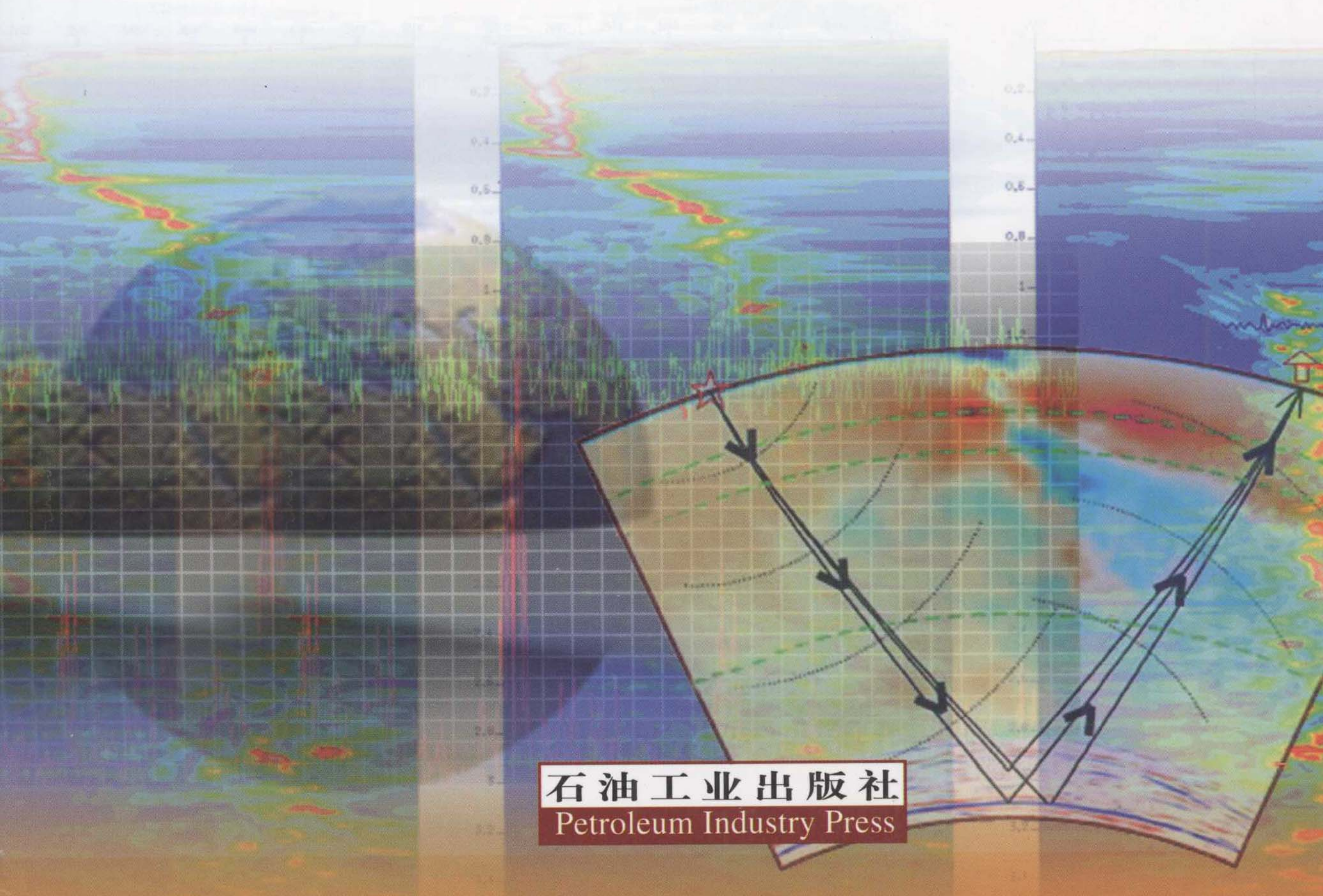
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等院校石油天然气类规划教材

地震波动力学基础

孙成禹　李振春　主编

杜世通　主审



石油工业出版社
Petroleum Industry Press

地震波动力学基础

孙成禹　李振春　主编

杜世通　主审

石 油 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书内容以讲述理想介质中的地震波理论为主，首先回顾了数学场论的基础知识，简明扼要地讲述了有关弹性理论的基本概念和基本定律；在此基础上，导出了理想介质中的波动方程，讨论了不同类型波的传播规律，阐述了地震波在介质分界面上的反射和透射问题以及地震面波的主要特点，对波动方程的积分解及其应用基础进行了初步介绍；最后还对复杂介质中的波动问题作了简要介绍。本书以基本概念和基本理论为出发点，叙述通俗易懂，对问题的阐述提纲挈领，简洁明了。

本书是为地球物理勘探类专业本科生学习地震波动力学基础理论而编写的教材，可供地球物理勘探及相关专业的高年级本科生、研究生及科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

地震波动力学基础/孙成禹，李振春主编．
北京：石油工业出版社，2011.4
（普通高等教育“十一五”国家级规划教材·高等院校石油天然气类规划教材）
ISBN 978-7-5021-8266-3

Ⅰ．地…
Ⅱ．①孙…②李…
Ⅲ．地震波—波动力学—高等学校—教材
Ⅳ．P315．3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 017756 号

出版发行：石油工业出版社
（北京安定门外安华里 2 区 1 号　100011）
网　址：www.petropub.com.cn
编辑部：（010）64523612　发行部：（010）64523620
经　销：全国新华书店
印　刷：石油工业出版社印刷厂

2011 年 4 月第 1 版　2011 年 4 月第 1 次印刷
787×1092 毫米　开本：1/16　印张：12.75
字数：325 千字

定价：20.00 元
（如出现印装质量问题，我社发行部负责调换）

前　　言

地震波动力学是研究地震波在地球介质中的产生和传播规律的一门学科，国内外众多高校的地球物理类本科专业都将其列为必修课，它在地震学研究、矿产勘探、建筑工程、海洋勘测以及爆破技术等众多领域都有着广泛的应用。本课程的主要任务是在弹性理论的基础上，通过分析介质的受力与变形的静态和动态关系，研究机械振动在地球介质中的运动形式和能量传播规律。

在勘探地震学领域，自20世纪80年代初以来，随着地震偏移成像和烃类直接检测等技术的发展，对地震信息的利用不断深化，从单纯利用走时信息研究构造，发展到综合运用走时、能量和波形等多种信息研究岩性和含流体情况。地震技术也逐渐从勘探领域渗透到开发领域。在这种形势下，地震波动力学理论成为科技工作人员学习和研究地震新方法新技术的有力工具，学习地震波动力学理论也越来越受到人们的重视。本书就是在我国高等教育改革和发展规划纲要的指导下，结合目前地震勘探技术的现状，在原有相关教材的基础上通过整合、修订、完善而成的。本教材2006年被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

作为本科生学习地震波动力学基础的教材，本书在内容的选取上以理想介质地震波理论为主，仅在第七章对复杂介质作简要介绍。层状介质中波动方程的求解重点介绍法向入射的情况，对倾斜入射只介绍思路。为方便学生在学习时参考，在第一章加入了数学场论的一些基础知识。在第二章讲授弹性理论时尽量突出推理的逻辑性和语言的通俗性。在每一章后都附有一定数量的复习思考题和少量上机编程训练，供学生课后练习和教师检查使用。考虑到本科生学习的实际情况，这些思考题不作为对学生的具体要求。全书以波动方程的建立和求解为主线，从通解到定解，从微分理论到积分理论，从理想介质到复杂介质，由易到难，思路清晰，便于学生学习。

讲完本书的全部内容约需75学时左右。根据目前各高校本课程大多安排60学时的实际，在使用本书时，教师可以根据具体情况进行选择讲授，其余部分可供学有余力的学生课下自学。

在本书的编写过程中，参考了大量的国内外相关著作。为了照顾到教材的完整性，作者对文献中的许多内容都进行了修正，也有一些章节进行了重新推

导，其目的是为了理清思路，方便阅读。编写过程中参考的文献内容未能在书中具体位置标出的，一并列入书后参考文献中。在此谨向这些文献的作者表示衷心的感谢！本书的编写一直以来都得到了国内外专家学者的热情关心和指导，在此谨表示诚挚的谢意！

本书由中国石油大学（华东）孙成禹教授和李振春教授主编，由杜世通教授主审并协助确定了教材的内容。孙成禹教授编写了绪论和第二、四、五、六、七章；李振春教授编写了第一章；东北石油大学王云专教授编写了第三章。全书由孙成禹教授完成统稿和定稿。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处。欢迎广大读者及专家同仁予以指正，以便我们不断修正错误，汲取经验，使本书进一步完善和提高。

编　者

2010 年 9 月

目　　录

绪　论

第一节　弹性介质与弹性波

自然界中的物体，根据它们对外力作用的反应，可以划分为刚体、弹性体和塑性体。一个物体在外力作用下发生平移或转动，并且可沿着力的作用方向无畸变地传递力的作用，称为刚体。当一个物体受到外力作用时，在它的内部质点间发生位置的相对变化，从而使其形状改变，称为应变。处于应变状态的物体，为了抵抗外力，保持其平衡状态，在内部质点间产生内力作用。内力在单位面积上的强度称为应力。此时物体处于应力应变状态。有些物体，当外力作用取消后，应力应变状态立刻消失，并恢复物体的原有形状，这类物体称为弹性体。有些物体，当外力作用停止后，不能完全恢复其原有形状，而保留一定的形变，这类物体称为塑性体或不完全弹性体。

自然界中不存在绝对的刚体，经典力学中的刚体力学理论都是对实际介质受力情况的一种近似，其基本条件是物体在受力状态下的形变可以忽略不计。同样，绝对的弹性介质在自然界中也是没有的。介质表现为弹性还是塑性，通常也不是一个绝对的概念。一般而言，如果介质所受的外力作用较小，且外力的作用时间较短，则物体通常表现为弹性；若介质所受的外力作用较大，超出了其弹性限度，或外力的作用时间较长，则物体通常表现为塑性。

弹性物体处于未形变的自然状态时，内部各质点在相互作用之下处于相对平衡位置，此时其能量最低。如果其中某个质点因受到扰动或外力作用而产生了附加的能量，就会打破原有的平衡，该质点就会偏离平衡位置，与其相邻的质点之间发生相对位置变动。为了维护其自身的平衡，质点之间就要产生附加内力。应力使该质点在其平衡位置附近振动，又引起周围质点发生位移和振动，于是振动就会在弹性体内逐渐由近及远地传播开来，并伴有能量的传递。在振动所到之处，位移、应变及应力都会发生变化。由于扰动或外力作用而引起位移、应变及应力在弹性体内的传播过程，就形成了弹性波。

人们对弹性理论的研究工作已有数百年的历史。其中，最重要的发展标志是 19 世纪 20 年代初法国力学家、工程师纳维尔（C. L. M. H. Navier，1821）提出了弹性体平衡和运动方程。这一弹性体运动理论的创立大大推动了弹性动力学和弹性波问题的研究，经过近两个世纪的发展，至今已形成了数学上非常严密和完善的理论体系和方法，研究方向也逐渐从均匀、各向同性、完全弹性、纯固相介质中波的分析转向对非均匀、各向异性、粘弹性、双相介质的研究。弹性理论对地震科学、地球物理学、声学、光学及材料等工程和科学的发展产生了较大的影响，并成为这些学科的重要组成部分。

第二节　地球介质与地震波

组成地层的各种岩石具有不同的物理性质，因而不同岩石、地层对地面的各种仪器就有不同的作用（响应）。用专门的仪器设备观测和研究天然存在或人工形成的物理场的变化规

律，为达到查明地质构造、寻找矿产资源、解决工程地质、水文地质和环境监测等问题为目的的勘探，就是地球物理勘探，简称物探。根据记录的地球物理场类别的不同，可以分为重力勘探、磁法勘探、电法勘探、放射性勘探和地震勘探等不同的物探方法。其中，地震勘探是目前在石油天然气等矿产资源勘探及工程勘察领域使用最普遍的物探方法。

地球介质的构造是十分复杂的，地壳一般不能视为弹性体。例如，在较深部位，岩石所受的围压大、温度也高，表现出明显的塑性和粘性形变性质；岩石在漫长的地质时期内，即使应力保持不变，其形变也会随时间的增长而不断增加。但是，在短时间外力作用下，离外力作用地点（例如地震勘探中的人工爆炸点）较远处，可以把地层近似地看成是弹性物体。实践表明，这种近似性还是很好的。因此，有关地层中的地震波问题就可以用弹性波理论来研究和解释。在地层中按弹性波规律传播的地震波，遇到界面、断层时会发生反射和透射现象，根据反射透射的结果，可以探索地球内部的构造情况、探测地下矿藏的位置等。

地震勘探就是利用人工方法激发的地震波，研究地震波在地层中传播的规律，以查明地下的地质构造，从而确定矿藏（包括油气、矿石、水、地热资源等）的位置，以及获得工程地质信息的一种勘探方法。地震波就是由震源激发的机械振动在地下岩层中向四周传播的运动过程，它所利用的是岩石、矿物（地层）之间的弹性差异引起的弹性波场的变化。通常情况下，地下岩层被看做是弹性体，而地震波也被看做是在弹性介质中传播的机械波。

在地震勘探中，震源给地球介质岩层施加外力，使之发生形变。这里既可能发生弹性应变，也可能发生使岩石破碎、永久形变的非弹性应变。哪种形变的形式占优势，这决定于一系列因素，其中主要的是震源作用力的大小、作用时间的长短和岩石的性质。一般来说，远离震源处，震源作用力微小，作用时间短暂，除了一些特殊岩相（如干沙）外，岩石均表现出弹性性质。因此，在岩石中产生的机械振动可以看成是弹性介质中的弹性振动，地震波可以看成是在岩层中传播的弹性波。弹性理论是研究弹性波的基础，也是学习和研究地震波传播规律的理论基础。在本书的讨论中，都将地球介质看做是完全弹性的介质，因而在叙述中对地震波和弹性波的称谓不加严格区分。

地震波的特性既与震源特性有关，也与弹性体的性质有关。研究地震波特性与震源特性的关系问题，称为地震波的激发问题。不考虑震源与波的相互关系，只考虑弹性体性质对波特性的影响问题，称为地震波的传播问题。

目前，地震勘探的大部分工作都是在沉积岩地区进行的。沉积岩地区相对于火成岩、变质岩地区来说具有沉积稳定、岩性横向变化缓慢、成层性好等特点，但是，它们也经受了长时期的地壳运动，使地层出现各种各样的褶皱、断裂、剥蚀、风化等现象，致使相对简单的地质介质有时变得十分复杂。为此，有必要从实际地质介质的性质、结构、形状等特征出发，在各种不同的条件下作相应的理想化，以求得物体的简化。

第三节　弹性理论的基本假设

如前所述，弹性理论是研究弹性波（包括地震波）的基础。作为一门基础学科，要探讨事物的一般性规律，就需要抓住事物的本质方面而忽略一些次要因素，把实际事物理想化，进行科学抽象，这样就不能离开以实践为依据的假设。经典的线性弹性理论对所研究的物体及其形变特征所作的基本假设有以下六项。

一、物体是连续的

此项假设即假定构成物体的介质在物体所占形体内是没有空隙而连续分布的。因此，物体内的位移、应变及应力等力学量都可以是空间坐标的连续函数。在弹性理论中，它们还可以是时间的连续函数。由于在形变过程中介质都是连续的，所以形变后物体内的质点与形变前物体内的质点是一一对应的。

实际上，构成物体的材料都是由分子组成的。由于分子的大小及分子间的距离与物体的尺寸相比是很微小的，所以连续性假设就不会引起显著的误差。对于物体中的“质点”，应把它理解为仍然包含着大量分子的一个物质微元，从而能对其中分子运动进行统计平均以得到表征微元宏观现象的力学量；另一方面，此微元的尺度比所研究问题的宏观尺度要充分小，以至可以把微元内每种力学量都看成是均匀分布的常量，数学上才能把此微元当做一个点来处理。

二、物体是线性弹性的

此项假设即假定物体是完全弹性的，物体受到外力后会产生形变，卸除外力后物体就完全恢复原状，应力与应变之间是单值对应关系；同时，还假定应力与应变之间呈线性关系，即在简单受力的试验条件下材料服从虎克定律。应力与应变之间呈线性关系的弹性体称为线性弹性体。

三、物体是均匀的

此项假设即假定物体是由同一种均匀材料构成的。因而，物体内各点处材料的力学性质都是相同的，即表征材料性质的量，如密度、弹性模量及泊松比等，都是与空间坐标无关的常数。

实际上，一个物体内的材料不一定都是均匀的，但在差别不大时就可以认为是均匀的。在讨论地层中的弹性波时，可以把地层视为层状结构。不同地层是由不同材料构成的，而同一地层可以认为是由同一种均匀材料构成的。

四、物体是各向同性的

此项假设即假定物体内每一点处所有方向的力学性质都是相同的。不具备这种性质的物体是各向异性的。对某一种材料来说，它是由细小的晶粒所组成的，但由于晶粒细小而且各个晶粒方向是杂乱无章的，按材料的平均性质可以认为是各向同性的。对于有些材料，尤其是某些岩体，具有明显的非均匀性和各向异性，此时，第三、四两项假设不再适用，而应该根据实际情况加以研究。

凡符合以上四项假设的物体，称为理想弹性体。弹性理论通常限于讨论均匀各向同性完全弹性的理想介质。但随着地震波理论研究的不断深入，目前的研究范围已经扩展到非均匀介质、各向异性介质、粘弹性介质和孔隙介质等复杂介质。本书主要讨论理想介质中地震波的传播特点，仅在第七章对复杂介质中波的传播问题作简要介绍。

五、物体的位移和应变都是微小的

此项假设即假定物体形变时，其内部各点的位移都远小于物体原来的尺度，因而引起的

弹性体内线段长度、截面面积、单元体体积的变化都很小，单元体内各截面上平面角的角度改变量也很小。应用这项假设可以使问题得到很大的简化。首先，应变与应力在弹性体内各点处一般是不相同的，所以它们都是位置点坐标的函数。但是，形变是相对于未形变的自然状态而言的，而应力则是与形变后的状态相联系的。因此，直观地说，应变是点在形变前坐标（x，y，z）的函数，应力是点在形变后坐标（x'，y'，z'）的函数，在这项小形变假设下，此种区别就是非本质的，因为应力在形变前点的位置（x，y，z）之值与在形变后点的位置（x'，y'，z'）之值的差比起应力自身的值要小得多。所以，应力在形变后点（x'，y'，z'）处的值就可以用在形变前点（x，y，z）处的值来代替。于是，在描述形变及应力并探讨其变化规律时，都使用点在形变前的坐标（x，y，z），而且仍按弹性体形变前的几何形状和尺寸进行分析。其次，应变和转角二次及以上的幂或乘积项都可以略去不计，从而使弹性动力学中的方程都简化为线性方程。再次，在小形变情况下，可以认为弹性体形变前后的密度是近似相等的，即在形变过程中密度是常数。

六、物体无初应力

此项假设即假定物体在受外力作用之前处于无应力的自然状态。

以上述六项基本假设为根据而建立起来的弹性力学称为线性弹性力学。

第四节　对地震波理论的认识

如上所述，机械振动在地球介质中的传播，形成了地震波。地震波通常可以看成是在岩层中传播的弹性波。地震波动力学是研究地震波的产生机理和传播特点，以及在传播过程中振动形式转化和能量分配规律的一门学科。它是从事地震学和勘探地震学理论方法研究的重要基础。

如今，随着社会科学技术的进步，特别是人类对能源、资源和环境发展的日益需求，极大地促进了地震波传播理论及应用技术的发展，这是地震波理论及应用技术发展的外在动力。同时，随着人类对整体科学研究的不断深入，地震波理论内涵的知识空间也在逐渐地向外拓展，这是地震波理论发展的内在动力。

地震波理论博大精深，所涵盖的内容广泛而复杂，需要人们长期不断地努力去探索发展。即使是对现在已有的研究成果，仍然需要作深入的认识和总结，这是进一步发展的基础。波动方程是地震波理论的核心内容，由于地球介质的复杂性，不规则地质体中的波动方程求解及其反演方法始终都是需要重点研究的前沿课题，这也是资源、环境、工程地球物理和地球探测等领域亟待解决的问题。

地震学及地震波传播理论在百余年的发展进程中，为人类的地震预报、防灾减灾、地球探测、石油等矿产的勘探开发、环境工程探测等方面都发挥了积极的重要作用。今天的技术应用得益于昨天的理论研究，没有今天的理论研究就没有明天的应用技术。随着科学技术和经济建设的快速发展，人们越来越重视并投身于基础理论的研究。正像在人类历史上地震学始终发挥着不可或缺的作用一样，我们相信，地震波理论也将会持续不断地向前发展，为人类探索自然和文明进步作出应有的贡献。

复习思考题

1. 什么是弹性体?
2. 物体在什么条件下表现为弹性性质，在什么条件下表现为塑性性质?
3. 弹性动力学的基本假设有哪些?
4. 什么是弹性动力学中的理想介质?

第一章　数学场论提要

第一节　矢量及其运算

一、标量、矢量和张量

标量和矢量是两种常用的物理量。我们在研究问题时发现，有些物理量可以完全用数值确定，例如岩石的密度 ρ，质量 m 以及地震波的旅行时间 t 等等，这样的物理量称为标量（或数量）。温度、能量、面积、体积等都是标量。另外，我们在描述某些物理量时，除了说明它的数值外，还必须指明它的方向，例如常用的速度、加速度、力等等，这样的物理量称为矢量（或向量）。力矩、角速度、动量等也都是矢量。如果该矢量又是某一变量的函数，则称该矢量为一矢量函数。

在科学研究和工程实践中，除了标量和矢量外，还经常接触到另外一种量——张量。张量的有关定义和概念需要用到三阶正交变换知识，在此不作详细的介绍。需要指出的是，张量是表示两个矢量或高阶次的量的各分量之间关系的重要手段，是矢量的扩充。通常接触到的张量包含 9 个分量，可以看成是由三个矢量组成的“复合矢量”，或称之为“矢量的矢量”，可用一矩阵表示，称为二阶张量。

标量只有一个即 3^0 个分量，称为零阶张量；矢量具有三个即 3^1 个分量，称为一阶张量；连接两个矢量的矩阵具有九个即 3^2 个分量，称为二阶张量；连接两个二阶张量的张量具有 9×9 个即 3^4 个分量，称为四阶张量；……；依次可以定义 n 阶张量。

二、矢量的表示法

在三维直角坐标系中，若三个相互正交的分量已知，一个矢量就确定了。矢量一般用黑体字母表示，例如，矢量 $\boldsymbol{a}$ 可用其分量形式表示

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

或写成

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

的形式。另外，矢量 $\boldsymbol{a}$ 还可表示成

$$\boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{a}^\circ \tag{1-2}$$

式中，$\|\boldsymbol{a}\|$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模或长度，$\boldsymbol{a}^\circ$ 是和 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位矢量，满足以下两式

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1-3}$$

$$\boldsymbol{a}^\circ = \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|} = \frac{a_x}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{i} + \frac{a_y}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{j} + \frac{a_z}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

显然，单位矢量的模等于 1 。若矢量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴夹角分别为 α，β，γ，则余弦值 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，用方向余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 可将单位矢量 $\boldsymbol{a}^\circ$ 表示为

$$\boldsymbol{a}^{\circ} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k} \tag{1-5}$$

与式（1-4）比较得到

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\|\boldsymbol{a}\|}, \cos\beta = \frac{a_y}{\|\boldsymbol{a}\|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{\|\boldsymbol{a}\|} \tag{1-6}$$

并且满足

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1-7}$$

模等于零的矢量称为零矢量，记为 $\boldsymbol{0}$；它是始点与终点重合的矢量。零矢量的三个分量均等于零。

模与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向与其相反的矢量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负矢量，记为 $-\boldsymbol{a}$。

矢径记为 $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$；它是始点在坐标原点，端点在 M 的一个矢量。其中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 分别为直角坐标系 $Oxyz$ 三个坐标轴上的单位正向矢量，称为坐标单位矢量或基本矢量。

三、矢量代数

1. 矢量的加法

若矢量 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则定义

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \tag{1-8}$$

为矢量的加法。加法运算适合如下定律

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \tag{1-9}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \tag{1-10}$$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} \tag{1-11}$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{1-12}$$

2. 矢量的减法

若矢量 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则定义

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z) \tag{1-13}$$

为矢量的减法。对任意两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，三角形不等式均成立，即

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \tag{1-14}$$

3. 矢量的数乘

以实数 λ 乘矢量 $\boldsymbol{a}$ 称为矢量的数乘法，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$ 的模变为 $|\lambda|$ 倍。当 $\lambda > 0$ 时，方向保持不变；$\lambda < 0$ 时，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反。若矢量 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，则

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \tag{1-15}$$

设 λ 和 μ 为实数，$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为两矢量，则数乘矢量运算适合下列规律

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a} \quad \text{（结合律）} \tag{1-16}$$

$$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a} \quad \text{（分配律）} \tag{1-17}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} \quad \text{（分配律）} \tag{1-18}$$

4. 两矢量的标量积

矢量的相乘有两种定义：标量积（点乘积）和矢量积（叉乘积）。如图 1-1 所示，两矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的标量积（也称为点积或内积）记为 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 或（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$），其结果为一标量，数值上等于两个矢量的模与其夹角 θ 余弦值的乘积，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|a\|\|b\|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\|a\|\|b\|\cos\theta \tag{1-19}$$

具体计算时，在直角坐标系下可使用公式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{1-20}$$

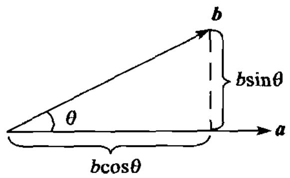


图 1-1　两矢量的乘法

式（1-20）可以看做矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长度乘以矢量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影的长度。标量积适合以下的运算规律

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \tag{1-21}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \tag{1-22}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{1-23}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\|\boldsymbol{a}\|^2 \tag{1-24}$$

若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为非零矢量，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$；反之也成立，即两非零矢量垂直的充要条件是标量积为零（$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$）。

5. 两矢量的矢量积

两矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的矢量积（也称为叉积或外积）记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，其结果为一矢量，该矢量垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面，方向按右手法则确定，其数值大小为

$$\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\|a\|\|b\|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\|a\|\|b\|\sin\theta \tag{1-25}$$

具体计算时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 在直角坐标系下可使用行列式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{1-26}$$

来表示，展开后就是

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k} \tag{1-27}$$

由式（1-25）可以看出，两矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的矢量积在数值上等于以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积。矢量积适合以下的运算规律

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} \tag{1-28}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} \tag{1-29}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{1-30}$$

$$[(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}]\times\boldsymbol{b}=(\lambda+\mu)(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{1-31}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \tag{1-32}$$

可见，若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为非零矢量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线即平行（$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$）的充分必要条件是矢量积为零（$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$）。

第二节　场 论 初 步

一、场的基本概念

数学场论是弹性力学、弹性波理论中使用的主要数学工具之一。场的概念起源于物理学，是许多物理量的数学关系和空间形式的一种表示方式。一种物理量由于其所处的空间位置不同，产生的物理效果也是不相同的，有时还会随时间而变化，例如某个地区某时的气温、风力等等。

如果某一个物理量在我们考虑的空间范围内的每一位置都有一确定的值与之对应，那么该物理量在空间上的分布就称为场。如果形成场的物理量是标量，则该场称为标量场；如果是矢量，则称为矢量场。例如，大气温度的分布、地下岩石密度分布形成标量场；在某个给定时刻流体流动的速度形成一速度矢量场；在弹性力的作用下，弹性体内部质点的位移构成一位移矢量场。

如果形成场的物理量不仅随位置变化，而且随时间变化，这样的物理量产生的场称为非稳定场（瞬变场），如上面谈到的大气温度的分布即为一非稳定标量场。严格来讲，一般的场都是非稳定场，但是某些实际问题中，在一段很短的时间内，某些物理量在同一位置上的变化很小，在一定的范围内可近似地认为它是不随时间变化的，这样的物理量形成的场称为稳定场（恒稳场），例如海洋深处海水的温度构成的温度场、地下岩石密度构成的密度场等。

总之，从数学角度上看，作为空间坐标的函数（有时还是时间的函数）的任何物理量都构成一个数学场。

1. 标量场

空间区域 D 的每点 $M(x, y, z)$ 对应一个数量值 $\varphi(x, y, z)$，它在此空间区域 D 上就构成一个标量场，用点 $M(x, y, z)$ 的标量函数 $\varphi(x, y, z)$ 表示。若 $M(x, y, z)$ 的位置用矢径 $\boldsymbol{r}$ 确定，则标量 φ 可以看做变矢 $\boldsymbol{r}$ 的函数 $\varphi=\varphi(\boldsymbol{r})$。

例如，温度场 $\mu(x, y, z)$，密度场 $\rho(x, y, z)$，电位场 $e(x, y, z)$ 都是标量场。

2. 矢量场

空间区域 D 的每点 $M(x, y, z)$ 对应一个矢量值 $\boldsymbol{R}(x, y, z)$，它在此空间区域 D 上就构成一个矢量场，用点 $M(x, y, z)$ 的矢量函数 $\boldsymbol{R}(x, y, z)$ 表示。若 $M(x, y, z)$ 的位置用矢径 $\boldsymbol{r}$ 确定，则矢量 $\boldsymbol{R}$ 可以看做变矢 $\boldsymbol{r}$ 的函数

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r})=X(x, y, z)\boldsymbol{i}+Y(x, y, z)\boldsymbol{j}+Z(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

例如，速度场 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$，电场 $\boldsymbol{E}(x, y, z)$，磁场 $\boldsymbol{H}(x, y, z)$ 都是矢量场。

与标量场的情况一样，矢量场概念与矢量概念实质上是一样的。沿用这些术语（标量场、矢量场）是为了保留它们的自身起源和物理意义。如果考虑时间因素，有关矢量场还可以表示成空间和时间的函数；例如，位移矢量场 $\boldsymbol{u}=u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k}$，其中分量 u_x，u_y 和 u_z 都是 (x, y, z, t) 的函数；还有速度矢量场 $\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$，其中分量 v_x，v_y 和 v_z 也都是 (x, y, z, t) 的函数。矢量也可以用矩阵来表示，如 $\boldsymbol{u}=u_{1\times 3}=[u_x \quad u_y \quad u_z]$，$\boldsymbol{v}=v_{1\times 3}=[v_x \quad v_y \quad v_z]$ 等。

二、标量场的方向导数和梯度

1. 方向导数

设 $\varphi(M)$ 是定义在区域 V 上的一个标量场，$M(x, y, z)$ 是 V 中任一点，我们不仅需要知道 $\varphi(M)$ 的分布情况，而且还需要知道 $\varphi(M)$ 在 V 中的变化情况。例如研究温度场时，我们需要知道温度的分布情况和变化规律，需要知道温度沿任一方向上升（或下降）的变化速率，这就是我们下面要讨论的标量场方向导数问题。

定义 1-1 设标量函数 $\varphi(M)$ 在区域 V 上连续，M_0 为 V 中任一点，过 M_0 作任一有向线段 $\boldsymbol{l}$（图 1-2），若极限

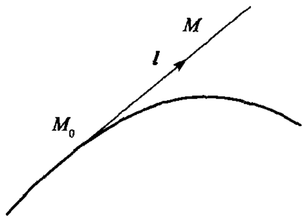


图 1-2 方向导数的定义

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\varphi(M)-\varphi(M_0)}{|M_0M|}$$

存在，则称该极限值为函数 $\varphi(M)$ 在点 M_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数，记为

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)_{M_0}=\lim_{M\to M_0}\frac{\varphi(M)-\varphi(M_0)}{|M_0M|}\tag{1-33}$$

和微分学中的偏导数类似，方向导数也表示一种变化率。它描述了标量函数 $\varphi(M)$ 在 M_0 附近沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的变化情况。另外，从式(1-33)中可知，若 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)_{M_0}>0$ 时，$\varphi(M)>\varphi(M_0)$，说明函数 $\varphi(M)$ 在 M_0 点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 是增加的；若 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)_{M_0}<0$ 时，$\varphi(M)<\varphi(M_0)$，说明 $\varphi(M)$ 在 M_0 点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 是减小的；当 $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)_{M_0}=0$ 时，$\varphi(M)=\varphi(M_0)$，说明 $\varphi(M)$ 在 M_0 点沿方向 $\boldsymbol{l}$ 没有变化。

一般地，按照定义由式(1-33)直接计算方向导数是不太方便的，为此给出下面的定理。

定理 1-1 若函数 $\varphi(M)$ 在点 M_0 可微，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦，则函数 $\varphi(M)$ 在点 M_0 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数必存在，并且有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma\tag{1-34}$$

例 1-1 求标量函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M(1, 0, 1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的方向导数。

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$。同理，求得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,0,1)}=0, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

而 $\boldsymbol{l}^\circ=\frac{\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})$，故 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$。

2. 梯度

在标量场 φ 中计算标量场 φ 沿某个方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数，即可知道函数 φ 在该点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向变化率。但场中从给定点出发有无穷多个方向，在该点函数 φ 沿哪个方向变化率最大？这个最大变化率的值又是多少呢？为了解决这个问题，引入梯度的概念。

根据公式(1-34)，若记

$$\boldsymbol{G}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\tag{1-35}$$

$$\boldsymbol{l}^\circ=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

显然，方向导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ 可用矢量 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{l}^\circ$ 的点积的形式表示

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{l}^\circ\tag{1-36}$$

由式(1-36)可知，不同的方向 $\boldsymbol{l}^\circ$，函数 $\varphi(M)$ 在 M_0 点的方向导数是不同的。由标量积