

(初三分册)

全国数学竞赛 试题及详解

本书编写组

SHUXUE JINGSAI

上海交通大学出版社

全国数学竞赛试题及详解

(初三分册)

本书编写组

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书收集了有影响的初三数学竞赛试题 40 套,按全国性和地方性竞赛分类编排,并配以详解。供读者学习、参考,开拓思路,提高解题能力。

本书可供爱好数学的中学生作拓宽思路,和参加竞赛的训练或自学材料,也可供数学竞赛辅导员参考。

图书在版编目(CIP)数据

全国数学竞赛试题及详解. 初三分册/《全国数学竞赛试题及详解》编写组. —上海:上海交通大学出版社,2004
ISBN 7—313—03570—5

I. 全... II. 全... III. 数学课—初中—解题
IV. G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 000837 号

全国数学竞赛试题及详解

(初三分册)

本书编写组

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码:200030)

电话: 64071208 出版人: 张天蔚

上海市美术印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本: 787mm × 1092mm 1/16 印张: 12.5 字数: 305 千字

2004 年 1 月第 1 版 2004 年 8 月第 2 次印刷

印数: 6050 - 10100

ISBN7-313-03570-5/G · 599 定价: 16.00 元

版权所有 侵权必究

前言

目前,全国各地开展的数学竞赛活动非常普及,各级各类的竞赛活动品种繁多,形式多样,尤其是我国参加国际数学奥林匹克竞赛以来,成绩显著,极大地激发了青少年学数学的兴趣。为了满足全国各地广大数学爱好者的需求,并且在充分考虑权威性、地方性和代表性的情况下,我们组织编写了这套《全国数学竞赛试题详解》系列丛书。本套书的特点和优势体现在以下两个方面:

第一,内容全面。本书所选内容包含了近几年主要的全国性赛事及地方性赛事,全国性竞赛有全国初中数学联赛、全国初中数学竞赛、“希望杯”全国数学邀请赛、“五羊杯”全国数学邀请赛、“华罗庚金杯”全国数学邀请赛、“祖冲之杯”全国数学邀请赛等,地方性竞赛主要选用了目前的“夺金”大省,如:江苏、山东、湖北黄冈等地赛题。由于这些竞赛试题都是精心设计的,知识点和难点覆盖面广、分布科学,而且便于了解和掌握命题规律,因此所选试题的权威性及其代表性毋庸置疑。学生演练这些试题,对于平日学习及参加中考、竞赛都会大有帮助。

第二,解答详尽。一般市场上的竞赛书,很多试题只有答案,并未提供详解。由于这些试题本身难度较高,如果没有详解,学生很难自己解答出来,也就达不到练习的目的。本套书则对所有试题提供详解,并尽可能提供一些规律性的东西,这对学生拓展思路,启迪思维,发展智力,将有很大帮助。另外,我们特别需要提醒学生的是——面对难题,要相信自己,要多思考,不要轻易看讲解和答案,要逐渐养成一种良好的学习习惯。

我们在编写过程中发现,由于部分试题来源不一致,解答缺漏及错误较多,因此我们在提供详解上投入了较多的时间和精力,但错讹之处在所难免,希望读者不吝指正。特别需要说明的是,上海交通大学出版社总编辑、博士生导师韩正之先生在百忙中为本书部分试题提供了详解,张国华编辑仔细审阅了全部书稿,在此一并表示感谢!

本丛书由刘弢、吕春昕主编,参加编写的人员还有:张静、张叶军、吕豪亮、朱敏杰、李宏宇、刘剑、李颖、白建新等。为了使下一版有更好的效果,编者希望使用这套丛书的学生和教师将自己的建议、心得以及批评、意见告诉编者,建议和批评请寄送电子信箱 ghzhang@sjtu.edu.cn。

编者

2003年12月

目 录

第一章 全国性竞赛 (1)

1997 全国初中数学联赛	(1)
1998 全国初中数学联赛	(3)
1999 全国初中数学联赛	(5)
2000 全国初中数学联赛	(7)
2001 全国初中数学联赛	(9)
2002 全国初中数学联赛	(11)
2003 全国初中数学联赛	(13)
1998 全国初中数学竞赛	(15)
1999 全国初中数学竞赛	(17)
2000 全国初中数学竞赛	(19)
2001 全国初中数学竞赛	(21)
2002 全国初中数学竞赛	(23)
2003 全国初中数学竞赛	(25)
第 9 届“五羊杯”初三数学竞赛	(28)
第 10 届“五羊杯”初三数学竞赛	(30)
第 11 届“五羊杯”初三数学竞赛	(32)
第 12 届“五羊杯”初三数学竞赛	(34)
第 13 届“五羊杯”初三数学竞赛	(36)
第 14 届“五羊杯”初三数学竞赛	(38)

第二章 地方性竞赛 (40)

山东省初中数学竞赛(1)	(40)
山东省初中数学竞赛(2)	(42)
山东省初中数学竞赛(3)	(44)
山东省初中数学竞赛(4)	(46)
山东省初中数学竞赛(5)	(48)
山东省初中数学竞赛(6)	(50)
山东省初中数学竞赛(7)	(52)

江苏省初中数学竞赛(8).....	(54)
江苏省初中数学竞赛(9).....	(57)
江苏省初中数学竞赛(10)	(60)
江苏省初中数学竞赛(11)	(63)
江苏省初中数学竞赛(12)	(66)
江苏省初中数学竞赛(13)	(69)
江苏省初中数学竞赛(14)	(71)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(15)	(74)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(16)	(76)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(17)	(78)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(18)	(80)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(19)	(82)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(20)	(84)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(21)	(86)

参考答案 (88)

第一章 全国性竞赛	(88)
1997 全国初中数学联赛	(88)
1998 全国初中数学联赛	(89)
1999 全国初中数学联赛	(91)
2000 全国初中数学联赛	(94)
2001 全国初中数学联赛	(96)
2002 全国初中数学联赛	(98)
2003 全国初中数学联赛	(100)
1998 全国初中数学竞赛	(103)
1999 全国初中数学竞赛	(105)
2000 全国初中数学竞赛	(108)
2001 全国初中数学竞赛	(110)
2002 全国初中数学竞赛	(113)
2003 全国初中数学竞赛	(115)
第9届“五羊杯”初三数学竞赛	(120)
第10届“五羊杯”初三数学竞赛	(123)
第11届“五羊杯”初三数学竞赛	(125)
第12届“五羊杯”初三数学竞赛	(128)

第 13 届“五羊杯”初三数学竞赛	(131)
第 14 届“五羊杯”初三数学竞赛	(134)
第二章 地方性竞赛	(138)
山东省初中数学竞赛(1)	(138)
山东省初中数学竞赛(2)	(141)
山东省初中数学竞赛(3)	(143)
山东省初中数学竞赛(4)	(145)
山东省初中数学竞赛(5)	(147)
山东省初中数学竞赛(6)	(149)
山东省初中数学竞赛(7)	(151)
江苏省初中数学竞赛(8)	(154)
江苏省初中数学竞赛(9)	(159)
江苏省初中数学竞赛(10)	(163)
江苏省初中数学竞赛(11)	(167)
江苏省初中数学竞赛(12)	(169)
江苏省初中数学竞赛(13)	(171)
江苏省初中数学竞赛(14)	(173)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(15)	(175)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(16)	(178)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(17)	(180)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(18)	(182)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(19)	(184)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(20)	(187)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(21)	(189)

第一章 全国性竞赛

1997 全国初中数学联赛

一、选择题

1. 下述四个命题,其中错误的命题有 ()

- (1) 一个数的倒数等于自身,那么,这个数是1;
 (2) 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形;
 (3) a^2 的平方根是 $\pm|a|$;
 (4) 大于直角的角一定是钝角!

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

2. 已知 $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} < x < \frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$. 那么,满足上述不等式的整数 x 的个数是 ()

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

3. 若实数 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, 则代数式 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ 的最大值是 ()

A. 27 B. 18 C. 15 D. 12

4. 给定平面上的 n 个点,已知 1, 2, 4, 8, 16, 32 都是其中两点之间的距离. 那么,点数 n 的最小可能值是 ()

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

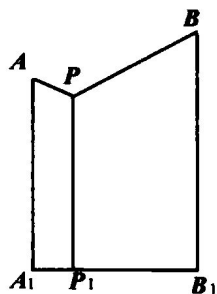
5. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, E, M, F, N 分别为 AB, BC, CD, DA 的中点, 已知 $BC = 7, MN = 3$. 则 EF 之值是 ()

A. 4 B. $4\frac{1}{2}$ C. 5 D. 6

6. 如图, 已知 $\angle A = \angle B$, AA_1, PP_1, BB_1 均垂直于 A_1B_1 , $AA_1 = 17, PP_1 = 16, BB_1 = 20, A_1B_1 = 12$. 则 $AP + PB$ 的值是

()

A. 12 B. 13
 C. 14 D. 15



二、填空题

1. 从等边三角形内一点向三边作垂线, 已知这三条垂线的长分别为 1, 3, 5, 则这个三角形的面积是_____.

2. 当 a 取遍 0 到 5 的所有实数值时, 满足 $3b = a(3a - 8)$ 的整数 b 的个数是_____.

3. 若 a, b 满足 $3\sqrt{a} + 5|b| = 7$, 则 $s = 2\sqrt{a} - 3|b|$ 的取值范围是_____.

4. 若正整数 x, y 满足方程 $x^2 + y^2 = 1997$, 则 $x + y$ 等于_____.

三、解答题

1. 设 P 为等腰直角三角形 ACB 斜边 AB 上任意一点, PE 垂直 AC 于点 E , PF 垂直 BC 于点 F , PG 垂直 EF 于点 G , 延长 GP 并在其延长线上取一点 D , 使得 $PD = PC$. 试证: $BC \perp BD$, 且 $BC = BD$.

2. 已知 a, b 为整数, 且 $a > b$, 方程 $3x^2 + 3(a+b)x + 4ab = 0$ 的两个根 α, β 满足关系式 $\alpha(\alpha+1) + \beta(\beta+1) = (\alpha+1)(\beta+1)$. 试求所有的整数点对 (a, b) .

3. 已知定理: “若三个大于 3 的质数 a, b, c 满足关系式 $2a + 5b = c$, 则 $a + b + c$ 是整数 n 的倍数.” 试问: 上述定理中的整数 n 的最大可能值是多少? 并证明你的结论.

1998 全国初中数学联赛

一、填空题

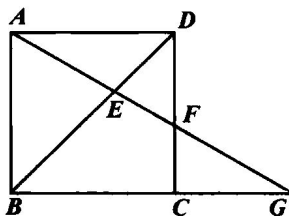
1. 设 $m = \sqrt{5} + 1$, 那么 $m + \frac{1}{m}$ 的整数部分是_____.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 两条直角边 AB, AC 的长分别是 1 厘米, 2 厘米, 那么直角的平分线的长度等于_____厘米.

3. 已知 $x^2 - x - 1 = 0$, 那么代数式 $x^3 - 2x + 1$ 的值是_____.

4. 已知 m, n 是有理数, 并且方程 $x^2 + mx + n = 0$ 有一个根是 $\sqrt{5} - 2$. 那么 $m + n$ 的值是_____.

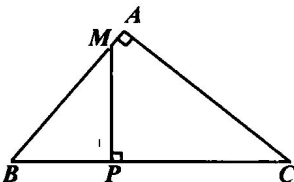
5. 如图, $ABCD$ 为正方形, A, E, F, G 在同一条直线上, 并且 $AE = 5$ 厘米, $EF = 3$ 厘米, 那么 $FG =$ _____厘米.



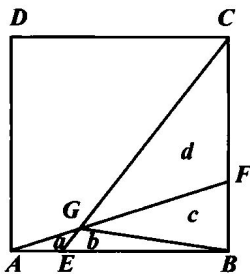
6. 满足 $1998^2 + m^2 = 1997^2 + n^2$ ($0 < m < n < 1998$) 的整数对 (m, n) 共有_____个.

7. 设平方数 y^2 是 11 个相继整数的平方和, 则 y 的最小值是_____.

8. 如图, 直角三角形 ABC 中, 直角边 AB 上有一点 M , 斜边 BC 上有一点 P , 已知 $MP \perp BC$, $\triangle BMP$ 的面积等于四边形 $MPCA$ 的面积的一半, $BP = 2$ 厘米, $PC = 3$ 厘米, 那么直角三角形 ABC 的面积是_____平方厘米.



9. 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的面积为 35 平方厘米, E, F 分别为边 AB, BC 上的点, AF, CE 相交于点 G , 并且 $\triangle ABF$ 的面积为 5 平方厘米, $\triangle BCE$ 的面积为 14 平方厘米, 那么四边形 $BEGF$ 的面积是_____平方厘米.



10. 把 100 个苹果分给若干个人, 每人至少分一个, 且每人分的数目各不相同, 那么至多有_____人.

11. 设 a, b 为实数, 那么 $a^2 + ab + b^2 - a - 2b$ 的最小值是_____.

12. $1, 2, 3, \dots, 98$ 共 98 个自然数中, 能够表示成两整数的平方差的个数是_____.

13. 在右边的加法算式中, 每一个 $\square$ 表示一个数字, 任意两个数字都不相同, 那么 A 与 B 乘积的最大值是_____.

$$\begin{array}{r}
 \square \\
 \square \square \\
 + \square \square \square \\
 \hline
 \square \square A B
 \end{array}$$

14. 直线 AB 和 AC 与圆 O 分别相切于 B, C 两点, P 为圆上一点, P 到 AB, AC 的距离分别为 6 厘米, 4 厘米, 那么 P 到 BC 的距离是_____厘米.

15. 每一本书都有一个国际书号: $ABCDEFGHIJ$, 其中 $ABCDEFGHI$ 由九个数字排列而成, J 是检查号码, 令 $S = 10A + 9B + 8C + 7D + 6E + 5F + 4G + 3H + 2I$, r 是 S 除以 11 所得的余数, 若 r 不等于 0 或 1, 则按 $J = 11 - r$ (若 $r = 0$, 则规定 $J = 0$; 若 $r = 1$, 规定 J 用 x 表示), 现有一本书的书号是 $962y707015$, 那么 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

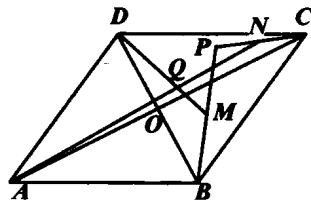
二、解答题

1. 求所有正实数 a , 使得方程 $x^2 - ax + 4a = 0$ 仅有整数根.

2. 如图, 已知 P 为 $\square ABCD$ 内一点, O 为 AC 与 BD 的交点, M 、 N 分别为 PB 、 PC 的中点, Q 为 AN 与 DM 的交点. 求证:

(1) P, Q, O 三点在一条直线上;

(2) $PQ = 2OQ$.



3. 试写出 5 个自然数, 使得其中任意两个数中的较大的一个数可以被这两个数的差整除.

1999 全国初中数学联赛

一、选择题

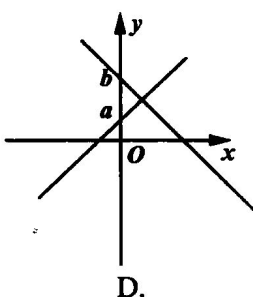
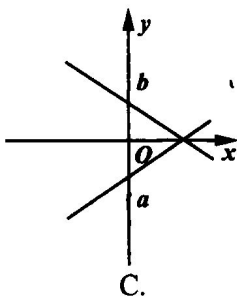
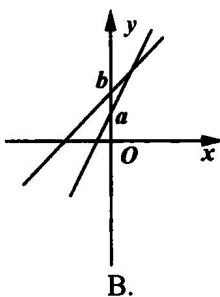
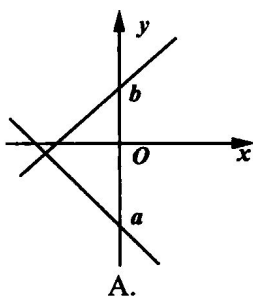
1. 计算 $\frac{1}{1-\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{2}{1+\sqrt{3}}$ 的值是 ()

- A. 1 B. -1 C. 2 D. -2

2. $\triangle ABC$ 的周长是 24, M 是 AB 的中点, $MC = MA = 5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 ()

- A. 12 B. 16 C. 24 D. 30

3. 设 $b > a$, 将一次函数 $y = bx + a$ 与 $y = ax + b$ 的图像画在同一平面直角坐标系内, 则有一组 a, b 的取值, 使得下列 4 幅图中的一个为正确的是 ()

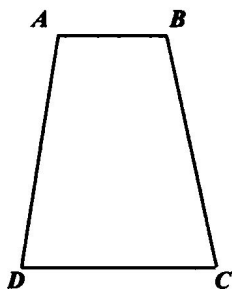


4. 若函数 $y = \frac{1}{2}(x^2 - 100x + 196 + |x^2 - 100x + 196|)$, 则当自变量 x 取 1, 2, 3, ..., 100 这 100 个自然数时, 函数值的和是 ()

- A. 540 B. 390
C. 194 D. 97

5. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = 998$, $DC = 1001$, $AD = 1999$, 点 P 在线段 AD 上, 则满足条件 $\angle BPC = 90^\circ$ 的点 P 的个数为 ()

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 不小于 3 的整数



6. 有下列三个命题: 其中正确命题的个数是 ()

(甲) 若 α, β 是不相等的无理数, 则 $\alpha\beta + \alpha - \beta$ 是无理数;

(乙) 若 α, β 是不相等的无理数, 则 $\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$ 是无理数;

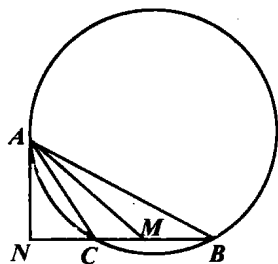
(丙) 若 α, β 是不相等的无理数, 则 $\sqrt{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$ 是无理数.

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

二、填空题

1. 已知 $\frac{1}{4}(b-c)^2 = (a-b)(c-a)$ 且 $a \neq 0$, 则 $\frac{b+c}{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=36^\circ$, $\angle ACB=128^\circ$, $\angle CAB$ 的平分线交 BC 于 M , $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 AN 交 BC 的延长线于 N ,则 $\triangle ANM$ 的最小角等于_____.



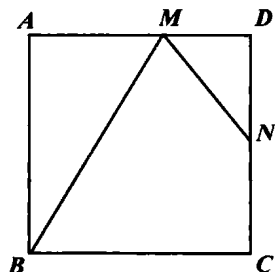
3. 已知 a, b 为整数,且满足 $\left[\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} - \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \right] \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$.

$\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{2}{3}$,则 $a+b=$ _____.

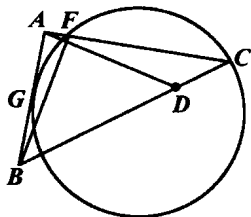
4. 如右下图,在正方形 $ABCD$ 中, N 是 DC 的中点, M 是 AD 上异于 D 的点,且 $\angle NMB = \angle MBC$,则 $\tan \angle ABM =$ _____.

三、解答题

1. 某班参加一次智力竞赛,共 a, b, c 三题,每题或者得满分或者得0分,其中 a 题满分20分, b 和 c 题满分均为25分.竞赛结果,每个学生至少答对了一题,三题全答对的有1个,答对其中两道题的有15人,答对题 a 的人数与答对题 b 的人数之和为29;答对题 a 的人数与答对题 c 的人数之和为25;答对题 b 的人数与答对题 c 的人数之和为20,问这个班的平均成绩是多少?



2. 如图,设 $\triangle ABC$ 是直角三角形,点 D 在斜边 BC 上, $BD=4DC$,已知圆过点 C 且与 AC 相交于点 F ,与 AB 相切于 AB 的中点 G .求证: $AD \perp BF$.



3. 已知 b, c 为整数,方程 $5x^2 + bx + c = 0$ 的两根都大于-1且小于0,求 b 和 c 的值.

4. a 是大于零的实数,已知存在唯一的实数 k ,使得关于 x 的二次方程 $x^2 + (k^2 + ak)x + 1999 + k^2 + ak = 0$ 的两个根均为质数,求 a 的值.

2000 全国初中数学联赛

一、选择题

1. 计算 $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt{14-6\sqrt{5}}$ 的值是 ()
 A. 1 B. $\sqrt{5}$ C. $2\sqrt{5}$ D. 5
2. 若 $\frac{x}{3y} = \frac{y}{2x-5y} = \frac{6x-15y}{x}$, 则 $\frac{4x^2-5xy+6y^2}{x^2-2xy+3y^2}$ 的值是 ()
 A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{9}{4}$ C. 5 D. 6
3. 设 a, b 是不相等的任意正数, 又 $x = \frac{b^2+1}{a}, y = \frac{a^2+1}{b}$. 则 x, y 这两个数一定 ()
 A. 都不大于 2 B. 都不小于 2
 C. 至少有一个大于 2 D. 至少有一个小于 2
4. 正整数 n 小于 100, 并且满足等式 $[\frac{n}{2}] + [\frac{n}{3}] + [\frac{n}{6}] = n$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 这样的正整数 n 有 ()
 A. 2 个 B. 3 个 C. 12 个 D. 16 个
5. 已知一个梯形的四条边的长分别为 1, 2, 3, 4. 则此梯形的面积等于 ()
 A. 4 B. 6 C. $8\sqrt{2}$ D. $\frac{10}{3}\sqrt{2}$
6. 已知 $ABCD$ 是一个半径为 R 的圆内接四边形, $AB=12, CD=6$, 分别延长 AB 和 DC , 它们相交于 P , 且 $BP=8, \angle APD=60^\circ$. 则 R 等于 ()
 A. 10 B. $2\sqrt{21}$ C. $12\sqrt{2}$ D. 14

二、填空题

1. a, b 是正数, 并且抛物线 $y = x^2 + ax + 2b$ 和 $y = x^2 + 2bx + a$ 都与 x 轴有公共点, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值是_____.
2. 某果品商店进行组合销售, 甲种搭配: 2 千克 A 水果, 4 千克 B 水果; 乙种搭配: 3 千克 A 水果, 8 千克 B 水果, 1 千克 C 水果; 丙种搭配: 2 千克 A 水果, 6 千克 B 水果, 1 千克 C 水果. 已知 A 水果每千克 2 元, B 水果每千克 1.2 元, C 水果每千克 10 元. 某天该商店销售这三种搭配共得 441.2 元, 其中 A 水果的销售额为 116 元. 则 C 水果的销售额为_____元.
3. 实数 x, y 满足 $x \geq y \geq 1$ 和 $2x^2 - xy - 5x + y + 4 = 0$, 则 $x + y =$ _____.
4. 设正 $\triangle ABC$ 的边长为 2, M 是 AB 边上的中点, P 是 BC 边上的任意一点, $PA + PM$ 的最大值和最小值分别记为 s 和 t . 则 $s^2 - t^2 =$ _____.

三、解答题

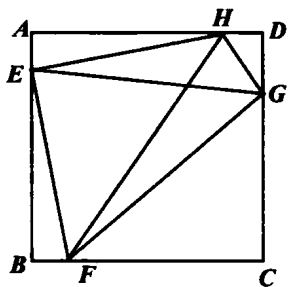
1. 设 p 是实数, 二次函数 $y = x^2 - 2px - p$ 的图像与 x 轴有两个不同的交点 $A(x_1,$

0), $B(x_2, 0)$.

(1) 求证: $2px_1 + x_2^2 + 3p > 0$;

(2) 若 A, B 两点之间的距离不超过 $|2p - 3|$, 求 p 的最大值.

2. 如图, $EFGH$ 是正方形 $ABCD$ 的内接四边形, $\angle BEG$ 与 $\angle CFH$ 都是锐角. 已知 $EG = 3$, $FH = 4$, 四边形 $EFGH$ 的面积为 5. 求正方形 $ABCD$ 的面积.



3. 设关于 x 的二次方程 $(k^2 - 6k + 8)x^2 + (2k^2 - 6k - 4)x + k^2 = 4$ 的两根都是整数. 求满足条件的所有实数 k 的值.

2001 全国初中数学联赛

一、选择题

1. a, b, c 为有理数, 且等式 $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ 成立, 则 $2a + 999b + 1001c$ 的值是 ()

- A. 1999 B. 2000 C. 2001 D. 不能确定

2. 若 $a \cdot b \neq 1$, 且有 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ 及 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值是 ()

- A. $\frac{9}{5}$ B. $\frac{5}{9}$ C. $-\frac{2001}{5}$ D. $-\frac{2001}{9}$

3. 如图 1, 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 15^\circ$, $BC = 1$, 则 AC 的长为 ()

- A. $2 + \sqrt{3}$ B. $2 - \sqrt{3}$ C. 0.3 D. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

4. 如图 2, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 AC 上一点, 下面四种情况中, $\triangle ABD \sim \triangle ACB$ 不一定成立的情况是 ()

- A. $AD \cdot BC = AB \cdot BD$ B. $AB^2 = AD \cdot AC$
C. $\angle ABD = \angle ACB$ D. $AB \cdot BC = AC \cdot BD$

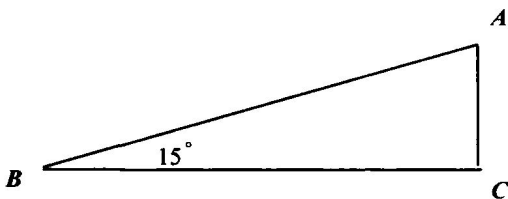


图 1

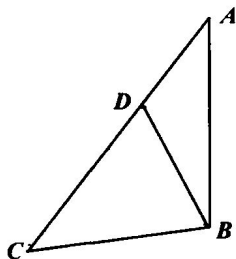


图 2

5. ①在实数范围内, 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

②在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AC^2 + BC^2 > AB^2$, 则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形;

③在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 的三边, a_1, b_1, c_1 分别为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三边, 若 $a > a_1, b > b_1, c > c_1$, 则 $\triangle ABC$ 的面积 $S > \triangle A_1B_1C_1$ 的面积 S_1 .

以上三个命题中, 假命题的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 某商场对顾客实行优惠, 规定:

①如一次购物不超过 200 元, 则不予折扣;

②如一次购物超过 200 元但不超过 500 元的, 按标价给予九折优惠;

③如一次购物超过 500 元的, 其中 500 元按第②条给予优惠, 超过 500 元的部分则给予八折优惠.

某人两次去购物,分别付款 168 元与 423 元.如果他只去一次购买同样的商品,则应付款是 ()

- A. 522.8 元 B. 510.4 元 C. 560.4 元 D. 472.8 元

二、填空题

1. 已知点 P 在直角坐标系中的坐标为 $(0,1)$, O 为坐标原点, $\angle QPO = 150^\circ$, 且 P 到 Q 的距离为 2, 则 Q 的坐标为_____.

2. 已知半径分别为 1 和 2 的两个圆外切于点 P , 则点 P 到两圆外公切线的距离为_____.

3. 已知 x, y 是正整数, 并且 $xy + x + y = 23$, $x^2y + xy^2 = 120$, 则 $x^2 + y^2 =$ _____.

4. 一个正整数, 若分别加上 100 与 168, 则可得到两个完全平方数. 这个正整数为_____.

三、解答题

1. 在直角坐标系中有三点 $A(0,1), B(1,3), C(2,6)$, 已知直线 $y = ax + b$ 上横坐标为 0、1、2 的点分别为 D, E, F . 试求 a, b 的值, 使得 $AD^2 + BE^2 + CF^2$ 达到最小值.

2. 求实数 x, y 的值, 使得 $(y-1)^2 + (x+y-3)^2 + (2x+y-6)^2$ 达到最小值.

3. (1) 证明: 若 x 取任意整数时, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 总取整数值, 那么 $2a, a-b, c$ 都是整数;

(2) 写出上述命题的逆命题, 并判断真假, 且证明你的结论.

4. 如图, D, E 是 $\triangle ABC$ 边 BC 上的两点, F 是 BA 延长线上一点, $\angle DAE = \angle CAF$.

(1) 判断 $\triangle ABD$ 的外接圆与 $\triangle AEC$ 的外接圆的位置关系, 并证明你的结论;

(2) 若 $\triangle ABD$ 的外接圆半径是 $\triangle AEC$ 的外接圆半径的 2 倍, $BC = 6, AB = 4$, 求 BE 的长.

