

GAODENG DAISHU YU KONGJIAN JIEXI JIHE

高等代数与 空间解析几何

张建初·主编

ZHANGJIANCHU ZHUBIAN
HUADONG LIGONG DAXUE
CHUBANSHE

华东理工大学出版社

高等代数与空间解析几何

张建初 主编

华东理工大学出版社

(沪)新登字 208 号

高等代数与空间解析几何

Gaodeng Daishu yu Kongjian jixi jihe

张建初 主编

华东理工大学出版社出版

(上海市梅陇路 130 号)

新华书店上海发行所发行

江苏句容排印厂排版

上海长鹰印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 15 字数 399千字

1993 年 12 月第 1 版 1993 年 12 月第 1 次印刷

印数 1-2000 册

ISBN 7-5628-0419-2/O·35

定价: 8.40 元

内 容 提 要

本书是将《高等代数》与《空间解析几何》的内容融会在一起而编写的教材。其中高等代数的内容以线性代数为主体,包括行列式、矩阵、线性方程组、向量空间和线性空间、线性变换、二次型、内积空间、特征问题、矩阵的标准形、矩阵分析等;空间解析几何的内容以欧氏几何和仿射几何为主,包括直线和平面、常见的曲面、二次曲面的仿射理论和度量理论等。编者将“代数”与“几何”内容穿插论述、有机结合,突出了线性代数与解析几何的内在联系,起到相得益彰作用。

本书在深度和广度上符合应用数学专业《高等代数》、《空间解析几何》的教学基本要求,可供数学、应用数学、计算数学等专业作教材,也可供工科硕士研究生作为《矩阵理论及其应用》课程的教学参考书。

前 言

《高等代数》、《空间解析几何》是数学系的两门主要专业基础课。高等代数,尤其是作为其中主体内容的线性代数,与解析几何之间相互依赖、紧密联系。线性代数起源于解析几何,它作为解析几何的主要工具又推动几何的发展。解析几何本质上可看作二维、三维线性代数,它给线性代数提供各种几何背景和几何解释,使线性代数内容更为充实。因此,改变这两门课程分别设置的传统做法,将它们融合成一门课程,这对于加强课程之间的内在联系是十分有益的。它有利于课程内容的相互衔接,避免因分别设课而造成的不必要的重复,从而减少授课的学时数。它既可克服高等代数因抽象难学,教学效果往往不甚理想的弊端,又可将解析几何从“观点”上加以提高,起到相得益彰的作用。

出于上述考虑,编者在应用数学专业进行了多年将高等代数与空间解析几何“结合”教学的改革实践,并在此基础上编写成这本教材。本书通过解析几何与线性代数内容间的一些“结合点”将两者融合在一起,并力图使全书结构紧密,前后连贯。读者阅读时充分注意本书中的“结合点”,对于掌握解析几何与线性代数内容的关联将是有效的。本书有以下主要的“结合点”:

——从三维向量空间、几何空间到 n 维向量空间、线性空间、欧氏空间的抽象;

——平面、直线与线性方程组、矩阵之间的相互解释和依赖;

——仿射坐标变换、仿射变换与满秩线性变换的对应;直角坐标变换、等距变换(刚体运动、镜面反射)与正交变换的对应;

——仿射坐标系或直角坐标系下二次曲面方程化为标准方程与用满秩线性变换或正交变换化二次型为标准形的联系。

本书既具有将代数与几何融会结合的特色,又按数学、应用数学等专业《高等代数》、《空间解析几何》的教学基本要求编写,因此可作为数学类专业的教材或教学参考书。本书也可供非数学类专

业优秀生学习《线性代数》、《解析几何》和工科硕士研究生学习《矩阵及其应用》时使用或参考。

本书由华东理工大学张建初主编。上海黄浦区业余大学陈康群担任了第一至第四章的编写。

本书在编写过程中得到华中理工大学王心介副教授和华东理工大学俞文鰲、谢国瑞、蒋司勋、徐伟成、黄德成、夏宁茂、孙龙祥、陈邦海、郑汶玉、崔卫旗、邵晓华、曹宇烨等教授和先生们的指导和关心，尤其是谢国瑞教授和蒋司勋副教授提议和鼓励我将代数与几何进行结合教学的尝试。谢国瑞教授审阅了全书，王心介副教授对本书曾提出了许多建设性的意见。对此，编者一并表示衷心的感谢和诚挚的敬意，编者还要感谢华东理工大学教材建设委员会、课程建设委员会、教务处、研究生处、数学系、应用数学研究所以及上海黄浦区业余大学和上海铁路局南昌分局研究所等单位 and 部门在本书出版过程中所给予的大力帮助。

由于本书编写是一种改革的尝试，加之编者水平所限，难免出现这样或那样的不妥，甚至错误，敬请同行专家和广大读者给予批评和指正。

编 者

目 录

1 行列式	1
1.1 集合与数域	1
1.1.1 集合	1
1.1.2 数域	3
1.2 排列、逆序与对换	4
1.2.1 排列与逆序	4
1.2.2 对换	5
1.3 n 阶行列式的定义	6
1.4 n 阶行列式的性质	9
1.5 行列式的计算	12
1.5.1 化为上三角形行列式	12
1.5.2 按一行(列)展开	14
1.6 Laplace 定理·行列式的乘法规则	21
1.6.1 子式及其余子式	21
1.6.2 Laplace 定理	22
1.6.3 行列式的乘法规则	25
1.7 Cramer 法则	27
习题 1	30
2 向量和向量空间	34
2.1 向量的几何概念和运算	34
2.1.1 向量的加法	35
2.1.2 数乘向量	36
2.1.3 向量的减法	36
2.2 共线、共面向量和向量的线性关系	38
2.2.1 向量的线性关系	38
2.2.2 向量共线、共面的条件	39
2.3 空间坐标系和向量的分量表示	40

2.3.1	空间直角坐标系和仿射坐标系	40
2.3.2	向量在坐标系中的分量表示	42
2.4	n 维向量空间	46
2.4.1	n 维向量的概念和运算	46
2.4.2	n 维向量的线性关系	48
2.4.3	向量组的秩和极大线性无关子组	51
	习题 2	53
3	矩阵	58
3.1	矩阵的概念和运算	58
3.1.1	矩阵的定义和一些常见的矩阵	58
3.1.2	矩阵的运算	60
3.1.3	矩阵的转置	64
3.1.4	矩阵应用浅谈	65
3.2	方阵的行列式和逆阵	67
3.3	矩阵分块及其运算	70
3.3.1	矩阵分块运算的规则	71
3.3.2	准对角矩阵	73
3.4	矩阵的秩	75
3.5	矩阵的初等变换	83
3.5.1	矩阵的初等变换和初等矩阵	83
3.5.2	矩阵的相抵、用初等变换求矩阵的秩和逆阵	86
	习题 3	94
4	线性方程组	99
4.1	Gauss(高斯)消去法	99
4.2	线性方程组相容性的讨论	106
4.3	线性方程组解的结构	109
4.3.1	齐次线性方程组的基础解系	110
4.3.2	非齐次线性方程组解的结构	114
	习题 4	116
5	平面和直线	121

5.1	三维几何向量的数积	121
5.1.1	数积的定义和运算律	121
5.1.2	直角坐标系下数积的分量表示	123
5.2	三维几何向量的矢积和混合积	125
5.2.1	矢积的定义和运算律	125
5.2.2	直角坐标系下矢积的分量表示	127
5.2.3	混合积	129
5.3	平面的方程	131
5.3.1	仿射坐标系下平面的参数式和一般式方程	131
5.3.2	直角坐标系下平面的点法式方程	136
5.4	有关平面的一些问题	138
5.4.1	向量平行于平面的条件	138
5.4.2	两平面平行、重合或相交的条件	139
5.4.3	平面束	140
5.4.4	平面到点的有向距离	142
5.4.5	两平行平面的距离和等距面方程	144
5.4.6	两相交平面的夹角和等分角平面方程	145
5.5	直线的方程	146
5.6	有关直线的一些问题	149
5.6.1	直线上点与参数的对应、有向线段的定比分割	150
5.6.2	两直线相错、相交或平行的条件	152
5.6.3	两直线的夹角	154
5.6.4	相错直线的公垂线	154
5.6.5	直线和平面的相对位置	156
5.6.6	点到直线的距离	158
5.7	平面和直线作为线性方程组的几何解释	158
5.7.1	平面与平面的相对位置	158
5.7.2	线性方程组的几何解释	161
	习题 5	162
6	几种常见的曲面	170

6.1	曲面和曲线的方程	170
6.2	柱面	174
6.3	锥面	177
6.4	旋转曲面	181
6.5	椭圆面、双曲面和抛物面	185
6.5.1	椭圆面	185
6.5.2	双曲面	187
6.5.3	抛物面	190
	习题 6	193
7	线性空间和坐标变换	196
7.1	线性空间的概念	196
7.2	维数、基底和坐标	199
7.3	基变换和坐标变换	202
7.4	三维几何空间中的仿射坐标变换与直角坐标变换 ..	206
7.5	线性子空间	213
7.5.1	线性子空间的概念	213
7.5.2	子空间的交与和	216
7.5.3	子空间的直和	219
	习题 7	221
8	线性变换	226
8.1	集合的映射	226
8.2	线性变换的概念	227
8.2.1	线性变换的定义、例题和几个简单性质	227
8.2.2	线性变换的值域与核	230
8.3	线性变换的矩阵	233
8.3.1	线性变换在给定基下的矩阵	233
8.3.2	线性变换在不同基下矩阵的关系	237
8.4	线性变换的运算	240
8.5	仿射变换	246
	习题 8	250

9 二次曲面的仿射理论	255
9.1 二次曲面与直线的交点、切平面和奇点	256
9.1.1 二次曲面与直线的交点	256
9.1.2 切平面和奇点	258
9.2 二次曲面的渐近方向和中心	261
9.2.1 渐近方向和非渐近方向	262
9.2.2 中心	262
9.3 直径面、奇向和共轭方向	266
9.3.1 直径面	266
9.3.2 奇向	269
9.3.3 共轭方向和共轭直径	271
9.4 仿射坐标系下二次曲面的标准方程	272
习题9	280
10 二次型	283
10.1 二次型的标准形和规范形	283
10.1.1 n 元二次型的概念	283
10.1.2 二次型的标准形	285
10.1.3 二次型的规范形	288
10.2 有定和不定二次型	291
10.2.1 正定二次型和正定矩阵	291
10.2.2 负定、半正定、半负定和不定二次型	296
10.2.3 二次型有定和不定在多元函数极值问题中 的应用	297
10.3 厄米特(Hermite)二次型	299
习题10	302
11 欧氏空间和正交变换	306
11.1 内积和欧氏空间的概念	306
11.2 标准正交基和正交矩阵	312
11.2.1 标准正交基	312
11.2.2 正交矩阵	316

11.3	子空间的正交关系、最小二乘法问题	320
11.3.1	正交子空间和正交补	320
11.3.2	向量到子空间的距离、用最小二乘法解矛盾线性方程组	322
11.4	正交变换、刚体运动和镜面反射	327
11.4.1	正交变换及其性质	327
11.4.2	刚体运动	330
11.4.3	镜面反射	334
11.5	酉空间和酉变换	335
11.5.1	酉空间	335
11.5.2	酉矩阵和酉变换	338
	习题11	339
12	特征值、特征向量、矩阵对角化及其应用	344
12.1	特征值和特征向量	344
12.2	矩阵的对角化	350
12.3	不变子空间	357
12.4	实对称矩阵的标准形和二次型的主轴问题	360
12.4.1	用正交矩阵化实对称阵为对角阵	361
12.4.2	用正交变换化实二次型为标准形	366
12.4.3	酉空间的主轴问题	367
12.5	直角坐标系下二次曲面的标准方程	370
	习题12	381
13	多项式	386
13.1	一元多项式的概念和运算	386
13.2	最大公因式	390
13.3	因式分解和多项式的根	394
13.4	复系数、实系数和有理系数多项式的根	398
13.4.1	复系数和实系数多项式的根	398
13.4.2	有理系数多项式的有理根	400
	习题13	403

14	多项式矩阵和矩阵的标准形	406
14.1	多项式矩阵的概念及其运算	406
14.2	多项式矩阵的 Smith 标准形及其唯一性	408
14.3	矩阵相似与特征矩阵相抵的关系	415
14.4	初等因子和矩阵的 Jordan 标准形	417
14.4.1	初等因子	417
14.4.2	矩阵的 Jordan 标准形	419
	习题14	425
15	矩阵分析	429
15.1	向量和矩阵的范数	429
15.1.1	向量的范数	429
15.1.2	方阵的范数	433
15.2	向量和矩阵序列的极限	439
15.2.1	向量序列的极限	439
15.2.2	矩阵序列的极限	440
15.3	函数矩阵的导数与积分	443
15.4	矩阵级数和幂级数	445
15.4.1	矩阵级数	445
15.4.2	方阵的幂级数	447
15.5	矩阵函数	451
	习题15	461

1 行 列 式

1.1 集合与数域

1.1.1 集合

集合是数学中最基本的概念之一。我们无法对它下一个确切的定义,只能给予某种描述。简单地说,一些具有一定特性的事物看作一个整体就是一个集合;而构成集合的每一个事物称为该集合的元素。例如,你们班级的全体学生构成了一个集合,而你们中的每一个学生就是该集合中的元素。

数学上,集合常用大写字母 $A, B, \dots, M, N, \dots, X, \dots$ 表示;集合中的元素用小写字母 $a, b, \dots, x, y, \dots, \alpha, \beta, \dots$ 来表示。若 a 是集合 M 的元素就记为 $a \in M$, 称为 a 属于 M ; 若 a 不是集合 M 的元素就记为 $a \notin M$ (或记为 $a \in M$), 称为 a 不属于 M 。

由数构成的集合称为数集;由点构成的集合称为点集。数集是数学中最常见的集合,其中一些用专用记号表示,我们记 N 为自然数集; Z 为整数集; Q 为有理数集; R 为实数集; K 为复数集。

元素个数有限的集合称为有限集;元素个数无限的集合称为无限集。不含任何元素的集合称为空集,用 $\varnothing$ 表示。引进空集的概念并非是没有意义的,而是后面进行集合的运算所必需的。

数学上表达一个集合有哪些元素构成通常有两种办法:一种是列举法,即把集合中的元素一个个写在花括号内。必要时对有规律的元素可使用省略记号。例如 $A = \{0, 1\}$ 表示仅有 0 和 1 两个数构成的集合。而 $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ 。另一种是特性表示法,通常在花括号中使用一竖线,并在竖线的前面写上代表性的元素,而后面写上作为该集合的元素应满足的特性。例如,

$A = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ 表示区间 $[-1, 1]$ 内所有点构成的集合;

$M = \{(x, y) | x^2 + y^2 = r^2\}$ 表示以原点为圆心, 以 r 为半径的圆上全体点构成的集合;

$X = \{ax^2 + bx + c | a, b, c \in R\}$ 表示全体次数不超过 2 的实系数多项式构成的集合。

如果集合 A 的元素全是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$, 读成 A 包含于 B , 或 B 包含 A 。显然, $N \subset Z \subset Q \subset R \subset K$ 。我们规定 $\emptyset$ 是任何集合的子集。

若 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 即 A 与 B 含有完全相同的元素, 则称 A 与 B 相等, 记作 $A = B$ 。例如

$$\{x | x^2 = 1\} = \{-1, 1\};$$

$$\{x | x^2 + 1 = 0, x \in R\} = \emptyset。$$

若 $A \subset B$, 但 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集。

根据子集的定义, 如要证明 $A \subset B$, 则一般应“任取 $x \in A \Rightarrow$ (该记号表示推出) $x \in B$ ”。而要证明 $A = B$, 则应证明 $A \subset B$ 及 $B \subset A$ 两步。

我们给出集合以下几种运算的定义:

(1) 由 A 与 B 的所有元素合在一起构成的集合称为 A 与 B 的并集, 记为 $A \cup B$, 即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

(2) 由 A 与 B 的公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交集, 记为 $A \cap B$, 即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

(3) 由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的差集, 记为 $A \setminus B$, 即 $A \setminus B = \{x | x \in A, \text{ 但 } x \notin B\}$ 。

集合的运算有以下运算律:

交换律 $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$ 。

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)。$

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$
 $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C);$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)。$

下面证明分配律中的第一式,另两式留作习题。

先证 $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

设 $x \in A \cap (B \cup C)$, 则 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$, 即 $x \in A$, 且 $x \in B$ 或 $x \in C$ 。当 $x \in A$ 且 $x \in B$ 时, $x \in A \cap B$; 当 $x \in A$ 且 $x \in C$ 时, $x \in A \cap C$, 故有 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

再证 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$;

设 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, 则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$ 。当 $x \in A \cap B$ 时, $x \in A$ 且 $x \in B$; 当 $x \in A \cap C$ 时, $x \in A$ 且 $x \in C$ 。无论哪一种情形均有 $x \in A$, 且有 $x \in B$ 或 $x \in C$, 故有 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$, 即 $x \in A \cap (B \cup C)$ 。

1.1.2 数域

定义 1 设 P 是数集, $P \subset K$, $0 \in P$, $1 \in P$, 若 P 对于加法、减法、乘法和除法满足运算的封闭性, 即对任何 $a, b \in P$ 均有 $a+b \in P$, $a-b \in P$, $ab \in P$ 和 $b \neq 0$ 时有 $\frac{a}{b} \in P$, 则称 P 是一个数域。

显然, 集合 Q, R, K 都构成数域, 分别称为有理数域、实数域和复数域。

定理 1 有理数域是最小的数域。确切地说任何数域都包含有理数域, 即若 P 是数域, 则 $P \supset Q$ 。

证明 首先 $0, 1 \in P$ 。由 P 关于加法的封闭性知, 对任何自然数 $n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ 个 } 1 \text{ 相加}} \in P$, 所以 $N \subset P$, 又有减法的封闭性知 $-n = 0$

n 个 1 相加

$-n \in P$, 从而 $Z \subset P$, 再由除法的封闭性, 对任何 $m, n \in Z$ 和 $m \neq 0$ 有 $\frac{n}{m} \in P$, 所以 $Q \subset P$ 。

利用以下定理, 可简化数集是否构成数域的判定。

定理 2 若数集 P 中至少含有两个数, 而且 P 关于减法和除法满足封闭性, 则 P 为数域。

证明 由 P 中至少含有两个数, 可设 $a \in P$, 而且 $a \neq 0$, 于是 $0 = a - a \in P$, $1 = \frac{a}{a} \in P$ 。下面再证 P 关于加法和乘法有封闭性,

事实上, 设 $x, y \in P$, 由减法的封闭性 $-y = 0 - y \in P$, 从而 $x + y = x - (-y) \in P$. 若 $y \neq 0$, 由 $1 \in P$ 及 P 满足除法封闭性得 $\frac{1}{y} \in P$, 从而 $xy = x / \frac{1}{y} \in P$.

例 1 证明 $Q(i) = \{a + bi | a, b \in Q\}$ 是数域 (称为 Gauss 数域, 其中 i 是虚数单位 $i = \sqrt{-1}$).

证明 显然, $0, 1 \in Q(i)$. 任取 $x, y \in Q(i)$, 设 $x = a + bi, y = c + di$, 则 $x - y = (a - c) + (b - d)i \in Q(i)$; 若 $y \neq 0$, 则因易知 $c - di \neq 0$, 从而

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \in Q(i) \end{aligned}$$

1.2 排列、逆序与对换

为定义 n 阶行列式作准备, 先给出排列、逆序与对换的概念和性质.

1.2.1 排列与逆序

定义 2 n 个数 $1, 2, \dots, n$ 按一定的顺序排成一行 $j_1, j_2, \dots, j_n$, 构成一个有序数组称为是一个 n 级排列.

例如, $1, 2, 3$ 三个数可构成六个 3 级排列: $123, 132, 213, 231, 312, 321$.

一般地, n 个数的一切不同的排列个数为 $n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$. 称其中按由小到大的顺序构成的排列 $12\cdots n$ 为自然排列.

定义 3 在一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中, 如果有一对数的前后位置与前面小后大的顺序相反, 即前面之数大于后面之数, 则称这对数构成了排列的一个逆序. 一个排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中所有逆序的总个数称为该排列的逆序数, 记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$. 逆序数为偶数的排列称为偶