GAODENG DAISHU YU KONGJIAN JIEXI JIHE

高等代数与空间解析几何

张建初·主编

ZHANGJIANCHU ZHUBIAN

HUADONG LIGONG DAXUE CHUBANSHE

华东理工大学出版社

高等代数与空间解析几何

张建初　主编

华 东 理 工 大 学 出 版 社

(沪)新登字 208 号

高等代数与空间解析几何
Gaodeng Daishu yu Kongjian jiexi jihe
张建初　主编
华东理工大学出版社出版
(上海市梅陇路 130 号)
新华书店上海发行所发行
江苏句容排印厂排版
上海长鹰印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 15　　字数 399 千字
1993 年 12 月第 1 版　　1993 年 12 月第 1 次印刷
印数 1-2000 册

ISBN 7-5628-0419-2/O·35　　　定价：8.40 元

内 容 提 要

本书是将《高等代数》与《空间解析几何》的内容融会在一起而编写的教材。其中高等代数的内容以线性代数为主体，包括行列式、矩阵、线性方程组、向量空间和线性空间、线性变换、二次型、内积空间、特征问题、矩阵的标准形、矩阵分析等；空间解析几何的内容以欧氏几何和仿射几何为主，包括直线和平面、常见的曲面、二次曲面的仿射理论和度量理论等。编者将“代数”与“几何”内容穿插论述、有机结合，突出了线性代数与解析几何的内在联系，起到相得益彰作用。

本书在深度和广度上符合应用数学专业《高等代数》、《空间解析几何》的教学基本要求，可供数学、应用数学、计算数学等专业作教材，也可供工科硕士研究生作为《矩阵理论及其应用》课程的教学参考书。

前　言

《高等代数》、《空间解析几何》是数学系的两门主要专业基础课。高等代数，尤其是作为其中主体内容的线性代数，与解析几何之间相互依赖、紧密联系。线性代数起源于解析几何，它作为解析几何的主要工具又推动几何的发展。解析几何本质上可看作二维、三维线性代数，它给线性代数提供各种几何背景和几何解释，使线性代数内容更为充实。因此，改变这两门课程分别设置的传统做法，将它们融合成一门课程，这对于加强课程之间的内在联系是十分有益的。它有利于课程内容的相互衔接，避免因分别设课而造成的不必要的重复，从而减少授课的学时数。它既可克服高等代数因抽象难学，教学效果往往不甚理想的弊端，又可将解析几何从“观点”上加以提高，起到相得益彰的作用。

出于上述考虑，编者在应用数学专业进行了多年将高等代数与空间解析几何“结合”教学的改革实践，并在此基础上编写成这本教材。本书通过解析几何与线性代数内容间的一些“结合点”将两者融合在一起，并力图使全书结构紧密，前后连贯。读者阅读时充分注意本书中的“结合点”，对于掌握解析几何与线性代数内容的关联将是有效的。本书有以下主要的“结合点”：

——从三维向量空间、几何空间到 n 维向量空间、线性空间、欧氏空间的抽象；

——平面、直线与线性方程组、矩阵之间的相互解释和依赖；

——仿射坐标变换、仿射变换与满秩线性变换的对应；直角坐标变换、等距变换（刚体运动、镜面反射）与正交变换的对应；

——仿射坐标系或直角坐标系下二次曲面方程化为标准方程与用满秩线性变换或正交变换化二次型为标准形的联系。

本书既具有将代数与几何融会结合的特色，又按数学、应用数学等专业《高等代数》、《空间解析几何》的教学基本要求编写，因此可作为数学类专业的教材或教学参考书。本书也可供非数学类专

业优秀生学习《线性代数》、《解析几何》和工科硕士研究生学习《矩阵及其应用》时使用或参考。

本书由华东理工大学张建初主编。上海黄浦区业余大学陈康群担任了第一至第四章的编写。

本书在编写过程中得到华中理工大学王心介副教授和华东理工大学俞文魮、谢国瑞、蒋司勋、徐伟成、黄德成、夏宁茂、孙龙祥、陈邦海、郑汶玉、崔卫旗、邵晓华、曹宇烨等教授和先生们的指导和关心，尤其是谢国瑞教授和蒋司勋副教授提议和鼓励我将代数与几何进行结合教学的尝试。谢国瑞教授审阅了全书，王心介副教授对本书曾提出了许多建设性的意见。对此，编者一并表示衷心的感谢和诚挚的敬意，编者还要感谢华东理工大学教材建设委员会、课程建设委员会、教务处、研究生处、数学系、应用数学研究所以及上海黄浦区业余大学和上海铁路局南昌分局研究所等单位和部门在本书出版过程中所给予的大力帮助。

由于本书编写是一种改革的尝试，加之编者水平所限，难免出现这样或那样的不妥，甚至错误，敬请同行专家和广大读者给予批评和指正。

编　者

目　　录

1 行 列 式

1.1 集合与数域

1.1.1 集合

集合是数学中最基本的概念之一。我们无法对它下一个确切的定义，只能给予某种描述。简单地说，一些具有一定特性的事物看作一个整体就是一个集合；而构成集合的每一个事物称为该集合的元素。例如，你们班级的全体学生构成了一个集合，而你们中的每一个学生就是该集合中的元素。

数学上，集合常用大写字母 $A, B, \cdots, M, N, \cdots, X, \cdots$，表示；集合中的元素用小写字母 a, $b, \cdots, x$, $y, \cdots$, α, $\beta, \cdots$，来表示。若 a 是集合M 的元素就记为 $a \in M$，称为 a 属于 M；若 a 不是集合 M 的元素就记为 $a \overline{\in} M$(或记为 $a \in M$)，称为 a 不属于 M。

由数构成的集合称为数集；由点构成的集合称为点集。数集是数学中最常见的集合，其中一些用专用记号表示，我们记 N为自然数集；Z 为整数集；Q 为有理数集；R 为实数集；K 为复数集。

元素个数有限的集合称为有限集；元素个数无限的集合称为无限集。不含任何元素的集合称为空集，用$\varnothing$表示。引进空集的概念并非是没有意义的，而是后面进行集合的运算所必需的。

数学上表达一个集合有哪些元素构成通常有两种办法：一种是列举法，即把集合中的元素一个个写在花括号内。必要时对有规律的元素可使用省略记号。例如 $A=\{0,1\}$表示仅有 0 和 1 两个数构成的集合。而 $N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$。另一种是特性表示法，通常在花括号中使用一竖线，并在竖线的前面写上代表性的元素，而后面写上作为该集合的元素应满足的特性。例如，

$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$表示区间$[-1,1]$内所有点构成的集合；

$M=\{(x,\ y)|x^2+y^2=r^2\}$表示以原点为圆心，以 r 为半径的圆周上全体点构成的集合；

$X=\{ax^2+bx+c|a,\ b,\ c\in R\}$表示全体次 数不超过 2 的实系数多项式构成的集合。

如果集合 A 的元素全是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$，读成 A 包含于 B，或 B 包含 A。显然，$N\subset Z\subset Q\subset R\subset K$. 我们规定$\varnothing$是任何集合的子集。

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，即 A 与 B 含有完全相同的元素，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。例如

$$\{x|x^2=1\}=\{-1,1\};$$

$$\{x|x^2+1=0,\ x\in R\}=\varnothing。$$

若 $A\subset A$，但 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集。

根据子集的定义，如要证明 $A\subset B$，则一般应“任取 $x\in A\Longrightarrow$（该记号表示推出）$x\in B$”。而要证明 $A=B$，则应证明 $A\subset B$ 及$B\subset A$ 两步。

我们给出集合以下几种运算的定义：

(1) 由 A 与 B 的所有元素合在一起构成的集合称 为 A 与 B 的并集，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。

(2) 由 A 与 B 的公共元素构成的集合称为 A 与 B 的 交 集，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

(3) 由属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的差集，记为 $A\backslash B$，即$A\backslash B=\{x|x\in A,\ $但 $x\overline{\in} B\}$。

集合的运算有以下运算律：

交换律 $A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

$A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$；

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

下面证明分配律中的第一式，另两式留作习题。

先证 $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$：

设 $x\in A\cap(B\cup C)$，则 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，即 $x\in A$，且$x\in B$或 $x\in C$。当 $x\in A$ 且 $x\in B$ 时，$x\in A\cap B$；当 $x\in A$ 且 $x\in C$时，$x\in A\cap C$，故有 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

再证 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$：

设 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$。当 $x\in A\cap B$ 时，$x\in A$ 且 $x\in B$；当 $x\in A\cap C$ 时，$x\in A$ 且 $x\in C$。无论哪一情形均有 $x\in A$，且有 $x\in B$ 或 $x\in C$，故有 $x\in A$ 且$x\in B\cup C$，即 $x\in A\cap(B\cup C)$。

1.1.2 数域

定义 1 设 P 是数集，$P\subset K$，$0\in P$，$1\in P$，若 P 对于加法、减法、乘法和除法满足运算的封闭性，即对任何 a，$b\in P$ 均有$a+b\in P$，$a-b\in P$，$ab\in P$ 和 $b\neq0$ 时有$\dfrac{a}{b}\in P$，则称 P 是一个数域。

显然，集合 Q、R、K 都构成数域，分别称为有理数域、实数域和复数域。

定理 1 有理数域是最小的数域。确切地说任何数域都包含有理数域，即若 P 是数域，则 $P\supset Q$。

证明 首先$0,1\in P$。由 P 关于加法的封闭性知，对任何自然数 $n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{个}1\text{相加}}\in P$，所以 $N\subset P$，又有减法的封闭性知 $-n=0-n\in P$，从而 $Z\subset P$，再由除法的封闭性，对任何 m，$n\in Z$ 和 $m\neq0$ 有$\dfrac{n}{m}\in P$，所以 $Q\subset P$。

利用以下定理，可简化数集是否构成数域的判定。

定理 2 若数集 P 中至少含有两个数，而且 P 关于减法和除法满足封闭性，则 P 为数域。

证明 由 P 中至少含有两个数，可设 $a\in P$，而且 $a\neq0$，于是 $0=a-a\in P$，$1=\dfrac{a}{a}\in P$。下面再证 P 关于加法和乘法有封闭性：

事实上，设 $x, y\in P$，由减法的封闭性 $-y=0-y\in P$，从而 $x+y=x-(-y)\in P$。若 $y\neq 0$，由 $1\in P$ 及 P 满足除法封闭性得 $\frac{1}{y}\in P$，从而 $xy=x/\frac{1}{y}\in P$。

例 1 证明 $Q(i)=\{a+bi|a, b\in Q\}$ 是数域（称为 Gauss 数域，其中 i 是虚数单位 $i=\sqrt{-1}$）。

证明 显然，$0, 1\in Q(i)$。任取 $x, y\in Q(i)$，设 $x=a+bi, y=c+di$，则 $x-y=(a-c)+(b-d)i\in Q(i)$；若 $y\neq 0$，则因易知 $c-di\neq 0$，从而

$$\frac{x}{y}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\in Q(i)$$

1.2 排列、逆序与对换

为定义 n 阶行列式作准备，先给出排列、逆序与对换的概念和性质。

1.2.1 排列与逆序

定义 2 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 按一定的顺序排成一列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$，构成一个有序数组称为是一个 n 级排列。

例如，1，2，3 三个数可构成六个 3 级排列：123，132，213，231，312，321。

一般地，n 个数的一切不同的排列个数为 $n!=n(n-1)\cdots 2\cdot 1$。称其中按由小到大的顺序构成的排列 $12\cdots n$ 为自然排列。

定义 3 在一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中，如果有一对数的前后位置与前小后大的顺序相反，即前面之数大于后面之数，则称这对数构成了排列的一个逆序。一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中所有逆序的总个数称为该排列的逆序数，记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$。逆序数为偶数的排列称为偶