

21世纪高等学校规划教材 | 计算机科学与技术



# 算法分析与设计

——以大学生程序设计竞赛为例

赵端阳



清华大学出版社

21世纪高等学校规划教材 | 计算机科学与技术

# 算法分析与设计

## ——以大学生程序设计竞赛为例

赵端阳 左伍衡 编著

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

本书主要介绍经典的算法设计技术,内容包括数据结构和标准模板库 STL、递归与分治策略、动态规划、贪心算法、回溯算法、分支限界算法和图的搜索算法。本书内容基本上涵盖了目前大学生程序设计竞赛所要掌握的算法。本书通过大量的问题剖析实例,并在浙江大学在线题库中精选了部分题目,详细地分析解题的方法,深入浅出地讲解所使用的算法。还把在浙江大学在线题库中精选的题目作为每章后面的习题,供读者练习,以巩固所学的算法。

本书可作为计算机科学与技术系、软件学院、数学系等专业本科及研究生课程的教材,特别适合有志于参加大学生程序设计竞赛的学生学习和训练。

本书配备有电子教案和源代码,请到清华大学出版社官网下载: [www.tup.tsinghua.edu.cn](http://www.tup.tsinghua.edu.cn)。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

算法分析与设计:以大学生程序设计竞赛为例/赵端阳等编著.--北京:清华大学出版社,2012.3  
(21世纪高等学校规划教材·计算机科学与技术)  
ISBN 978-7-302-27413-1

I. ①算… II. ①赵… III. ①电子计算机—算法分析—高等学校—教材 ②电子计算机—算法设计—高等学校—教材 IV. ①TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 246002 号

责任编辑:闫红梅 薛 阳

封面设计:傅瑞学

责任校对:焦丽丽

责任印制:杨 艳

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:保定市中国画美凯印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:22.5 字 数:546千字

版 次:2012年3月第1版 印 次:2012年3月第1次印刷

印 数:1~3000

定 价:39.00元

产品编号:037843-01

# 编审委员会成员

(按地区排序)

清华大学	周立柱	教授
	覃征	教授
	王建民	教授
	冯建华	教授
	刘强	副教授
北京大学	杨冬青	教授
	陈钟	教授
	陈立军	副教授
北京航空航天大学	马殿富	教授
	吴超英	副教授
	姚淑珍	教授
中国人民大学	王珊	教授
	孟小峰	教授
	陈红	教授
北京师范大学	周明全	教授
北京交通大学	阮秋琦	教授
	赵宏	副教授
北京信息工程学院	孟庆昌	教授
北京科技大学	杨炳儒	教授
石油大学	陈明	教授
天津大学	艾德才	教授
复旦大学	吴立德	教授
	吴百锋	教授
	杨卫东	副教授
同济大学	苗夺谦	教授
	徐安	教授
华东理工大学	邵志清	教授
华东师范大学	杨宗源	教授
	应吉康	教授
东华大学	乐嘉锦	教授
	孙莉	副教授

浙江大学	吴朝晖	教授
	李善平	教授
扬州大学	李 云	教授
南京大学	骆 斌	教授
	黄 强	副教授
南京航空航天大学	黄志球	教授
	秦小麟	教授
南京理工大学	张功萱	教授
南京邮电学院	朱秀昌	教授
苏州大学	王宜怀	教授
	陈建明	副教授
江苏大学	鲍可进	教授
中国矿业大学	张 艳	教授
武汉大学	何炎祥	教授
华中科技大学	刘乐善	教授
中南财经政法大学	刘腾红	教授
华中师范大学	叶俊民	教授
	郑世珏	教授
江汉大学	陈 利	教授
国防科技大学	颜 彬	教授
	赵克佳	教授
中南大学	邹北骥	教授
湖南大学	刘卫国	教授
西安交通大学	林亚平	教授
	沈钧毅	教授
长安大学	齐 勇	教授
哈尔滨工业大学	巨永锋	教授
吉林大学	郭茂祖	教授
	徐一平	教授
山东大学	毕 强	教授
	孟祥旭	教授
中山大学	郝兴伟	教授
厦门大学	潘小焱	教授
厦门大学嘉庚学院	冯少荣	教授
云南大学	张思民	教授
电子科技大学	刘惟一	教授
	刘乃琦	教授
成都理工大学	罗 蕾	教授
	蔡 淮	教授
西南交通大学	于 春	副教授
	曾华燊	教授

# 出版说明

---

随着我国改革开放的进一步深化,高等教育也得到了快速发展,各地高校紧密结合地方经济建设发展需要,科学运用市场调节机制,加大了使用信息科学等现代科学技术提升、改造传统学科专业的投入力度,通过教育改革合理调整和配置了教育资源,优化了传统学科专业,积极为地方经济建设输送人才,为我国经济社会的快速、健康和可持续发展以及高等教育自身的改革发展做出了巨大贡献。但是,高等教育质量还需要进一步提高以适应经济社会发展的需要,不少高校的专业设置和结构不尽合理,教师队伍整体素质亟待提高,人才培养模式、教学内容和方法需要进一步转变,学生的实践能力和创新精神亟待加强。

教育部一直十分重视高等教育质量工作。2007年1月,教育部下发了《关于实施高等学校本科教学质量与教学改革工程的意见》,计划实施“高等学校本科教学质量与教学改革工程”(简称“质量工程”),通过专业结构调整、课程教材建设、实践教学改革、教学团队建设等多项内容,进一步深化高等学校教学改革,提高人才培养的能力和水平,更好地满足经济社会发展对高素质人才的需要。在贯彻和落实教育部“质量工程”的过程中,各地高校发挥师资力量强、办学经验丰富、教学资源充裕等优势,对其特色专业及特色课程(群)加以规划、整理和总结,更新教学内容、改革课程体系,建设了一大批内容新、体系新、方法新、手段新的特色课程。在此基础上,经教育部相关教学指导委员会专家的指导和建议,清华大学出版社在多个领域精选各高校的特色课程,分别规划出版系列教材,以配合“质量工程”的实施,满足各高校教学质量和教学改革的需要。

为了深入贯彻落实教育部《关于加强高等学校本科教学工作,提高教学质量的若干意见》精神,紧密配合教育部已经启动的“高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作”,在有关专家、教授的倡议和有关部门的大力支持下,我们组织并成立了“清华大学出版社教材编审委员会”(以下简称“编委会”),旨在配合教育部制定精品课程教材的出版规划,讨论并实施精品课程教材的编写与出版工作。“编委会”成员皆来自全国各类高等学校教学与科研第一线的骨干教师,其中许多教师为各校相关院、系主管教学的院长或系主任。

按照教育部的要求,“编委会”一致认为,精品课程的建设工作从开始就要坚持高标准、严要求,处于一个比较高的起点上。精品课程教材应该能够反映各高校教学改革与课程建设的需要,要有特色风格、有创新性(新体系、新内容、新手段、新思路,教材的内容体系有较高的科学创新、技术创新和理念创新的含量)、先进性(对原有的学科体系有实质性的改革和发展,顺应并符合21世纪教学发展的规律,代表并引领课程发展的趋势和方向)、示范性(教材所体现的课程体系具有较广泛的辐射性和示范性)和一定的前瞻性。教材由个人申报或各校推荐(通过所在高校的“编委会”成员推荐),经“编委会”认真评审,最后由清华大学出版

社审定出版。

目前,针对计算机类和电子信息类相关专业成立了两个“编委会”,即“清华大学出版社计算机教材编审委员会”和“清华大学出版社电子信息教材编审委员会”。推出的特色精品教材包括:

(1) 21世纪高等学校规划教材·计算机应用——高等学校各类专业,特别是非计算机专业的计算机应用类教材。

(2) 21世纪高等学校规划教材·计算机科学与技术——高等学校计算机相关专业的教材。

(3) 21世纪高等学校规划教材·电子信息——高等学校电子信息相关专业的教材。

(4) 21世纪高等学校规划教材·软件工程——高等学校软件工程相关专业的教材。

(5) 21世纪高等学校规划教材·信息管理与信息系统。

(6) 21世纪高等学校规划教材·财经管理与应用。

(7) 21世纪高等学校规划教材·电子商务。

(8) 21世纪高等学校规划教材·物联网。

清华大学出版社经过三十多年的努力,在教材尤其是计算机和电子信息类专业教材出版方面树立了权威品牌,为我国的高等教育事业做出了重要贡献。清华版教材形成了技术准确、内容严谨的独特风格,这种风格将延续并反映在特色精品教材的建设中。

清华大学出版社教材编审委员会

联系人:魏江江

E-mail: weijj@tup.tsinghua.edu.cn

“算法分析与设计”是一门理论性与实践性结合很强的课程。在信息技术高速发展的今天,计算机技术已经应用到了很多科学领域。从理论上来说,算法研究已经被公认为是计算机科学的基石。David Harel 在他的《算法学:计算精髓》一书中说道:“算法不仅是计算机科学的一个分支,它更是计算机科学的核心。可以毫不夸张地说,它和绝大多数的科学、商业和技术都是相关的。”

近年来,针对大学生的各种类型的程序设计竞赛开展得越来越多,比较常见的有 ACM-ICPC、TopCoder、百度之星、Google 挑战赛、有道难题等。其中 ACM 国际大学生程序设计竞赛(ACM International Collegiate Programming Contest, ACM-ICPC),是历史最悠久、规模最大的竞赛。竞赛题目涉及的知识面广,难度大;主要强调算法的高效性,不仅要解决一个指定的命题,而且必须要以最佳的方式解决指定的命题;涉及知识与大学计算机专业本科以及研究生如程序设计、离散数学、数据结构、人工智能、算法分析与设计等相关课程直接关联,对数学要求很高。

在 ACM 国际大学生程序设计竞赛中,在线裁判系统是开展竞赛的核心,它是一个在线的程序与算法设计的练习和竞赛平台。系统可以提供大量的关于程序和算法设计的题目供学生练习或竞赛,学生可以使用自己熟悉的语言提交相关题目的程序代码,系统编译提交代码,如果没有错误,则生成可执行文件。利用系统的测试用例来测试,如果输出结果正确,则返回程序消耗的内存空间和时间。对于竞赛题目,系统可以从程序正确性、运行总时间、消耗内存空间、返回结果等方面来考查学生提交的代码。系统可以实现在指定的时间段举行竞赛的功能,根据学生解题数目和时间进行排名,也可以批量导出学生代码进行分析。

基于程序设计竞赛的教学模式的优势:

(1) 提供了一个开放的、自主学习的实验环境,在线评测系统通过网络使用,学生可以随时随地地提交程序代码,并可在丰富的程序与算法设计题库中寻找适合自己的题目,训练程序设计能力。

(2) 有效地训练了学生程序设计能力,培养创新型 IT 人才。本课程的学习难点在于如何将常见的算法策略应用到实际的应用环境中。通过在线评测系统的实践训练,让学生熟练掌握常见的算法设计策略,训练学生的创新思维,加深学生对各种算法设计策略的认识,使学生理解算法的意义及精髓,达到学以致用。

(3) 形成了良好的学习氛围,加强了学生之间的交流。使用在线评测系统进行课程考核并举办程序与算法设计竞赛,学生以团队方式参与,可以形成良好的校园竞争和交流的学习氛围;使学生有了在课余时间自主进行本学科知识钻研的机会和环境;也让学生体验团队协作的重要性,为软件项目团队化的合作要求做好准备。

算法分析与设计是面向设计的核心课程,主要通过介绍常见的算法设计策略及复杂性分析方法,培养学生分析问题和解决问题的能力,为开发高效的软件系统及参加相关领域的



研究工作奠定坚实的基础。该课程理论与实践并重,内容具有综合性、广泛性和系统性,是一门集应用性、创造性及实践性为一体的综合性极强的课程。

目前,该课程的教学方法还是以传统的讲解为主,通常只是将经典算法在已有的数学模型和数据结构上解释给学生;在实践环节只是盲目地验证算法,而对该算法的运行效率、测试数据规模以及实际的应用场景则很少考虑。学生的学习则主要以理解和记忆的继承式学习为主,虽然记住了大量的算法理论,但没有“理解”和“消化”,不能灵活运用算法;在实践环节学生代码抄袭严重,很难达到训练的效果。在这种教学模式下,学生缺乏问题抽象能力,在遇到实际问题时无从下手,思维创新能力和实践能力难以得到有效的提高,很难培养出高水平的程序员。

本书利用程序设计竞赛模式和在线评测系统的特点,结合课程特点和实际教学,弥补课程教学中存在的不足,以此探讨算法分析与设计的课程教学改革,培养高水平的编程人才。

本书共分为 8 章。

第 1 章 算法概述:主要是算法的基本概念、算法的复杂性、大学生程序设计竞赛概述和程序设计在线题库的基本情况。

第 2 章 数据结构和标准模板库 STL:主要介绍栈(Stack)、向量(Vector)、映射(Map)、列表(List)、集合(Set)、队列(Queue)和优先队列(Priority Queue),并应用这些 STL 解题:ZOJ1004-Anagrams by Stack,ZOJ1094-Matrix Chain Multiplication,ZOJ1062-Trees Made to Order 和 ZOJ1944-Tree Recovery 等。

第 3 章 递归与分治策略:主要介绍递归算法和分治策略。典型例题有循环赛日程表、棋盘覆盖问题、选择问题和整数因子分解等。

第 4 章 动态规划:主要介绍动态规划算法的基本要素。典型例题有矩阵连乘积、最长公共子序列、最大子段和、0-1 背包问题和最长单调递增子序列等,并求解 ZOJ1013-Great Equipment、Human Gene Functions、To the Max、FatMouse and Cheese 和 Railroad 等问题。

第 5 章 贪心算法:主要介绍贪心算法的理论基础。典型例题有活动安排问题、背包问题、最优装载问题、单源最短路径和最小生成树等,并求解 ZOJ1012-Mainframe、ZOJ1025-Wooden Sticks、ZOJ1076-Gene Assembly 和 ZOJ2109-FatMouse' Trade 等问题。

第 6 章 回溯算法:主要介绍回溯算法的理论基础。典型例题有装载问题、0-1 背包问题、图的  $m$  着色问题、 $n$  皇后问题、旅行商问题和流水作业调度问题等,并求解 ZOJ1145-Dreisam Equations、ZOJ1157-A Plug for UNIX 和 ZOJ1166-Anagram Checker 等问题。

第 7 章 分支限界算法:主要介绍分支限界算法的基本理论,并对回溯算法与分支限界算法进行比较。典型例题有单源最短路径问题、装载问题、0-1 背包问题和旅行商问题,并求解 ZOJ1136-Multiple。

第 8 章 图的搜索算法:主要介绍图的深度和广度优先搜索遍历算法。求解 ZOJ1002-Fire Net、ZOJ1142-Maze、ZOJ1245-Triangles、ZOJ1079-Robotic Jigsaw、ZOJ1217-Eight 和 ZOJ1091-Knight Moves 等问题。

袁鹤、冯志林、吴艳、金献珍、金海溶和曹平老师参加了本书的编写工作。

由于作者水平所限,书中难免有不足之处,恳请广大读者批评指正。作者电子邮件地址:727946579@qq.com。

# 目 录

<b>第 1 章 算法概述</b> .....	1
1.1 引言 .....	1
1.1.1 算法的描述.....	1
1.1.2 算法的设计.....	3
1.2 算法的复杂性 .....	6
1.2.1 时间复杂性.....	6
1.2.2 空间复杂性.....	9
1.3 大学生程序设计竞赛概述.....	10
1.4 程序设计在线测试题库.....	11
<b>第 2 章 数据结构和标准模板库</b> .....	13
2.1 栈.....	13
2.2 向量.....	14
2.3 映射.....	15
2.4 列表.....	17
2.5 集合.....	19
2.6 队列.....	20
2.7 优先队列.....	21
2.8 ZOJ1004-Anagrams by Stack .....	23
2.9 ZOJ1094-Matrix Chain Multiplication .....	25
2.10 ZOJ1011-NTA .....	28
2.11 ZOJ1062-Trees Made to Order .....	33
2.12 ZOJ1097-Code the Tree .....	37
2.13 ZOJ1156-Unscrambling Images .....	40
2.14 ZOJ1167-Trees on the Level .....	45
2.15 ZOJ1016- Parencodings .....	47
2.16 ZOJ1944-Tree Recovery .....	50
2.17 ZOJ2104- Let the Balloon Rise .....	52
上机练习题 .....	54
<b>第 3 章 递归与分治策略</b> .....	56
3.1 递归算法.....	56

3.1.1	Fibonacci 数列 .....	57
3.1.2	集合的全排列问题 .....	58
3.1.3	整数划分问题 .....	59
3.2	分治策略 .....	60
3.2.1	分治法的基本步骤 .....	60
3.2.2	分治法的适用条件 .....	61
3.2.3	二分搜索技术 .....	61
3.2.4	循环赛日程表 .....	62
3.2.5	棋盘覆盖问题 .....	64
3.2.6	选择问题 .....	67
3.2.7	输油管道问题 .....	69
3.2.8	半数集问题 .....	70
3.2.9	整数因子分解 .....	72
3.2.10	取余运算 .....	73
3.3	Big String .....	74
	上机练习题 .....	76
<b>第 4 章</b>	<b>动态规划 .....</b>	<b>77</b>
4.1	矩阵连乘积问题 .....	78
4.1.1	分析最优解的结构 .....	80
4.1.2	建立递归关系 .....	81
4.1.3	计算最优值 .....	81
4.1.4	构造最优解 .....	84
4.2	动态规划算法的基本要素 .....	84
4.2.1	最优子结构 .....	85
4.2.2	重叠子问题 .....	85
4.2.3	备忘录方法 .....	86
4.3	最长公共子序列 .....	87
4.3.1	最长公共子序列的结构 .....	88
4.3.2	子问题的递归结构 .....	88
4.3.3	计算最优值 .....	89
4.3.4	构造最长公共子序列 .....	90
4.4	最大子段和 .....	91
4.5	0-1 背包问题 .....	93
4.5.1	递归关系分析 .....	93
4.5.2	算法实现 .....	94
4.6	最长单调递增子序列 .....	95
4.7	数字三角形问题 .....	96
4.8	ZOJ1013-Great Equipment .....	98

4.9	ZOJ1027-Human Gene Functions	104
4.10	ZOJ1074-To the Max	107
4.11	ZOJ1093-Monkey and Banana	109
4.12	ZOJ1100-Mondriaan's Dream	114
4.13	ZOJ1102-Phylogenetic Trees Inherited	118
4.14	ZOJ1107-FatMouse and Cheese	122
4.15	ZOJ1108-FatMouse's Speed	125
4.16	ZOJ1132-Railroad	129
4.17	ZOJ1147-Formatting Text	134
4.18	ZOJ1149-Dividing	139
4.19	ZOJ1163-The Staircases	143
4.20	ZOJ1183-Scheduling Lectures	145
4.21	ZOJ1196-Fast Food	148
4.22	ZOJ1206-Win the Bonus	152
4.23	ZOJ1227-Free Candies	155
4.24	ZOJ1234-Chopsticks	159
	上机练习题	162
<b>第5章</b>	<b>贪心算法</b>	<b>165</b>
5.1	活动安排问题	165
5.2	贪心算法的理论基础	167
5.2.1	贪心选择性质	168
5.2.2	最优子结构性性质	168
5.2.3	贪心算法的求解过程	168
5.3	背包问题	169
5.4	最优装载问题	172
5.5	单源最短路径	173
5.6	最小生成树	177
5.6.1	最小生成树的性质	177
5.6.2	Prim 算法	178
5.6.3	Kruskal 算法	180
5.7	删数问题	183
5.7.1	问题的贪心选择性质	184
5.7.2	问题的最优子结构性性质	184
5.8	多处最优服务次序问题	185
5.8.1	问题的贪心选择性质	187
5.8.2	问题的最优子结构性性质	187
5.9	ZOJ1012-Mainframe	187
5.10	ZOJ1025-Wooden Sticks	192

5.11	ZOJ1029-Moving Tables .....	194
5.12	ZOJ1076-Gene Assembly .....	197
5.13	ZOJ1161-Gone Fishing .....	199
5.14	ZOJ1171-Sorting the Photos .....	202
5.15	ZOJ2109-FatMouse' Trade .....	204
	上机练习题.....	206
<b>第 6 章 回溯算法.....</b>		<b>207</b>
6.1	回溯算法的理论基础 .....	207
6.1.1	问题的解空间.....	207
6.1.2	回溯法的基本思想.....	207
6.1.3	子集树与排列树.....	210
6.2	装载问题 .....	211
6.3	0-1 背包问题 .....	214
6.4	图的 $m$ 着色问题 .....	216
6.5	$n$ 皇后问题 .....	219
6.6	旅行商问题 .....	221
6.7	流水作业调度问题 .....	223
6.8	子集和问题 .....	226
6.9	ZOJ1145-Dreisam Equations .....	228
6.10	ZOJ1157-A Plug for UNIX .....	233
6.11	ZOJ1166-Anagram Checker .....	238
6.12	ZOJ1213-Lumber Cutting .....	242
	上机练习题.....	246
<b>第 7 章 分支限界算法.....</b>		<b>248</b>
7.1	分支限界算法的基本理论 .....	248
7.1.1	分支限界算法策略.....	248
7.1.2	分支结点的选择.....	249
7.1.3	提高分支限界算法的效率.....	249
7.1.4	限界函数.....	250
7.2	单源最短路径问题 .....	250
7.3	装载问题 .....	254
7.4	0-1 背包问题 .....	258
7.5	旅行商问题 .....	264
7.6	ZOJ1136-Multiple .....	267
7.7	回溯算法与分支限界算法的比较 .....	270
	上机练习题.....	271

第 8 章 图的搜索算法	272
8.1 图的深度优先搜索遍历	272
8.2 ZOJ1002-Fire Net	273
8.3 ZOJ1008-Gnome Tetravex	276
8.4 ZOJ1047-Image Perimeters	280
8.5 ZOJ1084-Channel Allocation	284
8.6 ZOJ1142-Maze	287
8.7 ZOJ1190-Optimal Programs	291
8.8 ZOJ1191-The Die Is Cast	297
8.9 ZOJ1204-Additive Equations	301
8.10 ZOJ1245-Triangles	304
8.11 ZOJ2100-Seeding	307
8.12 图的广度优先搜索遍历	309
8.13 ZOJ1055- Oh, Those Achin' Feet	310
8.14 ZOJ1079- Robotic Jigsaw	317
8.15 ZOJ1085- Alien Security	322
8.16 ZOJ1103- Hike on a Graph	325
8.17 ZOJ1148- The Game	329
8.18 ZOJ1217-Eight	332
8.19 ZOJ1091-Knight Moves	337
上机练习题	342
参考文献	344

# 第 1 章

## 算法概述

算法(Algorithm)是一系列解决问题的清晰指令,代表着用系统的方法描述解决问题的策略机制。算法能够对一定规范的输入,在有限时间内获得所要求的输出。如果一个算法有缺陷,或不适合于某个问题,执行这个算法将不会解决这个问题。不同的算法可能用不同的时间、空间或效率来完成同样的任务。一个算法的优劣可以用空间复杂性与时间复杂性来衡量。算法可以使用自然语言、伪代码、流程图等多种不同的方法来描述。计算机系统里的操作系统、语言编译系统、数据库管理系统以及各种各样的计算机应用系统中的软件,都必须使用具体的算法来实现。算法设计与分析是计算机科学与技术的一个核心问题。

### 1.1 引言

“算法”即演算法,中文名称出自《周髀算经》;而英文名称 Algorithm 来自于 9 世纪波斯数学家 al-Khwārizmī,他在数学上提出了算法这个概念。“算法”原为 algorism,意思是阿拉伯数字的运算法则,在 18 世纪演变为 algorithm。欧几里得算法被人们认为是史上第一个算法。第一次编写程序是 Ada Byron 于 1842 年为巴贝奇分析机编写求解伯努利方程的程序,因此 Ada Byron 被大多数人认为是世界上第一位程序员。查尔斯·巴贝奇(Charles Babbage)未能完成他的巴贝奇分析机,这个算法未能在巴贝奇分析机上执行。

一本早期的德文数学词典 *Vollständiges Mathematisches Lexicon*《数学大全辞典》,给出了 Algorithmus(算法)一词的如下定义:“在这个名称之下,组合了四种类型的算术计算的概念,即加法、乘法、减法、除法。”拉丁短语 *algorithmus infinitesimalis*(无限小方法),在当时就用来表示 Leibnitz(莱布尼茨)所发明的以无限小量进行计算的微积分方法。

1950 年左右,algorithm 一词经常同欧几里得算法(Euclid's algorithm)联系在一起。欧几里得算法就是在欧几里得的《几何原本》(Euclid's Elements,第 VII 卷,命题 i 和 ii)中所阐述的求两个数的最大公约数的过程(即辗转相除法)。

20 世纪的英国数学家图灵提出了著名的图灵论题,并提出一种假想的计算机抽象模型,这个模型被称为图灵机。图灵机的出现解决了算法定义的难题,图灵的思想对算法的发展起到了重要作用。

#### 1.1.1 算法的描述

在 20 世纪 50 年代,欧几里得描述了求两个数的最大公约数的过程,被称为欧几里得算

法。欧几里得算法又称辗转相除法,用于计算两个正整数  $m, n$  的最大公约数。

**步骤 1:** 如果  $m < n$ , 则交换  $m$  和  $n$ 。

**步骤 2:** 令  $r$  是  $m/n$  的余数。

**步骤 3:** 如果  $r=0$ , 则输出  $m$ ; 否则令  $m=n, n=r$  并转向步骤 2。

其计算原理依赖于下面的定理。

**定理:**  $\gcd(m, n) = \gcd(n, m \bmod n)$  ( $m > n$  且  $m \bmod n$  不为 0)。

**算法 1.1** 欧几里得算法

```
int gcd(int m, int n)
{
    if (m < n) gcd(n, m);
    int r;
    do {
        r = m % n;
        m = n;
        n = r;
    } while(r);
    return m;
}
```

欧几里得算法的递归实现:

```
int gcd(int m, int n)
{
    if (m < n) gcd(n, m);
    if (n == 0) return m;
    else return gcd(n, m % n);
}
```

算法设计的先驱者唐纳德·E. 克努特(Donald E. Knuth)对算法的特征做了如下描述。

### 1. 有穷性(Finiteness)

算法在执行有限步之后必须终止。

在算法 1.1 中,对输入的任意正整数  $m, n(m > n)$ ,令  $r$  是  $m/n$  的余数,经过辗转相除,从而使  $m$  和  $n$  变小。如此往复进行,最终使  $r$  为 0,算法终止。

### 2. 确定性(Definiteness)

算法的每一步骤必须有确切的定义。

算法的每一个步骤,都有精确的定义。要执行的每一个动作都是清晰的、无歧义的。在算法 1.1 中,如果  $m$  和  $n$  是无理数,那么  $m$  除以  $n$  的余数是什么,就没有一个明确的界定。欧几里得算法规定了  $m$  和  $n$  都是正整数,从而保证了算法能够确定的执行。

### 3. 输入(Input)

一个算法有 0 个或多个输入,作为算法开始执行前的初始值,或初始状态。所谓 0 个输



人是指算法本身给出了初始条件。

算法 1.1 中有两个输入  $m$  和  $n$ , 都是正整数。

#### 4. 输出项(Output)

一个算法有一个或多个输出, 以反映对输入数据加工后的结果。没有输出的算法是毫无意义的。算法 1.1 中的输出是输入  $m$  和  $n$  的最大公约数。

#### 5. 可行性(Effectiveness)

在有限时间内完成计算过程。

算法 1.1 用一个正整数来除另一个正整数, 判断一个整数是否为 0 以及整数赋值等, 这些运算都是可行的。因为整数可以用有限的方式表示, 所以至少存在一种方法来完成一个整数除以另一个整数的运算。

必须注意到, 在实际应用中, 有限性的限制是不够的。一个实用的算法, 不仅要求步骤有限, 同时要求运行这些步骤所花费的时间是人们可以接受的。如果一个算法需要执行数万亿计数的运算步骤, 从理论上说, 它是有限的, 最终可以结束。但是, 以当代计算机每秒数亿次的运算速度, 也必须运行数百年以上, 这是人们所无法接受的, 因而它是不实用的算法。

### 1.1.2 算法的设计

算法设计的整个过程, 可以包含对问题需求的说明、数学模型的拟制、算法的详细设计、算法的正确性验证、算法的实现、算法分析、程序测试和文档资料的编制。

计算机科学家尼克劳斯·沃思曾著过一本著名的书《数据结构+算法=程序》, 可见算法在计算机科学界与计算机应用界的地位。

同一问题可用不同算法解决, 而一个算法的质量优劣将影响到算法乃至程序的效率。算法分析的目的在于选择适用算法和改进算法。一个算法的评价主要从时间复杂性和空间复杂性来考虑。

算法可大致分为基本算法、数据结构的算法、数论与代数算法、计算几何的算法、图论的算法、动态规划以及数值分析、加密算法、排序算法、检索算法、随机化算法和并行算法。算法大致分为以下三类。

(1) 有限的、确定性算法。这类算法在有限的一段时间内终止。它们可能要花很长时间来执行指定的任务, 但仍将在一定的时间内终止。这类算法得出的结果常取决于输入值。

(2) 有限的、非确定算法。这类算法在有限的时间内终止。然而, 对于一个(或一些)给定的数值, 算法的结果并不是唯一的或确定的。

(3) 无限的算法。指那些由于没有定义终止定义条件, 或定义的条件无法由输入的数据满足而不终止运行的算法。通常, 无限算法的产生是由于未能确定地定义终止条件。

经典的算法有很多, 这里主要列举以下算法。

#### 1. 穷举搜索法

穷举搜索法(Exhaustive Search Algorithm)是对可能是解的众多候选解按某种顺序进