高等院校精品课程系列规划教材·高等数学

大学数学配套辅导书

概率论与数理统计
学习指南及习题全解

吕 丹 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等院校精品课程系列规划教材·高等数学

大学数学配套辅导书

概率论与数理统计
学习指南及习题全解

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指南及习题全解/吕丹主编.
—杭州：浙江大学出版社，2012.2
ISBN 978-7-308-09566 2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①吕… Ⅲ.①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 007796 号

概率论与数理统计学习指南及习题全解

吕　丹　主编

责任编辑　张　鸽(zgzup@zju.edu.cn)
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　杭州日报报业集团盛元印务有限公司
开　　本　880×1230　1/32
印　　张　8.5
字　　数　245 千
版 印 次　2012 年 2 月第 1 版　2012 年 2 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-09566-2
定　　价　24.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

前　言

概率论与数理统计是科研人员必须具备的基础知识，但是概率论与数理统计又是一门高度抽象难学的课程．为了使广大学者能够充分有效地提高学习效率，根据《概率论与数理统计》（第二版）（普通高等学校“十一五”国家级规划教材，王明慈、沈恒范等主编，高等教育出版社出版），特编写了此配套辅导书．此书主要内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、正态分布、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析和阶段测验．内容选编既丰富全面又精练扼要，理论叙述既注重概念表达的科学性，又注重理论知识的实用性．意在通过学习要求的简介、主要内容的概述、典型题例的演示、课后习题的全解和每章阶段测验的巩固，达到初步建立数学思想，逐渐掌握概率论与数理统计方法，了解必要概率论与数理统计知识，提高解题能力之目的．

本教材的特点为精练实用，既注重理论又联系实际，既注意内容的广度和系统性，又兼顾知识的深度和科学性，力求形式新颖，深入浅出．

阶段测验为可撕下的试卷，既可以作为平时练习，也可以作为期末考试内容范围、题型题量和学习重点的依据和参考．

各章具体执笔分别是第一章胡晓晓老师，第二章刘婷老师，第三章和第四章吕丹老师，第五章鲁胜强老师，第六章吕丹老师，第七章韩艳敏老师和王利超老师，第八章和第九章韩艳敏老师．

全书由吕丹老师和韩艳敏老师统稿，期间还得到了广大专家教授的指点，参考了大量的资料文献，在此一并向有关专家教授致以诚挚的谢意.

本书既可以作为概率论与数理统计的教学参考书，也可以作为科研人员进修提高的学习辅导资料.

由于任务艰巨，时间紧迫，如有疏漏不妥之处，敬请各位读者批评指正.

编　者

2012 年 1 月

目 录
CONTENTS

第一章 随机事件及其概率

一、学习要点

1. 了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，掌握事件之间的关系与基本运算.

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，学会计算古典概率，掌握概率的加法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes) 公式.

3. 理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算的方法，理解伯努利模型的概念，掌握有关事件概率的计算方法.

二、主要内容

1. 随机试验与随机事件

为了研究随机现象的统计规律，我们把各种科学试验和对某一事物的观测统称为**试验**.

在概率论中将具有以下特点的试验称为**随机试验**(简称试验)：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验的所有可能结果都是明确可知的，并且不止一个；

(3) 每次试验之前不能预知会出现哪一个结果.

通常用字母 $E,E_1,E_2,\cdots$ 表示随机试验.

在试验的结果中，可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**，通常用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 在每次试验的结果中，如果某事件一定发生，则称为**必然事件**；相反，如果某事件一定不发生，则称为**不可能事件**.

2. 样本空间

随机试验的每一个可能的结果称为**样本点**，记为 $\omega_1,\omega_2,\cdots$；随机试验的所有样本点组成的集合称为**样本空间**，记为 Ω，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots\}$.

任一随机事件 A 都是样本空间 Ω 的一个子集；必然事件 A 就等于样本空间；不可能事件是不包含任何样本点的空集，不可能事件记为 $\varnothing$. 基本事件就是仅包含单个样本点的子集.

3. 事件的关系及运算

设试验 E 的样本空间为 Ω，A 和 B 都是 Ω 的子集.

(1) 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记住 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

(2) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 其意义是指事件 A 与事件 B 中所包含的样本点完全相同.

(3) 若两个事件 A 与 B 中至少有一个事件发生所构成的新事件称为事件 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$.

(4) 若两个事件 A 与 B 同时发生所构成的新事件称为事件 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$ 或 AB.

(5) 若两个事件 A 与 B 不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的(互斥的)；

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件不可能同时发生，即 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n)$，则称这 n 个事件是互不相容的(互斥的)；

若可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中任意两个事件不可能同时发生，则称这些事件是互不相容的(互斥的)；

两个互不相容事件 A 与 B 的并记作 $A+B$；

把 n 个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ (简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$)；

把可列无穷多个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的并记作

$$A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots\ (\text{简记为}\sum_{i=1}^{\infty}A_i).$$

(6) 若两个互不相容事件 A 与 B 中必有一个事件发生，即 $AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$，则称事件 A 与 B 是对立的，即事件 A 与事件 B 是互为对立事件(逆事件)，记为

$$B=\overline{A} \text{或} A=\overline{B}.$$

A 的对立事件记为 $\overline{A}$，$A+\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\varnothing$，$A=\overline{\overline{A}}$.

(7) 事件满足以下运算规律：

① 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

② 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$(AB)C=A(BC)$；

③ 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$，$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$；

④ 德摩根(De Morgan) 定律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

4. 随机事件的频率与概率的定义及性质

设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 n_A 次，则比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为随机事件 A 发生的频率，记作 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

概率的公理化定义：设试验的样本空间为 Ω，对于任一随机事件 $A(A\subset\Omega)$，都有确定的实值函数 $P(A)$，满足下列性质：

① 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

② 规范性：$P(\Omega)=1$；

③ 有限可加性：对于 n 个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有 $P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$；

④ 可列可加性：对于可列无穷多个互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots$，有 $P(\sum_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$，则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

概率有以下重要性质：

性质 1：不可能事件发生的概率等于零，即 $P(\varnothing)=0$；

性质 2：对于对立事件 A 与 $\overline{A}$，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$；

性质 3：若事件 A 包含于事件 B，即 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$；

性质 4：对于任一随机事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$；

性质5：对于任意两个随机事件 A 与 B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

5. 古典概型

设随机试验 E 具有下列两个特征：

(1) 试验的基本事件只有有限个(即样本空间只有有限个样本点)，不妨设为 N 个 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N$；

(2) 各个基本事件发生的可能性相等，即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_N)$，则称这种概率模型为古典概型.

设在古典概型中，试验的基本事件的总数为 N，随机事件 A 包含其中的 M 个基本事件，则随机事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{M}{N}.$$

6. 条件概率

设 A 与 B 是两个随机事件，若 $P(B)>0$，则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 A 在事件 B 发生的条件下的条件概率.

7. 概率乘法公式

设 A,B 为两个随机事件，若 $P(B)>0$，则事件 A 与事件 B 的交的概率为

$$P(AB)=P(B)P(A|B);$$

若 $P(A)>0$，也有 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

上述公式称为概率乘法公式.

8. 全概率公式与贝叶斯公式

设样本空间为 Ω，而 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 n 个互不相容事件，且

$$\sum_{i=1}^{n}B_i=\Omega,\ P(B_i)>0\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

则对任一随机事件 A，有

① $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$ 称为全概率公式.

② $P(B_i|A)=\dfrac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，称为贝叶斯(Bayes)公式.

9. 随机事件的独立性

对任意两个随机事件 A 与 B，若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 是**相互独立的**(简称独立的).

设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 3)$，若其中任意两个事件 A_i 与 $A_j(1\leqslant i<j\leqslant n)$ 有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),$$

则称这 n 个事件是**两两独立的**.

设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 3)$，若其中任意 k 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_k}(2\leqslant k\leqslant n)$ 有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik}),$$

则称这 n 个事件是**相互独立的**.

若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 3)$ 相互独立，则这 n 个事件一定是两两独立的；反之，却不一定成立.

由定义，得到下列两个定理.

定理 1－1：若事件 A 与 B 相互独立，则下列各对事件

$$A 与 \overline{B},\overline{A} 与 B,\overline{A} 与 \overline{B}$$

也相互独立.

定理 1－2：设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

10. 伯努利概型

将随机试验 E 重复进行 n 次，若各次试验的结果互不影响，即每次试验结果出现的概率都不依赖于其他各次试验的结果，这样的试验称为 ***n* 重独立试验**.

若在 n 重独立试验中，每次试验的结果只有两个，即 A 与 $\overline{A}$，且 $P(A)=p,P(\overline{A})=q$ $(0<p<1,p+q=1)$，则这样的试验称为**伯努利(Bernoulli)试验或伯努利概型**.

在伯努利概型中,设事件 A 在各次试验中发生的概率 $P(A)=p\quad(0<p<1)$,则在 n 次独立试验中恰好发生 k 次的概率为 $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\,(p+q=1,k=0,1,2,\cdots,n)$,此公式为**二项概率公式**.

三、典型题例

例 1-1 设 A,B,C,D 是四个事件,用 A,B,C,D 的运算来表示下列事情:

(1) D_1:"A,B,C,D 至少有一个发生";

(2) D_2:"A,B 均发生,C,D 至少有一个发生";

(3) D_3:"A,B,C 至多有一个发生,D 不发生";

(4) D_4:"A,B 中恰有一个发生,C,D 至少有一个不发生";

(5) D_5:"A,B,C 中至少一个不发生,D 不发生".

解题提示 将复杂事件用简单事件通过运算来表示,是计算复杂事件概率的关键.首先我们要弄清楚所给随机试验有哪些简单事件,所求复杂事件是由哪些基本事件复杂而成的;其次分析复杂事件与这些简单事件之间的关系;最后利用事件间的关系所对应的运算及事件的运算律,将复杂事件用简单事件表示出来.

解:(1) 利用事件的并的定义:$D_1=A\cup B\cup C\cup D$;

(2)"C,D 至少有一个发生"即为 $C\cup D$,同时 A,B 均发生,因此

$$D_2=AB(C\cup D);$$

(3)"A,B,C 至多有一个发生",即 A,B,C 中恰有一个发生或者 A,B,C 都不发生,且"D 不发生",因此

$$D_3=(A\overline{BC}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\overline{D};$$

(4)"A,B 中恰有一个发生",可以是恰有 A 发生,也可以是恰有 B 发生,故可表示为$(A\overline{B}\cup\overline{A}B)$;且"$C,D$ 至少有一个不发生",因此

$$D_4=(A\overline{B}\cup\overline{A}B)(\overline{C}\cup\overline{D})\text{ 或 }D_4=(A\overline{B}\cup\overline{A}B)(\overline{CD});$$

(5)"A,B,C 中至少一个不发生"即为 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$,且"$D$ 不发生"因此

$$D_5=(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})\overline{D}\text{ 或 }D_5=(\overline{ABC})\overline{D}.$$

评注 容易犯的错误是：误以为$\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{ABC}=\overline{AB}\,\overline{C}$，实际上$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$＝"$A,B$至少有一个不发生"；$\overline{A}\,\overline{B}$＝"$A,B$都不发生"；$\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$＝"$A,B,C$至少有一个不发生"；$\overline{AB}\,\overline{C}$＝"$A$，$B$至少有一个不发生，$C$不发生".

例 1-2 盒中装有3个黑球，2个白球，从中不放回地依次任取3个球，求事件A"刚好取到1个白球"的概率.

解题提示 这是一道古典概型问题.根据古典概率的定义，我们需要求出基本事件的总数和所求随机事件所包含的基本事件数.

解：从5个球中不放回地取3个球，共有C_5^3种不同的取法，即基本事件的总数为C_5^3，设a_i为黑球，b_i为白球，则事件A的样本点可以列举出来，

$A=\{(a_1,a_2,b_1),(a_1,a_3,b_1),(a_2,a_3,b_1),(a_1,a_2,b_2),(a_1,a_3,b_2),(a_2,a_3,b_2)\}$，

共有$C_2^1C_3^2=6$个基本事件构成，所以其概率为

$$P(A)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}.$$

评注 这个问题的一般问法为：盒中有a个黑球，b个白球，从中一次任取n个球，求事件A"刚好取到$k(0\leqslant k\leqslant \min\{b,n\})$个白球"的概率；$P(A)=\dfrac{C_a^{n-k}C_b^k}{C_{a+b}^n}$. 推广到更一般的情况，盒中有$a$个黑球，$b$个白球，$c$个红球，从中一次任取$n$个球，则事件$A$"刚好取到$i$个黑球，$j$个白球"$(0\leqslant i\leqslant \min\{a,n\},0\leqslant j\leqslant \min\{b,n\})$的概率为$P(A)=\dfrac{C_a^iC_b^jC_c^{n-i-j}}{C_{a+b+c}^n}$. 这里我们要注意：不放回地依次抽取$n$个球和一次抽取$n$个球实质是一样的.

例 1-3 设有3个人，每个人的生日在12个月中任何一个月份的概率是相同的，求下列事件的概率：

A："一月有1个人，二月有2个人生日"；

B："3个人的生日恰巧在两个月".

解题提示 这是一道古典概型问题.

解：3个人的生日在12个月中的取法构成一个基本事件，每个

人的生日都有 12 种取法，因此 3 个人共有12^3 种取法，即基本事件的总数是：$N = 12^3$.

事件 A：“一月有 1 个人，二月有 2 个人生日”，由 $C_3^1 = 3$ 个基本事件构成，所以

$$P(A) = \frac{3}{12^3} = 0.001736.$$

事件 B：“3 个人的生日恰巧在两个月”，因为是 12 个月中的任意 2 个月，所以有 C_{12}^2 种选法. 3 个人的生日在两个月的任何一个月份是等可能的，但 3 个人的生日不能在某一个月份，即有$(2^3 - 2)$ 种取法，故事件 B 由 $C_{12}^2(2^3 - 2)$个基本事件组成，所以

$$P(B) = \frac{C_{12}^2(2^3 - 2)}{12^3} = 0.229.$$

评注 这个例子是古典概型中很典型的问题，许多问题可以归结为上述的模型. 例如把 n 个球放入到 N 个盒子中$(n \leqslant N)$，每个球都以同样的概率$\frac{1}{N}$ 落入 N 个盒子中；

事件 A：“指定的 n 个盒子每个盒子各放 1 个球”；

事件 B：“任意 n 个盒子中每个盒子各有 1 个球”；

事件 C：“某指定的一个盒子中刚好有 k 个球”.

仿照例 1－3，每种放法是一个基本事件，n 个球放入到 N 个盒子中$(n \leqslant N)$，就有 N^n 种不同的放法，基本事件的总数是 N^n.

事件 A：“指定的 n 个盒子每个盒子各放 1 个球”，就是将 n 个球在指定的 n 个盒子中全排列，有 $n!$ 种，即事件 A 由 $n!$ 个基本事件构成，所以 $P(A) = \frac{n!}{N^n}$.

事件 B：“任意 n 个盒子中每个盒子各有 1 个球”，因为是任意的 n 个盒子，所以就有 C_N^n 种选法，要把 n 个球放入选出的 n 个盒子中，就有 $n!$ 种放法，因此事件 B 由 $C_N^n \cdot n!$ 个基本事件构成，所以 $P(B) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}$.

事件 C：“某指定的一个盒子中刚好有 k 个球”，这 k 个球应是 n 个球中任意 k 个，有 C_n^k 种选法. 这 k 个球选定后，其余的$(n-k)$ 个球只

能在其余的$(N-1)$个盒子中任意地放，就有$(N-1)^{(n-k)}$种放法，所以事件C共有$C_n^k(N-1)^{(n-k)}$个基本事件．所以

$$P(C)=\frac{C_n^k(N-1)^{(n-k)}}{N^n}.$$

例 1-4 从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子中至少有两只配对一双的概率是多少？

解题提示 在古典概率的计算中，我们还必须学会充分利用概率的一些性质，把复杂事件的概率计算化为简单事件的概率计算，例如，在计算事件A的概率时，我们可以先想一下对立事件$\overline{A}$的概率$P(\overline{A})$是不是更容易计算，如果$P(\overline{A})$计算更加方便，就可以先计算$P(\overline{A})$，再利用对立公式$P(A)=1-P(\overline{A})$得到$P(A)$．试验E：从5双不同的鞋子中任取4只．我们用A表示事件"所取4只鞋子中至少有两只配成一双鞋子"，则$\overline{A}$就表示"所取4只鞋子无配对的"．显然计算$P(\overline{A})$比较方便．

解： 从10只鞋子中任取4只，共有C_{10}^4种取法，则基本事件的总数是$N=C_{10}^4=210$．接下来我们求$\overline{A}$的基本事件个数M，我们先从5双鞋子中任取4双共有C_5^4种取法，再从取出的每双鞋子中各取1只，因为每一双都有2种取法，所以共有2^4种取法，所以$M=2^4\cdot C_5^4=80$．因此

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{2^4\cdot C_5^4}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

还有一种方法：

我们考虑4只鞋子是按一定次序一只一只取出的，从10只鞋子中任取4只共有$10\times9\times8\times7$种取法，则基本事件的总数是$N=10\times9\times8\times7$．接下来我们求$\overline{A}$的基本事件个数$M$，第一只鞋子任意取，共有10种取法；第二只鞋子则只能在剩下的9只中取，但要除去与已取的第一只配对的那只鞋子，因此只能在8只鞋子中任取，就有8种取法；同样道理第三只鞋子有6种取法；第四只鞋子有4种取法．所以$M=10\times8\times6\times4$．因此

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}.$$