

国家“十一五”重点图书

量子物理新进展系列

一维波动力学新论

曹庄琪 殷 澄 著



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

量子物理新进展系列

上海交通大学学术出版基金资助项目

一维波动力学新论

曹庄琪 殷 澄 著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书用经典的电磁场理论诠释量子力学,把光学中常用的介质分层的方法和转移矩阵移植到薛定谔方程的研究中,提出子波作用量这一概念,完善了近一个世纪前由波尔-索米非提出的量子化条件,由此得到了一系列新的结果。本书内容包括量子力学与光学的相似性、分析转移矩阵方法、一维任意形状势阱、势垒贯穿、精确量子化条件、子波和关于子波的补充等。

本书可供物理研究人员,高校物理、光学和信息专业的师生阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

一维波动力学新论/曹庄琪,殷澄著. —上海:上海交通大学出版社,2012

(量子物理新进展)

ISBN 978-7-313-07412-6

I. 一... II. ①曹... ②殷... III. 量子力学—波动力学—研究 IV. O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 109934 号

一维波动力学新论

曹庄琪 殷 澄 著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:韩建民

浙江云广印业有限公司 印刷 全国新华书店经销

开本:850mm×1168mm 1/32 印张:6.875 字数:177 千字

2012 年 2 月第 1 版 2012 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-313-07412-6/O 定价:45.00 元

版权所有 侵权必究

告读者:如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系
联系电话:0573-86577317

前 言

1900 年是新世纪的开端,也是科学史上一个新的开端。这一年,普朗克吹响了向经典物理挑战的号角,提出了能量量子化假设。这一划时代的发现,打破了一切自然过程都是连续的经典定论,第一次向人们揭示了自然的非连续本性。普朗克的发现使神秘的量子从此出现在人们的面前,它让物理学家们既兴奋、又烦恼,直到今天。

从量子的提出至今,已超过一个世纪的时间,一百多年来,人们把量子力学和相对论看作是 20 世纪物理学的两大支柱。量子力学理论和描述微观世界的实验惊人地符合,常使人们对量子力学的正确性深信不疑。然而,量子力学的成功,仍掩盖不了量子力学解释体系的不足以及与相对论深层次的尖锐矛盾。关于量子力学数学形式的物理诠释——波函数是几率波,关于微观客体的动量和位置的测不准关系和互补性原理以及关于量子测量的波函数坍缩假设、隐变量和多宇宙解释等,把数学、物理、哲学思辨混合在一起,将人们带进了一个神秘的量子迷雾。百年来,哪怕是最伟大的爱因斯坦也被卷进这团量子迷雾中而难以解脱。

我是量子力学领域的偶然闯入者,当然不敢冒然深入难以捉摸的量子迷雾,但我在多年的导波光学研究中,发现在经典的电磁场理论和量子力学之间并不是不可逾越的。量子力学可在导波光学中找到一系列大尺度的对照物(larger-scale counterparts)。例如:量子力学中的薛定谔(Schrödinger)方程对应光学中的标量波动方程;波函数对应于电磁场分布;势场对应折射率分布;能级则对应导模的传播常数;而量子数对应

模阶数等。本书就是利用这些经典的对照物,把导波光学中得到的结果和研究方法(薄膜分割和分析转移矩阵)移植到量子力学之中,得到了一些经得起检验的新结果。例如:精确的量子化条件、转折点处的反射相移;精确的隧穿系数;WKB近似理论和超对称 WKB 方法的偶然事件的解释;量子反射即子波反射以及广义的透射和反射时间等。这些结果都是由于子波的作用而引起的,而子波作用在量子力学中往往被忽视,从而引起一系列的矛盾。另外,我对不连续运动、测不准原理等也有一些不成熟的想法,在此提出来,希望能起到抛砖引玉的作用。所谓“一维波动力学新论”,并非有新的理论,而仅仅是得到了一些新的结果而已。以上内容构成了这本薄薄的小册子。当然,这些研究都是初步的,但作为一种新的尝试,若能引起研究人员的注意,起到抛砖引玉的作用,就是值得欣慰的。书中的不足之处,衷心地欢迎大家批评指正。

在本书编写过程中,我的博士生何英、欧永成、梁铮、许田都作出了自己的贡献,特别是殷澄同学,在量子反射、反射时间和超对称 WKB 方法等诸多章节中都有他的工作,在此向他们表示衷心的感谢。

曹庄琪

2012 年 1 月

目 录

第 1 章 量子力学与光学的相似性	1
1.1 波动方程	2
1.1.1 一维标量波动方程	2
1.1.2 一维定态 Schrödinger 方程	4
1.2 光波导与势阱	5
1.2.1 非对称光波导	6
1.2.2 非对称方势阱	7
1.3 隧道效应	9
1.3.1 光的耦合结构	9
1.3.2 势垒贯穿	10
1.4 平方律分布	12
1.4.1 折射率平方律分布的波导	12
1.4.2 线性谐振子	14
参考文献	15
第 2 章 分析转移矩阵方法	17
2.1 转移矩阵及其基本性质	17
2.1.1 转移矩阵的建立	18
2.1.2 转移矩阵的基本性质	20
2.2 矩阵方法求解一维势场问题的例子	25
2.2.1 非对称方势阱	25
2.2.2 方势垒的隧穿系数	26
参考文献	27

第 3 章 半经典近似理论	28
3.1 WKB 波函数	29
3.1.1 WKB 波函数的数学推导	29
3.1.2 Bermmer 的理论	31
3.2 经典极限	33
3.3 半经典近似理论的量子化条件	37
3.3.1 WKB 连接公式	37
3.3.2 WKB 近似理论的量子化条件	39
3.4 隧穿效应	44
3.5 在势函数的阈值附近	48
3.5.1 散射长度	49
3.5.2 量子化条件与能级密度	54
3.6 量子反射与量子反射时间	59
3.6.1 量子反射理论	59
3.6.2 量子反射时间	64
3.7 半经典近似理论小结	68
参考文献	71
第 4 章 一维任意形状势阱	75
4.1 双层方势阱	76
4.1.1 传输型能量本征值方程	76
4.1.2 位相型能量本征值方程	78
4.2 一维任意势阱	79
4.2.1 一维任意势阱的分析转移矩阵(ATM)	80
4.2.2 转折点处的相移	84
4.2.3 子波的位相贡献	86
4.2.4 位相积分形式的能量本征值方程	87
4.2.5 波函数的计算	89
4.2.6 关于 WKB 近似理论的偶然事件	90

4.3	一维任意双势阱的能级分裂	91
4.3.1	一维方形双势阱	91
4.3.2	一维任意对称双势阱	93
4.4	ATM 能量本征值方程的应用	95
4.4.1	一维 Morse 势	95
4.4.2	Lennard-Jones 势	97
	参考文献	100
第 5 章	势垒贯穿	103
5.1	有效质量为常数的一维任意形状势垒	103
5.1.1	ATM 反射系数	104
5.1.2	$m=1$ 和 $m=2$ 的实例	108
5.1.3	起始点连续的 ATM 透射系数	110
5.2	与 WKB 近似理论的比较	111
5.2.1	有伴阱的势垒	111
5.2.2	高斯函数调制的矩形超晶格势函数	114
5.3	有效质量与位置有关的一维任意形状势垒	116
5.3.1	反射系数的推导	117
5.3.2	半导体单势垒结构	121
5.3.3	半导体双势垒结构	122
	参考文献	123
第 6 章	精确量子化条件	125
6.1	精确量子化条件	126
6.2	量子化条件应用实例	127
6.2.1	有效质量随位置改变	127
6.2.2	球形对称势	130
6.2.3	超对称量子力学中的例子	133
	参考文献	137

第 7 章 子波	139
7.1 基础概念	139
7.1.1 波矢概念的分歧	140
7.1.2 总波矢和主波波矢的数值比较	141
7.2 子波与量子反射	142
7.2.1 量子反射的研究进展	143
7.2.2 ATM 理论的解释	145
7.3 子波与一维散射过程中的时间问题	152
7.3.1 隧穿时间和 Hartman 效应	153
7.3.2 隧穿时间的相关实验	156
7.3.3 Winful 对群延迟的新诠释	159
7.3.4 广义的反射时间公式	163
7.3.5 广义的透射时间公式	170
7.3.6 子波与 Hartman 效应	173
7.4 子波与超对称量子力学	177
7.4.1 超对称量子力学简介	178
7.4.2 SWKB 近似方法	182
7.4.3 子波概念的引入	183
7.4.4 SWKB 量子化条件的解密	191
参考文献	194
 第 8 章 关于子波的补充	 198
8.1 子波的“跳跃”性	198
8.1.1 不连续运动	199
8.1.2 子波的跳跃性	202
8.2 关于测不准原理的讨论	207
参考文献	211

第 1 章 量子力学与光学的相似性

1865 年,麦克斯韦(Maxwell)推测,光是一种电磁波.这个推测于 1888 年为赫兹(Hertz)的实验所证实^[1].正当麦克斯韦的电磁场理论赢得普遍承认不久,爱因斯坦(Einstein)于 1905 年提出了光量子的概念,在此基础上进而成功地解释了光电效应现象,这说明光具有“波粒二象性”^[2].光量子论的诞生,以及随后的量子力学的建立,对物理学乃至整个自然科学都产生了极其深远的影响.然而就光学领域而言,通过将近一个世纪的演化,经典电磁场理论已经取得了全面的成功,始终占据着主导地位,而光的量子性却只能通过寥寥无几的特定光现象才能被观察到.因此虽然在表面上,物理学界普遍认可了光的波粒二象性,实际上这也仅仅是认为在与物质作用的少数几个事例中,光才显现粒子性;更普遍的情况下,光显现波动性.直至今日,光的电磁场理论以及它们对许许多多不同情况的应用,一直不断扩大,而且现在还在继续扩大,势头不减.举一个这方面很显著的例子,就是最近被广泛研究的亚波长尺度的金属特殊结构内的光学现象.金属由于其特殊的复介电系数以及在其界面可以激发表面等离子激元(Surface Plasmon Polariton)等特性,使得与金属相关的很多光学现象可以展现出很多奇异的特性,因此被有远见的科学家提议用来制作完美透镜、隐身衣等.但是,无论将金属的特殊结构尺度做得多么小,使其远远小于光的波长甚至处于纳米量级,其光场的特性都可以用经典的 Maxwell 方程组正确并且完整地描述,而无需借助量子光学.综上所述,虽然描述光的本质的波动理论和微粒理论都获得承认,但后者仅仅只有光电效应等极少的例子可作证明,而前者则有众多的例证,这种极不平衡的现象值得我们深思.

1924年,德布罗意(De Broglie)提出的实物粒子的波粒二象性,认为粒子可以用波的理论来描述.同时,在光学领域,经典的电磁场理论在尺度很小的情况下也能正确地给出结果,那么将经典电磁场理论移植到量子力学中,又如何呢?正是基于这一想法,本书尝试利用经典电磁场理论的观点来重新诠释一维量子力学(波动力学),这是贯穿全书的宗旨之一.首先本章拟从量子力学中几个典型事例出发,找出光学中相似的对照物,来论证将某些量子力学事例用经典电磁场理论描述的可能性.

1.1 波动方程

光是一种电磁波,又是一种光量子.因此,光具有“波粒二象性”,这是描述光的本质的一条基本假设.而德布罗意^[3]的逆向思维使他提出了实物粒子也具有波粒二象性.光与实物粒子都具有波粒二象性,由于这种本质上的一致,使光学与量子力学在许多方面表现出几乎相同的规律.

1.1.1 一维标量波动方程^[4]

以图 1.1 所示的一维平面薄膜波导为例,它由三种材料组成,中间是折射率为 n_1 的薄膜层,两侧是折射率分别为 n_0 和 n_2 的衬底和覆盖层.设衬底和覆盖层分别延伸到无穷远,且薄膜层的宽度远大于它的厚度.在这种假设条件下,可认为平面薄膜中的光场只在一个方向上分布,将它选为 x 方向,并设平面薄膜的几何结构和折射率分布沿 y 方向不变,即折射率分布 $n(x)$ 只是 x 的函数,相应的模场也只是坐标 x 的函数,于是有 $\partial/\partial y=0$. 设 h_1 为薄膜层的厚度,则折射率分布 $n(x)$ 可以写为

$$n(x) = \begin{cases} n_0, & -\infty < x < 0, \\ n_1, & 0 < x < h_1, \\ n_2, & h_1 < x < +\infty. \end{cases} \quad (1.1)$$

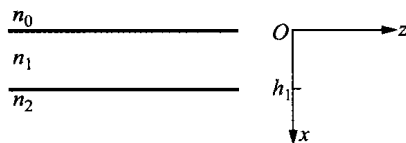


图 1.1 非对称平面薄膜波导和坐标系选择示意图

在此条件下,平面薄膜波导的麦克斯韦方程解与坐标 y 无关,并可写成如下形式:

$$\begin{cases} E(x, z, t) = E(x) \exp[i(\beta z - \omega t)], \\ H(x, z, t) = H(x) \exp[i(\beta z - \omega t)]. \end{cases} \quad (1.2)$$

式中: β 是电磁场沿 z 方向的传播常数. 式(1.2)表明,波导中的横向(x 向)电磁场以相速度 ω/β 沿薄膜的纵向(z 向)传播. 根据麦克斯韦方程并利用式(1.2),可得

$$\begin{cases} \beta E_y = -\omega \mu H_x, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = i\omega \mu H_z, \\ i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\omega \epsilon E_y. \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \beta H_y = \omega \epsilon E_x, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = -i\omega \epsilon E_z, \\ i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\omega \mu H_y. \end{cases} \quad (1.4)$$

由上述公式,可以看出麦克斯韦方程分解为两组独立的方程,其中一组方程有电磁场分量 E_y 、 H_x 和 H_z ;而另一组方程含有电磁场分量 H_y 、 E_x 和 E_z . 前者被称为 TE 波,即电场垂直于波传播方向的模式;后者称为 TM 波,即磁场垂直于波传播方向的模式. 在式(1.3)中,把第一式和第二式代入第三式中,消去 H_x 和 H_z ,可得到横向电场 E_y 所遵从的方程:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2) E_y = 0. \quad (1.5)$$

同样,利用式(1.4)可得到横向磁场 H_y 所遵从的方程:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2) H_y = 0. \quad (1.6)$$

式中: $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2\pi/\lambda$, 是光在真空中的传播常数(或称真空波数), λ 为光在真空中的波长; $j=1, 2, 3$. 式(1.5)和式(1.6)分别称为 TE 波和 TM 波的一维标量亥姆霍兹(Helmholtz)方程, 或称为一维标量波动方程, 它们适用于无源、无损耗、各向同性和非磁性的介质平面薄膜.

1.1.2 一维定态 Schrödinger 方程

1924 年, 法国物理学家德布罗意首先提出了物质波理论, 即一切微观粒子, 像光一样也都具有波粒二象性. 在这一理论的基础上, 奥地利理论物理学家薛定谔(Schrödinger)于 1926 年创立了波动力学^[5], 提出了著名的 Schrödinger 方程, 它描述了微观粒子的状态随时间变化的规律, 它在量子力学中的地位相当于经典力学中的牛顿定律, 是量子力学的基本假设之一. Schrödinger 方程仅适用于速度不太大的非相对论粒子, 其中还不包含粒子自旋的描述. 当计及相对论效应时, Schrödinger 方程由相对论量子力学方程所取代, 其中自然包含了粒子的自旋. 不管怎样, 现在 Schrödinger 方程已经成为研究原子、分子等微观粒子的有力工具, 并奠定了基本粒子相互作用的理论基础.

描述微观粒子一维运动的定态波函数为 $\psi(x)$, 质量为 m 的微观粒子在势场 $V(x)$ 中运动的不含时 Schrödinger 方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x). \quad (1.7)$$

在给定初始条件和边界条件以及波函数所满足的单值、有限、连续的条件下, 可解出波函数 $\psi(x)$, 并且确定波函数的变化规律. 方程(1.7)在数学上称为本征方程, 式中 E 为本征值, 是定态能量, $\hbar = h/2\pi$ 为普朗克(Planck)常数, $\psi(x)$ 又称为属于本征值 E 的本

征函数. 若将式(1.5)改写为如下形式:

$$\frac{d^2 E_y}{dx^2} + [(k_0^2 n_1^2 - \beta^2) - (k_0^2 n_1^2 - k_0^2 n_j^2)] E_y = 0, \quad j = 0, 1, 2 \quad (1.8)$$

而 Schrödinger 方程(1.7)可改写为

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_j) \psi = 0, \quad j = 0, 1, 2 \quad (1.9)$$

如果作以下对照:

$$\begin{cases} E \Leftrightarrow \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} (n_1^2 - \beta^2 / k_0^2), \\ \psi(x) \Leftrightarrow E_y(x), \\ V_j \Leftrightarrow \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} (n_1^2 - n_j^2). \end{cases} \quad (1.10)$$

则电磁场波动方程(1.8)与 Schrödinger 方程(1.9)完全一致. 这说明由于光与实物粒子都具有波动性, 正是这种本质上的一致, 使光学与量子力学在许多方面表现出几乎相同的规律. 值得注意的是量子力学中的势场分布与光学中的折射率分布正好相反, 即势阱对应高折射率区域, 而势垒对应低折射率区域.

1.2 光波导与势阱

光波导是一种能约束光频电磁波传输的结构, 通常由导波层和上、下包层等三种透明介质构成. 它的尺度一般在微米量级, 经典的麦克斯韦(Maxwell)方程及其相关理论可以用来完整地分析和描述光波导结构的各种特性. 而势阱是一种能约束电子或微观粒子运动的力场结构, 它的尺度与德波罗意(De Broglie)波长相当, 势阱中微观粒子的行为由量子力学描述. 光波导和势阱是两种完全不同的概念, 分别属于宏观和微观两个范畴. 两者之间究竟有何联系呢? 实际上, 从上节的分析可知, 两者满足的方程是相似的. 因而可以预测, 在宏观和微观、经典与量子理论之间, 一定存在某些相通之处. 比如, 目前在国际上研究得比较热门的对

隧穿效应中的隧穿时间量的测量,这个量子力学领域内的实验本应该在单电子穿过势垒过程中对其所耗费的时间量进行测量.事实上,由于实验的实现和对结果的诠释的困难,已报道的绝大部分实验,其实正是利用了量子力学与光学的相似性,在光学中利用全内反射等光学现象来完成的.所以将电磁场理论搬来运用到量子力学领域这一做法早已有之.

1.2.1 非对称光波导^[6]

考虑如图 1.2 所示的介质平板波导. 设 $n_1 > n_0 > n_2$, 且导波沿 z 方向传播, 传播常数为 β . 波导的厚度为 h_1 以 TE 波为例, 根据上节的分析可知, 该平板波导中 TE 导模的电磁场分量是 E_y, H_x, H_z . 对导模而言, 衬底和覆盖层中场呈指数衰减形式, 而在导波层中的场是振荡的, 是两个相反方向传播的平面波叠加的图像. 因此该平板波导三个区域中的电场分布为

$$E_y = \begin{cases} A_0 \exp(\alpha_0 x), & -\infty < x < 0, \\ A_1 \exp(i\kappa_1 x) + B_1 \exp(-i\kappa_1 x), & 0 < x < h_1, \\ A_2 \exp[-\alpha_2(x - h_1)], & h_1 < x < +\infty. \end{cases} \quad (1.11)$$

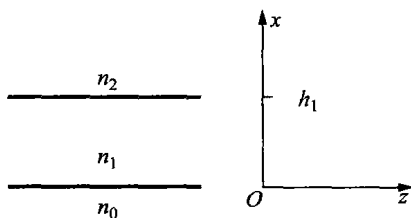


图 1.2 介质平板波导及选用的坐标

式中: A_0, A_1, A_2 和 B_1 是待定常数. 若把式(1.11)代入标量波动方程(1.5)则有

$$\begin{cases} \kappa_1 = (k_0^2 n_1^2 - \beta^2)^{1/2}, \\ \alpha_0 = (\beta^2 - k_0^2 n_0^2)^{1/2}, \\ \alpha_2 = (\beta^2 - k_0^2 n_2^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (1.12)$$

显然, κ_1 是沿 x 方向的传播常数, 而 α_0 和 α_2 分别是衬底和覆盖层中场的衰减系数. 根据 E_y 和 H_z 在边界上连续的条件, 可得模式本征方程

$$2\kappa_1 h - 2\arctan\left(\frac{\alpha_0}{\kappa_1}\right) - 2\arctan\left(\frac{\alpha_2}{\kappa_1}\right) = 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

式中: m 是包含 0 的正整数.

由于 $\kappa_1, \alpha_0, \alpha_2$ 都是 β 的函数, 因此可通过本征方程 (1.13) 求出模式本征值 β . 式 (1.13) 的意义是十分明确的. 该方程指出: 在波导这一谐振腔中, 沿 x 方向运动的波, 经历一个周期的传输产生的位相变化 ($2\kappa_1 h_1$), 加上在上下界面全反射引起的相移 $-2[\arctan(\alpha_0/\kappa_1) + \arctan(\alpha_2/\kappa_1)]$, 应等于 2π 的整数倍. 也就是说, 只有满足方程 (1.13) 的波长 (或频率) 的光, 才能构成波导中的导波光. 而整数 m (模阶数) 的出现, 表明这些波长 (或频率) 是分立的. 这里出现的整数 m 和常数 2π , 反映了波动的本质.

1.2.2 非对称方势阱^[7]

考虑如图 1.3 所示的宽度为 h_1 的一维非对称方势阱、势场分布

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & x < 0, \\ V_1, & 0 < x < h_1, \\ V_2, & x > h_1. \end{cases} \quad (1.14)$$

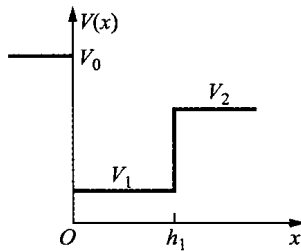


图 1.3 宽度为 h_1 的一维非对称方势阱

对束缚态, 即有 $V_1 < E < V_0 < V_2$, 则三个区域中 Schrödinger 方程的解 $\psi(x)$ 取如下形式:

$$\psi(x) = \begin{cases} A_0 \exp(\alpha_0 x), & x < 0, \\ A_1 \exp(i\kappa_1 x) + B_1 \exp(-i\kappa_1 x), & 0 < x < h_1, \\ A_2 \exp(-\alpha_2 x), & x > h_1. \end{cases} \quad (1.15)$$

式中:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar, \\ \alpha_2 = \sqrt{2m(V_2 - E)}/\hbar, \\ \kappa_1 = \sqrt{2m(E - V_1)}/\hbar. \end{cases} \quad (1.16)$$

利用波函数和波函数的导数在边界上连续的条件, 消去待定系数 A_0, A_1, B_1 和 A_2 , 可得关于能量 E 的本征值方程

$$2\kappa_1 h_1 - 2\arctan\left(\frac{\alpha_0}{\kappa_1}\right) - 2\arctan\left(\frac{\alpha_2}{\kappa_1}\right) = 2n\pi, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

式中: n 是量子数; $\kappa_1 h_1$ 表示物质波从边界 $x=0$ 传输到 $x=h_1$ 所经历的位相; $\arctan(\alpha_0/\kappa_1)$ 和 $\arctan(\alpha_2/\kappa_1)$ 分别表示物质波在边界 $x=0$ 和 $x=h_1$ 处的半全反射相移. 在已知势场分布情况下, 由式(1.16)和式(1.17)可完全确定能量本征值 E_n .

光波导模式本征方程(1.13)与电子在势阱中的能量本征值方程(1.17)完全一致. 这说明, 决定电子行为的物质波在势阱内满足的规律与导波光在波导中的行为是相同的. 我们认为两个方程所体现的是一种物理本质: 即波的干涉效应, 正是这种干涉效应使满足方程的一些频率的波得到加强, 而使其他频率的波相互抵消. 值得注意的是: 能级的不连续性被认为是量子概念的物理本质, 但从方程(1.17)可以看出, 决定能级现象的更深层次的原因是波的干涉, 量子数 n 与方程(1.13)中的模阶数 m 本质上是相同的.