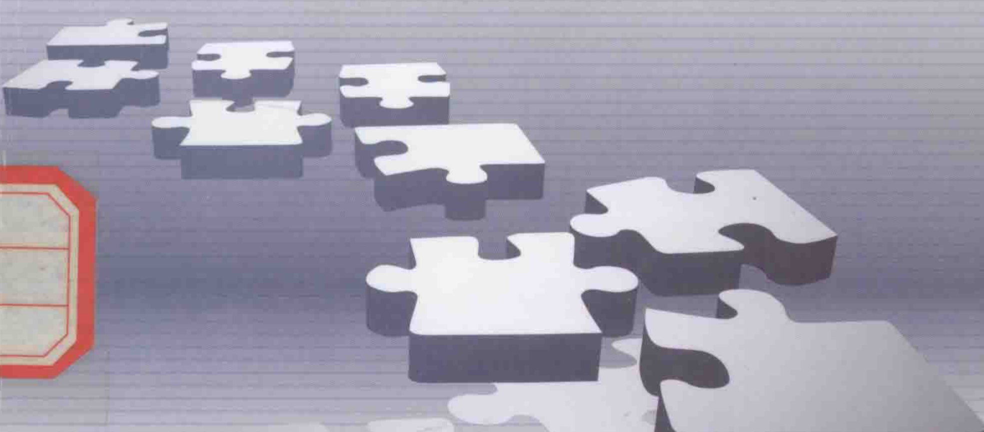
XIANXING DAISHU JIAOCHENG

线性代数教程

周学松 裘渔洋 主编



浙江工商大学出版社
Zhejiang Gongshang University Press

XIANXING DAISHU JIAOCHENG

线性代数教程

周学松　裘渔洋 主编

浙江工商大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数教程/周学松,裘渔洋主编.—杭州:浙江工商大学出版社,2010.8

ISBN 978-7-81140-184-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①周… ②裘… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 151375 号

线性代数教程

周学松　裘渔洋　主编

责任编辑　翁爱湘
责任校对　张振华
封面设计　刘　韵
责任印制　汪　俊
出版发行　浙江工商大学出版社
(杭州市教工路 198 号　邮政编码 310012)
(Email:zjgsupress@163.com)
(网址:http://www.zjgsupress.com)
电话:0571-88904980,88831806(传真)
排　　版　杭州兴邦电子印务有限公司
印　　刷　杭州杭新印务有限公司
开　　本　880mm×1230mm　1/32
印　　张　10.5
字　　数　292 千字
版 印 次　2010 年 8 月第 1 版　2010 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-81140-184-4
定　　价　31.00 元

前　言

线性代数是理工科各专业的一门重要基础课程，它的许多知识渗透在多门后继课程中。通过线性代数课程的学习，不仅为后继专业课的学习打下必要的数学基础，而且还能促进学生的抽象思维和推理能力的发展。

本教材是在我们多年教学实践的基础上并参照教育部关于非数学专业（工学）硕士研究生考试数学（一）和数学（二）对线性代数部分的基本要求编写的。全书共分 5 章，第一章介绍了行列式的概念、性质、特殊的解法和简单的应用；第二章介绍了矩阵的概念、特殊矩阵、逆阵、矩阵的秩和分块矩阵；第三章介绍了向量、相关性和线性方程组解的结构；第四章介绍了特征值和特征向量、矩阵的对角化；第五章介绍了二次型、标准化、正定型. 本书以矩阵为工具，彻底地解决了线性方程组解的问题，再利用行列式和方程组的知识解决了矩阵对角化和二次型标准化的问题。

在内容的编写上，我们力求做到科学性和通俗性相结合，由浅入深，循序渐进。读者只要有高中数学的基础知识就能顺利阅读本书。根据我们的教学经验，讲授完本教材约需 50 课时，如果课时少，可按实际情况和要求取舍内容。

本书由浙江工商大学统计与数学学院组织编写，大纲和体系由集体讨论而定。第一章及习题一解答由周学松执笔；第二章及习题

二解答由王海敏执笔；第三章及习题三解答由裘渔洋执笔。第四、五章及习题四和习题五由袁中扬执笔；全书最后由周学松、裘渔洋统稿定稿。

本书编写过程中参考了大量的国内外教材；浙江工商大学出版社对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助，尤其是翁爱湘老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血；浙江工商大学统计与数学学院自始至终对本书的出版给予了大力支持，在此一并致谢！

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，教材中一定存在不妥之处，恳请专家、同行、读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2010 年 6 月于浙江工商大学

目 录
Contents

第一章 行列式

行列式是线性代数的一个基本工具，许多问题的求解需要用到它．但是，由于它是从高斯消元法中经过仔细探索其运算规律并高度抽象得到的，因此，对它的概念的理解也是有一定难度的．本章通过排列的逆序数揭示二、三阶行列式定义的共性，从而得到了 n 阶行列式的定义．同时也介绍了它的性质，并给出了它的简单应用．

§1.1 排列的逆序数

1.1.1 二、三阶行列式

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases},$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，由消元法得到

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\tag{1-1}$$

如果令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},\tag{1-2}$$

则式(1-1)可更方便地记为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.\tag{1-3}$$

显然，式(1－3)比式(1－1)要容易.我们称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$为一个二阶行列式，它是一个数，由式(1－2)确定.

同样，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-4}$$

用消元法求解时，解x_1,x_2,x_3的表达式中含有

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

令

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}, \tag{1-5}$$

并称$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$为一个三阶行列式，如果它不为零，则式(1－4)的解可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \tag{1-6}$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

1.1.2 排列的逆序数

由二、三阶行列式的定义式(1-2)和式(1-5)不难发现:(1) 每项恰好是不同行不同列的数的乘积;(2) 每项前的符号有正负之分;(3) 二阶行列式有 2! 项,三阶为 3! 项.为了将其推广到 n 阶行列式,我们引入逆序数.

定义 1.1 设 i,j 是两个正整数,当 $i<j$ 时,称排列 ji 是一个逆序.

定义 1.2 设 $\pi=i_1i_2\cdots i_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,对任意的 $j\in\{2,3,\cdots,n\}$,称 $i_1i_j,i_2i_j,\cdots,i_{j-1}i_j$ 中逆序的个数为数 i_j 在排列 π 中的逆序数,记为 $N(i_j)$.

我们约定 $j=1,N(i_1)=0$.

例 1 已知七个数:$1,2,\cdots,7$ 的一个排列 $\pi=3265714$,试求:$N(4)$和 $N(5)$.

解 因为 34,24,64,54,74,14 中有 3 个逆序:64,54,74,所以 $N(4)=3$.同理得 $N(5)=1$.

定义 1.3 设 $\pi=i_1i_2\cdots i_n$ 是数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,称数 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 的逆序数之和为排列 π 的逆序数,记为 $N(\pi)$,即 $N(i_1i_2\cdots i_n)=\sum\limits_{j=1}^{n}N(i_j)$.

例 2 已知七个数:$1,2,\cdots,7$ 的一个排列 $\pi=3415762$,试求:$N(\pi)$.

解
$$\begin{aligned}N(\pi)&=N(3)+N(4)+N(1)+N(5)+N(7)+N(6)+N(2)\\&=0+0+2+0+0+1+5=8.\end{aligned}$$

定理 1.1 给定 $1,2,\cdots,n$ 的两个排列:
$$\pi=i_1i_2\cdots i_{j-1}i_ji_{j+1}\cdots i_n \text{ 和 } \pi'=i_1i_2\cdots i_{j-1}i_{j+1}i_j\cdots i_n,$$
则 $N(\pi)=N(\pi')\pm1$.

证 π'是 π 经过交换 i_j 与 i_{j+1} 得到的(其他的数保持原来的位置).

(1) 当 $i_j<i_{j+1}$时,$N(\pi)=N(\pi')-1$;

(2) 当 $i_{j+1}<i_j$ 时，$N(\pi)=N(\pi')+1$，

由(1)(2)得证.

借助于逆序数，式(1-2)和式(1-5)可以重新写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =(-1)^{N(12)+N(12)}a_{11}a_{22}+(-1)^{N(12)+N(21)}a_{12}a_{21}$$

$$=(-1)^{N(12)}a_{11}a_{22}+(-1)^{N(21)}a_{12}a_{21}$$

$$=(-1)^{N(12)}a_{11}a_{22}+(-1)^{N(21)}a_{21}a_{12}, \tag{1-7}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =(-1)^{N(123)+N(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{N(123)+N(231)}a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+(-1)^{N(123)+N(312)}a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^{N(123)+N(321)}a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$+(-1)^{N(123)+N(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{N(123)+N(132)}a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=(-1)^{N(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{N(231)}a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+(-1)^{N(312)}a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^{N(321)}a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$+(-1)^{N(213)}a_{12}a_{21}a_{33}+(-1)^{N(132)}a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$=(-1)^{N(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{N(312)}a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$+(-1)^{N(231)}a_{21}a_{32}a_{13}+(-1)^{N(321)}a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$+(-1)^{N(213)}a_{21}a_{12}a_{33}+(-1)^{N(132)}a_{11}a_{32}a_{23}. \tag{1-8}$$

§1.2 n 阶行列式

1.2.1 n 阶行列式的定义

二、三阶行列式的逆序数定义式(1-7)和式(1-8)具有普遍性，它可以进一步推广.

定义 1.4 给定 n^2 个数：

$$a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n};a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n};\cdots;a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn},$$

称式

$$\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

为一个 n 阶行列式，记为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1-9}$$

其中 a_{ij} 为行列式中第 i 行第 j 列处的元素($i,j=1,2,\cdots,n$)，下标 i 称为元素 a_{ij} 的行标，下标 j 称为元素 a_{ij} 的列标，n 表示行列式的阶数，$\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和，即

$$D_n=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \tag{1-10}$$

同时

$$D_n=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-11}$$

$$=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{1-12}$$

例 1 计算 $D_3=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 1-x & 3 \\ 0 & 0 & 1+x \end{vmatrix}$.

解 利用式(1-11)得

$$D_3=(-1)^{N(123)}a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^{N(132)}a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^{N(213)}a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$+(-1)^{N(231)}a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^{N(321)}a_{13}a_{22}a_{31}+(-1)^{N(312)}a_{13}a_{21}a_{32},$$

而

$$a_{11}=x,a_{12}=1,a_{13}=2,\quad a_{21}=0,a_{22}=1-x,a_{23}=3,$$
$$a_{31}=a_{32}=0,a_{33}=1+x,$$

所以

$$D_3=a_{11}a_{22}a_{33}=x(1-x^2).$$

例 1 的结论可以推广到更一般的上三角行列式(或者下三角行列式)，即我们有下面的定理.

定理 1.2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 2 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$,求 x^3 的系数.

解 含 x^3 的项有两个:

$$\begin{aligned} &(-1)^{N(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{N(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} \\ =&x^3-2x^3=-x^3, \end{aligned}$$

所以 x^3 的系数为 -1.

定理 1.3 行列式(1-9)中某行(或列)全为 0,则该行列式为零.

证 设第 i 行全为 0,则式(1-11)中每一项有一零因子. 于是,行列式为 0,得证. 同理可证列对应的情形.

定义 1.5 给定 n 阶行列式 D_n,如果令

$$D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则称 D_n^{T} 为 D_n 的转置.

于是有

定理 1.4 $D_n^{\mathrm{T}}=D_n$.

证 将 D_n^{T} 中元素用新符号 b_{ij} ($b_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$) 重新写出,并由式(1-11)知

$$D_n=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$

$$=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}b_{j_11}b_{j_22}\cdots b_{j_nn},$$

由(1-12)式得 $D_n^{\mathrm{T}}=D_n$.

§1.3 行列式的性质

利用式(1-10)和式(1-12)计算行列式,需要处理 $n!$ 个乘积项并确定其对应的逆序数,这是困难的.为简化计算,我们考虑采用行列式性质.由定理 1.4 可知,行列式行具有的性质,对列也同样成立,因此下面只考虑行的情形.

性质 1 行列式的任一行是两个代数式的和,则该行列式可以写为两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 2 行列式中任一行的公因子 k 可提出来,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 和性质 2 的证明是容易的,我们留作练习.

性质 3 设 D_n 是 n 阶行列式,T_n 是由 D_n 交换任意两行所得的 n 阶行列式,则

$$T_n = -D_n.$$

证 因为 $D_n = \sum\limits_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n}$,设 T_n 是由 D_n 交换第 s 行与第 t 行得到的行列式,所以

$$T_n = \sum_{(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n}.$$

显然,a_{tj_t} 向右经过 $t-s+1$ 次与相邻元素交换,a_{sj_s} 向左经过 $t-s$ 次与相邻元素交换,有

$$a_{1j_1} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} = a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n}.$$

另外,因为相邻元素共交换了 $2(t-s)+1$ 次,由定理 1.1 得

$$N(j_1 \cdots j_t \cdots j_s \cdots j_n) = N(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n) \pm 1,$$

于是有

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n) \pm 1} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} (-1)^{N(j_1 \cdots j_s \cdots j_t \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n} \\ &= -D_n. \end{aligned}$$

例 1 计算 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

解 第 n 行分别与第 $n-1, n-2, \cdots, 2, 1$ 行经过 $n-1$ 次行交

换得

$$D_n=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-2} & & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

再将新的第 n 行经过 $n-2$ 次行交换,得

$$D_n=(-1)^{n-1}(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

如此进行下去,可得

$$D_n=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{由定理 1.2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

由性质 3,则下面的推论成立.

推论 如果行列式有两行相等,则该行列式为零.

由性质 1 和性质 2 和上述推论,立即得到:

性质 4 行列式的任一行的 k 倍加到另一行上去,其结果不变.

性质 4 可简化行列式的计算.

例 2 计算 $D_3=\begin{vmatrix}2&-3&5\\1&4&7\\3&2&-5\end{vmatrix}$.

解 $$D_3\xlongequal{r_1\to r_2}-\begin{vmatrix}1&4&7\\2&-3&5\\3&2&-5\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}-\begin{vmatrix}1&4&7\\0&-11&-9\\0&-10&-26\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_3}-\begin{vmatrix}1&4&7\\0&-1&17\\0&-10&-26\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-10r_2}-\begin{vmatrix}1&4&7\\0&-1&17\\0&0&-196\end{vmatrix}$$

$=-196$.

注 r 表示行,c 表示列,$r_1\leftrightarrow r_2$ 表示第 1 行与第 2 行交换,c_2-4c_1 表示第 1 列的(−4)倍加到第 2 列,….

下面我们考虑行列式按照某行展开,为此需要引入下列定义.

定义 1.6 给定 n 阶行列式 D_n,称

$$M_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,j-1}&a_{i-1,j+1}&\cdots&a_{i-1,n}\\a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,j-1}&a_{i+1,j+1}&\cdots&a_{i+1,n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

为元素 a_{ij} 的余子式;

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

为 a_{ij} 的代数余子式.

于是有

引理 给定 n 阶行列式