则质点轨迹方程为

$$3y = 2x - 20$$

题 1-9 一质点沿半径 R 为 1 m 的圆周运动，运动方程为 $\theta = 2 + 3t^3$，式中 θ 以 rad 计，t 以 s 计，求：

（1）t 时刻，质点的切向和法向加速度；

（2）当加速度的方向和半径成 45° 角时，其角位移是多少？

解：

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 9t^2,\ \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 18t$$

（1）t 时刻，切向加速度为

$$a_t = R\alpha = 18t$$

法向加速度为

$$a_n = R\omega^2 = 81t^4$$

（2）当加速度方向与半径成 45° 角时，有

$$\tan 45° = \frac{a_t}{a_n} = 1$$

即

$$R\omega^2 = R\alpha$$

于是有

$$(9t^2)^2 = 18t$$

解得

$$t^3 = \frac{2}{9}$$

因此角位移为

$$\theta = (2 + 3t^3) - 2 = 0.67\ \text{rad}$$

题 1-10 质点沿半径为 R 的圆周按 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$ 的规律运动，式中 s 为质点

离圆周上某一点的弧长，v_0、b 都是常量，求：

（1）t 时刻质点的加速度大小，加速度与半径之间的夹角；

（2）t 为何值时，加速度在数值上等于 b。

解：（1）根据 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_0-bt$，有

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-b$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{(v_0-bt)^2}{R}$$

则加速度大小为

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}}$$

加速度与半径的夹角为

$$\varphi=\arctan\frac{a_t}{a_n}=\frac{-Rb}{(v_0-bt)^2}$$

（2）由题意有

$$a=b=\sqrt{b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}}$$

即

$$b^2=b^2+\frac{(v_0-bt)^4}{R^2}$$

$$\Rightarrow (v_0-bt)^4=0$$

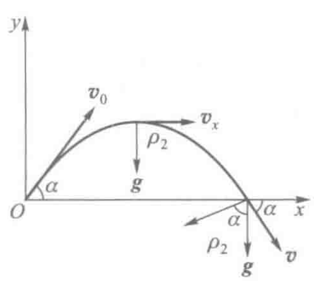
因此，当 $t=\frac{v_0}{b}$ 时，$a=b$。

题 1–11 以初速度 v_0 抛出一小球，抛出方向与水平面成 α 的夹角，求：

（1）小球到轨道最高点的曲率半径 ρ_1；

（2）落地处的曲率半径 ρ_2。

解：设小球所作抛物线轨道如图所示。



题 1–11 图

（1）在最高点，$v_1=v_x=v_0\cos\alpha$，且

$$a_{n1}=g$$

又 $a_{n1}=\frac{v_1^2}{\rho_1}$，于是有