TEACHING MATERIALS FOR COLLEGE STUDENTS
高等学校教材

工程力学(Ⅲ)

(运动学与动力学)

侯密山　胡玉林　编

内容简介

本书是一本介绍工程力学基本内容的的教材，分为工程力学（Ⅰ）、（Ⅱ）和（Ⅲ）三册。

工程力学（Ⅰ）主要介绍静力学的基本内容，包括力系的简化和平衡条件、刚体和刚体系统的受力分析与平衡条件应用等。工程力学（Ⅱ）主要介绍材料力学的基本内容，包括拉伸与压缩、剪切、扭转、弯曲、应力状态与强度理论、组合变形、压杆稳定和交变应力等。工程力学（Ⅲ）主要介绍运动学和动力学的基本内容，运动学包括点的基本运动和点的复合运动，刚体的平动、定轴转动和刚体的平面运动；动力学包括动力学基本概念与质点动力学、动力学普遍定理和动静法。

本教材是按照96学时的教学要求编写的，适用于理工科大专院校石油工程、地质、油气储运、冶金、材料、热加工等专业以及成人教育的相关专业，也可供有关工程技术人员参考。

本教材的（Ⅰ）、（Ⅱ）、（Ⅲ）册自成系统，除作为96学时左右的工程力学三册合用外，也可以灵活组合选用。

图书在版编目（CIP）数据

工程力学（Ⅲ）/侯密山，胡玉林编．—东营：中国石油大学出版社，2004.6（2007.7重印）

高校教材

ISBN 978-7-5636-1979-5

Ⅰ．工…　Ⅱ．侯…　Ⅲ．工程力学—高等学校—教材　Ⅳ．O241

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第026404号

书　　名：工程力学（Ⅲ）

作　　者：侯密山　胡玉林

出 版 者：中国石油大学出版社（山东 东营　邮编257061）

网　　址：http://www.uppbook.com.cn

电子信箱：shiyoujiaoyu@126.com

排 版 者：中国石油大学出版社排版中心

印 刷 者：东营市新华印刷厂

发 行 者：中国石油大学出版社（电话　0546—8392791，8395977）

开　　本：170×225　印张：13.25　字数：237千字

版　　次：2007年7月第1版第2次印刷

定　　价：19.00元

前 言

Foreword

工程力学作为机械、土木、采矿、航空航海、石油工程等领域的基础学科，在设计、制造与生产、技术创新、增产措施等方面具有重要的作用，是理工科大专院校相关专业的一门重要专业基础课程。多年来，石油大学的石油工程专业一直开设以理论力学和材料力学为主的《工程力学》课程。与此同时，随着培养计划的调整，诸如油气储运、热能工程等专业已将原来的理论力学和材料力学课程改为《工程力学》，以及安全工程、工业设计、建筑环境等新增专业也设置了《工程力学》课程。本教材就是为了适应这一需要，按照96学时的教学要求编写的。

随着科学技术的进步和高等教育的发展，作为基础学科，工程力学的体系和内容也必须相应调整，以便消除重复、加强工程概念、适当突出行业特点等，这是编写本教材的另一目的。

全书分工程力学(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)三册共二十五章。工程力学(Ⅰ)从第一章至第五章主要介绍静力学的基本内容，包括简单力系、平面一般力系、摩擦和空间任意力系；工程力学(Ⅱ)从第六章至第十六章主要介绍材料力学的基本内容，包括拉伸与压缩、剪切、扭转、弯曲、应力状态与强度理论、组合变形、压杆稳定和交变应力等。工程力学(Ⅲ)从第十七章至第二十五章主要介绍运动学和动力学的基本内容，运动学包括点的基本运动和点的复合运动，刚体的平动、定轴转动和刚体的平面运动；动力学包括动力学基本概念与质点动力学、动力学普遍定理和动静法。每章后面备有小结和习题，以便复习与练习；加注了专业术语的英文对照；书后附有全部习题答案。

本教材(共三册)为以理论力学和材料力学为主的工程力学教材(96学时)，适用于理工科大专院校石油工程、地质、油气储运、冶金、材料、热加工等专业以及成人教育的相关专业，也可供有关工程技术人员参考。另外，本教材的(Ⅰ)、(Ⅱ)两册可作为以静力学与材料力学为主的工程力学教材(80学时)；也可以单

独或灵活组合使用。

本书的静力学和动力学部分由侯密山教授编写,材料力学和运动学部分由胡玉林教授编写。全书由侯密山负责统稿和定稿。在本书的编写过程中,得到了石油大学工程力学系同仁的帮助和支持,并提出了宝贵的意见,王魁喜副教授、尹莉副教授分别对材料力学与静力学部分进行了审阅,在此表示感谢。

本书的编写参考了部分同类教材,有雷同之处请谅。

限于编者水平,疏漏与错误在所难免,殷切希望读者批评指正。

编　者

2004 年 3 月 17 日

目　录

Contents

第三篇　运　动　学

第四篇 动 力 学

第三篇　运　动　学

第十七章　点的运动

本章研究点的运动，首先提出点的运动方程、速度、加速度的矢量表示，然后推导这些运动学特征在直角坐标系和自然坐标系中的表示，建立点的位置坐标、速度、加速度三者之间的解析关系。

§17-1　引　言

在第一篇，我们研究了物体的平衡规律，现在则研究物体的运动变化规律，这是一个比平衡规律复杂得多的问题，通常分为运动学和动力学两部分来研究。

运动学研究物体运动的几何性质而不涉及引起运动的物理原因，即只从几何角度来研究物体的运动。在这里无需建立“力”和“质量”等概念，而把物体抽象为点或刚体。因此，运动学纯粹以几何公理为基础，而无需建立另外的物理定律。所谓点是指没有大小的几何点，如果物体的几何尺寸在运动过程中不起主要作用，就可以将其简化为点的运动来讨论。而刚体，则是指在任何情况下都保持其形状和大小不变的物体。

至于物体的运动与作用在物体上的力之间的联系则将在动力学中研究。从这方面来看，运动学是动力学的预备知识。但运动学本身也具有重要意义，例如：运动学为分析机构的运动规律提供必要的基础。

物体的运动表现为它在空间的位置随时间而变化，但物体的空间位置只能相对另一物体（称为参考体）来描述。固连于参考体上的一组任选的坐标系称为参考坐标系或参考系（reference coordinate system)，对于不同的参考系，同一物体可以表现出颇不相同的运动学特征。这就是运动描述的相对性。必须指出，单从运动学的角度看，一切参考系都处于平等地位。在工程实际中，经常采用固连于地球的坐标系为参考系。为了方便，把它看做是固定参考系（fixed reference system)。相对于固定参考系所得到的运动学特征之间的关系，同样适用于相对

其他参考系的运动。

在研究物体的运动时,应区别瞬时和时间间隔这两个概念。当物体运动到某一位置相对应的某一时刻,就是瞬时,时间间隔则是指两个不同瞬时之间的一段时间。

§ 17-2 点的运动方程·速度和加速度的矢量表示

在任一瞬时 t,为了确定动点 M(运动的点)在所选固定参考系中的位置,可从参考系的原点 O 引出矢量$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,如图 17-1 所示。$\boldsymbol{r}$ 称为矢径,它完全确定了动点 M 的位置。当动点 M 运动时,矢径 $\boldsymbol{r}$ 的大小和方向均随时间变化,即矢径是时间的函数:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{17-1}$$

式(17-1)就是动点的矢量形式的运动方程,它蕴含着动点的全部运动学信息。当时间 t 连续变化时,矢径端点描出的曲线(矢端曲线)就是动点的运动轨迹。

设动点在瞬时 t 的位置为 M,在瞬时 $t+\Delta t$ 的位置为 M',如图 17-1 所示,则在时间间隔 Δt 内动点的位移为$\overrightarrow{MM'}=\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}=\Delta\boldsymbol{r}$,当 $\Delta t\to 0$ 时,动点在瞬时 t 的瞬时速度(简称速度,velocity)为

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{r}} \tag{17-2}$$

可见,动点的速度等于它的矢径对时间的一阶导数。

点的速度是矢量,它的方向是 $\Delta\boldsymbol{r}$ 或$\overrightarrow{MM'}$的极限方向,即沿着轨迹在该点的切线方向。通常所谓点的运动方向即为其速度方向。速度的单位为 m/s。

速度对时间的变化率称为加速度(acceleration)。设动点在瞬时 t 的速度为 $\boldsymbol{v}$,在瞬时 $t+\Delta t$ 的速度为 $\boldsymbol{v}'$,如图 17-2(a)所示。速度在时间间隔 Δt 内的改变量为 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}$,如图 17-2(b)所示。当 $\Delta t\to 0$ 时,动点在瞬时 t 的瞬时加速度(简称加速度)

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{v}} \tag{17-3a}$$

又由式(17-2)有

$$\boldsymbol{a}=\dot{\boldsymbol{v}}=\ddot{\boldsymbol{r}} \tag{17-3b}$$

即动点的加速度等于它的速度对时间的一阶导数,也等于它的矢径对时间的二阶导数。加速度的单位为 $\mathrm{m/s^2}$。

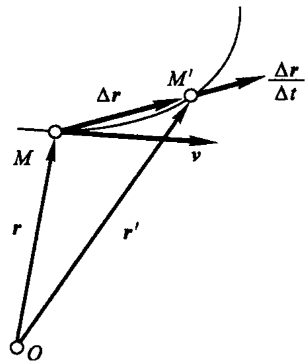

图 17-1　动点的速度矢量

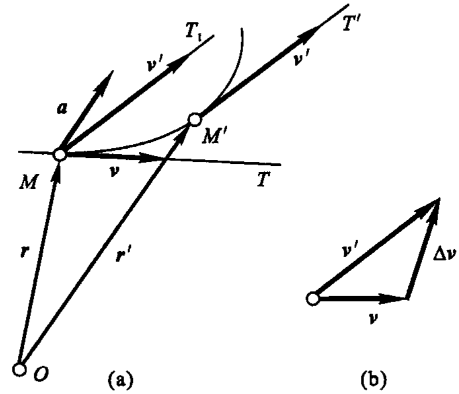

图 17-2　动点的加速度矢量

过 M 点作直线 MT_1 平行于在 M' 点的切线 $M'T'$，如图 17-2(a)所示。当 $\Delta t \to 0$ 时，M' 点趋近于 M 点，$\Delta \boldsymbol{v}$ 始终位于 MT 与 MT_1 所决定的平面内，且指向轨迹凹的一边。M' 点趋近于 M 点时，平面 TMT_1 的极限位置称为轨迹曲线在 M 点的密切面。因此，动点的加速度矢量位于轨迹在该点的密切面内，并指向轨迹的凹侧。顺便指出，平面曲线所在的平面，就是该曲线上各点的密切面。

速度和加速度表示为矢径对时间的一阶和二阶导数，形式简洁，宜于公式推演。而在具体计算中，应用它们在适当坐标系(如直角坐标系或自然轴系)上的投影公式是方便的。

§ 17-3　点的速度和加速度的直角坐标表示

选直角坐标系 $Oxyz$ 为固定参考系。设动点 M 在瞬时 t 的坐标为 x、y、z，如图 17-3 所示。显然，M 点的坐标是时间 t 的函数，即

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{17-4}$$

式(17-4)为动点 M 在直角坐标系下的运动方程。从这些方程中消去时间 t，得到 x、y、z 之间的两个关系式，它们描述一条空间曲线，这就是动点的轨迹方程。

由图 17-3 知，矢径 $\boldsymbol{r}$ 可写成

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{17-5}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是沿各坐标轴正向的单位矢。

将式(17-5)代入速度公式(17-2)，考虑到 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是不变的矢量，有

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \dot{x}\,\boldsymbol{i} + \dot{y}\,\boldsymbol{j} + \dot{z}\,\boldsymbol{k} \tag{17-6}$$

可见,动点速度在固定直角坐标轴上的投影分别等于对应坐标对时间的一阶导数,即

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z} \tag{17-7}$$

由式(17-7)不难求得速度的大小和方向。

将式(17-6)代入式(17-3),得

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}) = \dot{v}_x\boldsymbol{i} + \dot{v}_y\boldsymbol{j} + \dot{v}_z\boldsymbol{k} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k} \tag{17-8}$$

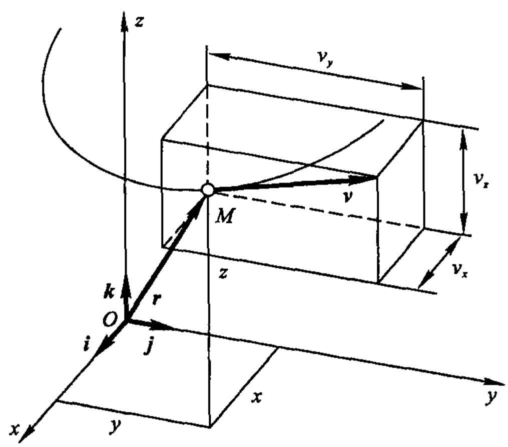

图 17-3　点的运动的直角坐标表示

可见,动点加速度在固定直角坐标轴上的投影分别等于对应速度投影对时间的一阶导数,或对应坐标对时间的二阶导数,即

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x}, \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y}, \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z}. \end{aligned} \tag{17-9}$$

除了直角坐标系,还可以采用其他坐标系(如圆柱坐标系、球坐标系等)表示确定点的位置。这种采用适当的坐标系确定研究对象的位置,通过对运动方程求导确定速度和加速度的方法,称为解析法。在逆问题中,则是由加速度的规律通过积分确定速度和运动规律,这时需要利用初始条件(initial conditions),即初始位置和初速度来确定积分常数。

§ 17-4　点的速度和加速度在自然轴上的投影

若动点的轨迹已知(如图 17-4 所示),则可在轨迹上任取一点 O 为起点量取

它到动点 M 的弧长$\overset{\frown}{OM}$,并规定在 O 点的某一边为正,另一边则为负。这个带有正负号的弧长 s 称为点 M 的弧坐标。弧坐标 s 完全确定了点 M 在轨迹上的位置。点运动时,其弧坐标随时间而变化:

$$s = s(t) \tag{17-10}$$

这就是动点沿已知轨迹的运动方程。

现在来求动点的速度。设在时间间隔 Δt 内,点由位置 M 运动到 M',如图 17-4 所示。弧坐标的增量为 $\Delta s = \overset{\frown}{OM'} - \overset{\frown}{OM} = \overset{\frown}{MM'}$,矢径的增量则为 $\Delta \boldsymbol{r} = \overrightarrow{MM'}$。根据式(17-2),并注意到,当 $\Delta t \to 0$ 时有 $\Delta s \to 0$,则动点的速度为

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\cdot\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}$$

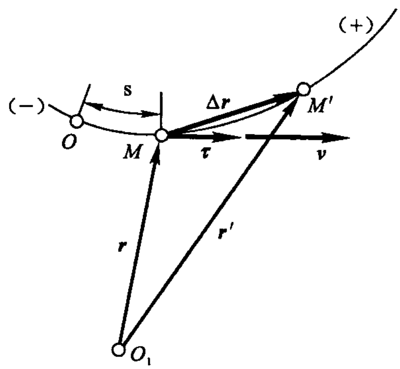

图 17-4　点的运动的自然坐标表示

当 $\Delta s \to 0$(M'点趋于 M 点)时,$\lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s}\right| = 1$,而 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向(即割线$\overrightarrow{MM'}$的方向)则趋近于轨迹在 M 点的切线方向。记切线方向的单位矢为 $\boldsymbol{\tau}$,则有

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta s} = \boldsymbol{\tau} \tag{17-11}$$

它总是指向 s 增加的一方,于是

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} \tag{17-12a}$$

或

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s} \tag{17-12b}$$

这就是说:动点沿已知轨迹的速度的代数值等于弧坐标对时间的一阶导数,速度

的方向沿着轨迹的切线方向，当$\frac{ds}{dt}=\dot{s}$为正时指向与 $\boldsymbol{\tau}$ 相同，反之，指向与 $\boldsymbol{\tau}$ 相反。

再求动点的加速度。将式(17-12)代入式(17-3)，得动点的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(v\boldsymbol{\tau})=\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}+v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \tag{17-13}$$

由式(17-13)可见，速度矢的变化率包括它在切线方向的投影(代数值 v)的变化率和方向 $\boldsymbol{\tau}$ 的变化率两部分。

以下首先研究轨迹是平面曲线的情况：设在瞬时 t，M 点的切向单位矢为 $\boldsymbol{\tau}$，经过时间间隔 Δt，动点运动到 M' 点，该点的切向单位矢为 $\boldsymbol{\tau}'$，如图 17-5(a)所示，切线方向转动了 $\Delta\varphi$ 角。在式(17-13)中，

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{\tau}'-\boldsymbol{\tau}}{\Delta t}$$

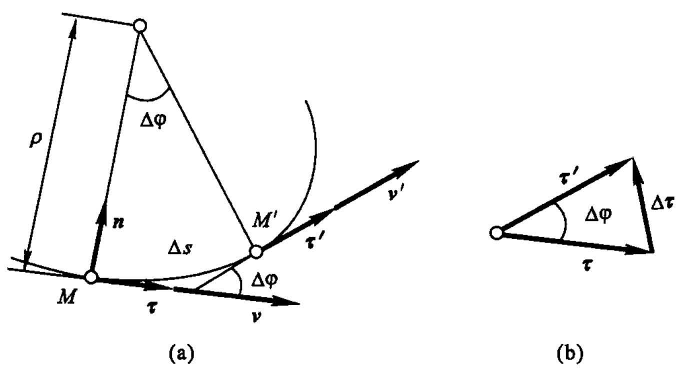

图 17-5　自然坐标中的加速度矢量

由图 17-5(b)可知，$\Delta\boldsymbol{\tau}$ 的模为

$$|\Delta\boldsymbol{\tau}|=2\,|\boldsymbol{\tau}|\,\sin\frac{\Delta\varphi}{2}=2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

于是

$$\left|\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\cdot\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}\right)$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|\cdot\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}=|v|\cdot\frac{1}{\rho}\cdot 1=\frac{|v|}{\rho}$$

式中，ρ 为曲率半径。

又因当 $\Delta t \to 0$ 时，$\Delta \boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{\tau}$ 的夹角趋近于直角，即 $\Delta \boldsymbol{\tau}$ 趋近于轨迹在 M 点的法线方向，指向曲率中心。记法线方向的单位矢为 $\boldsymbol{n}$，规定它指向曲率中心，则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\rho}\boldsymbol{n} \tag{17-14}$$

于是

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n} = a_\tau \boldsymbol{\tau} + a_n \boldsymbol{n} \tag{17-15}$$

式中，第一项称为切向加速度（tangential acceleration），它反映速度代数值的变化率；第二项为法向加速度（normal acceleration），它反映速度方向的变化率。它们在 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 方向上的投影分别为

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{17-16}$$

切向加速度 a_τ 的指向是否与切向单位矢 $\boldsymbol{\tau}$ 相同，需根据$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$的正负而定。但法向加速度 a_n 总是指向曲率中心 C，如图 17-6 所示。由 $\boldsymbol{a}$ 的两个正交分量 a_τ 和 a_n 不难求得 $\boldsymbol{a}$ 的大小和方向为

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad \theta = \arctan\frac{|a_\tau|}{a_n} \tag{17-17}$$

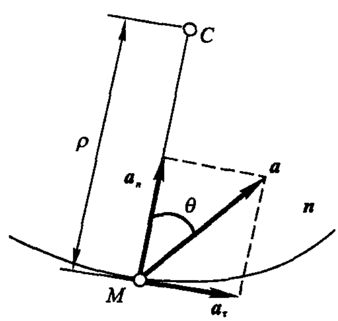

图 17-6　加速度关系

几种特殊的运动情况如下：

(1) 直线运动　在此情况下，由于直线轨迹的曲率半径 $\rho = \infty$，因此 $a_n = 0$，而 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}$，即仅有表明速度代数值改变的加速度。

(2) 匀速曲线运动　在此情况下,速度 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$是常数,因此 $a_\tau=0$,而 $\boldsymbol{a}=\frac{v^2}{\rho}\times\boldsymbol{n}$,即仅有表明速度方向改变的加速度。

运动方程可求得如下:

由 $\mathrm{d}s=v\mathrm{d}t$,积分后得

$$\int_{s_0}^{s}\mathrm{d}s = v\int_0^t\mathrm{d}t$$

或

$$s = s_0 + vt \tag{17-18}$$

(3) 匀变速曲线运动　在此情况下,速度 $a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$是常数。

由 $\mathrm{d}v=a_\tau\mathrm{d}t$,积分后得

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v = a_\tau\int_0^t\mathrm{d}t$$

或

$$v = v_0 + a_\tau t \tag{17-19}$$

又由 $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,得

$$\int_{s_0}^{s}\mathrm{d}s = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t(v_0 + a_\tau t)\mathrm{d}t$$

或

$$s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_\tau t^2 \tag{17-20}$$

由式(17-19)和式(17-20)消去时间 t,则得

$$v^2 - v_0^2 = 2a_\tau(s - s_0) \tag{17-21}$$

当轨迹是空间曲线时,上述结论同样成立,但此时$\frac{\Delta\boldsymbol{\tau}}{\Delta t}$的极限位置位于轨迹在$M$点的密切面内。通过 M 点可作出相互垂直的三条直线:切线、主法线(位于密切面内)和副法线(垂直于密切面),如图 17-7 所示。沿这三个方向的单位矢记为 $\boldsymbol{\tau}$、$\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{b}$。其中:$\boldsymbol{\tau}$ 指向弧坐标增加的一边,$\boldsymbol{n}$ 指向曲率中心,而 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n}$。这样规定正向的三根相互正交的轴构成了自然轴系。于是以上的公式和结论都成立,且加速度在副法线方向的投影恒为零。

例 17-1　如图 17-8 所示,杆 AB 绕 A 点转动时,拨动套在固定圆环上的小环 M。已知固定圆环的半径为 R,$\varphi=\omega t$(ω 为常量)。试求点的运动方程、速度

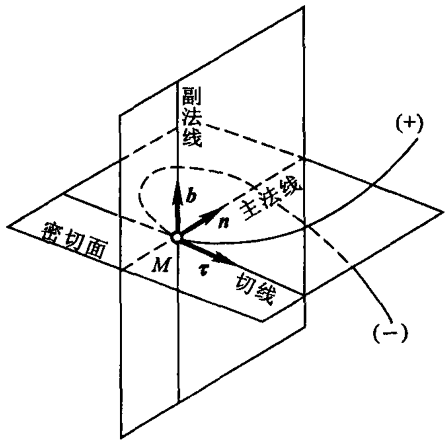

图 17-7　点的空间轨迹

和加速度。

解　(1) 直角坐标法　取坐标系 Oxy,如图 17-8(b)所示。为了列出动点 M 的运动方程,应当在任意瞬时 t 考察该点的情况。故设图中点 M 为任意瞬时 t

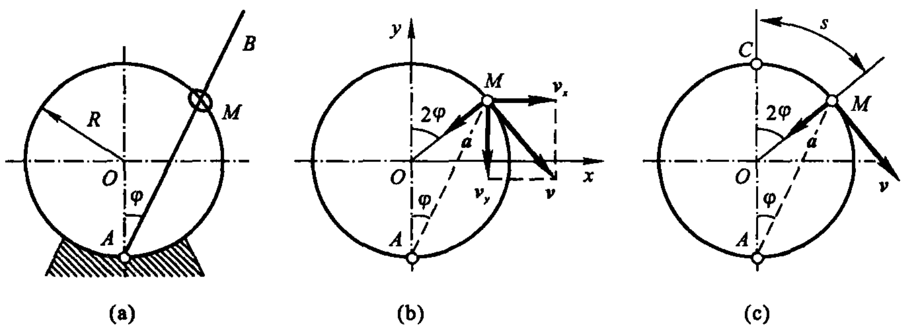

图 17-8　例 17-1 图

的位置,因为△AOM 为等腰三角形,把 M 点的坐标视为是矢径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$在对应轴上的投影,则

$$x = \overline{OM}\sin(2\varphi) = R\sin(2\varphi)$$

$$y = \overline{OM}\cos(2\varphi) = R\cos(2\varphi)$$

由已知条件 $\varphi=\omega t$,得到点的直角坐标形式的运动方程:

$$x = R\sin(2\omega t),\quad y = R\cos(2\omega t) \tag{1}$$

由式(17-7)求得速度:

$$v_x = \dot{x} = 2R\omega\cos(2\omega t)$$
$$v_y = \dot{y} = -2R\omega\sin(2\omega t)$$

所以

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2R\omega \tag{2}$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i}) = \frac{v_x}{v} = \cos(2\varphi)$$

$$\cos(\boldsymbol{v},\boldsymbol{j}) = \frac{v_y}{v} = -\sin(2\varphi) = \cos(90° + 2\varphi)$$

所以

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{i}) = 2\varphi,\quad (\boldsymbol{v},\boldsymbol{j}) = 90° + 2\varphi \tag{3}$$

可见速度的大小为 $2R\omega$，方向与矢径 $\boldsymbol{r}$ 相垂直。

再由式(17-9)求得加速度

$$a_x = \dot{v}_x = -4R\omega^2\sin(2\omega t) = -4\omega^2 x$$
$$a_y = \dot{v}_y = -4R\omega^2\cos(2\omega t) = -4\omega^2 y$$

所以

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4R\omega^2 \tag{4}$$

且有

$$\boldsymbol{a} = -4\omega^2 x\boldsymbol{i} - 4\omega^2 y\boldsymbol{j} = -4\omega^2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = -4\omega^2\boldsymbol{r} \tag{5}$$

可见加速度的大小为 $4R\omega^2$，方向恰与矢径 $\boldsymbol{r}$ 相反，即由点 M 指向 O(曲率中心)。

(2) 自然坐标法　由于动点的轨迹是半径为 R 的圆，取圆上 C 点为弧坐标的起点，并规定沿轨迹的顺时针方向为正，如图 17-8(c)所示。则动点沿轨迹的运动方程为

$$s = R(2\varphi) = 2R\omega t \tag{6}$$

由式(17-12)求得速度

$$v = \dot{s} = 2R\omega \tag{7}$$

再由式(17-16)求得加速度

$$a_\tau = \dot{v} = 0,$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(2R\omega)^2}{R} = 4R\omega^2 \tag{8}$$

$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 方向如图 17-8(c)所示。

显然，两种方法求得的结果完全相同。在解题时，若动点的轨迹未知，可采