中学基础知识手册

北京·金星书业

beijingjinxingshuye

数学

基础知识手册

（高 中）

全国三十八所重点中学教师／编写

总主编 薛金星

第七次修订

大连出版社

数学基础知识手册

（高中）

全国三十八所重点中学教师/编

主　编　李茂胜　戚其祝

副主编　张希孝　丁国文　段效宏

李祥成　王金贵　刘铭财

高三年级

李[illegible]

好好学习

天天向上

大连出版社

敬告读者

《小学、初中、高中各科基础知识手册》丛书自1993年《语文基础知识手册》问世以来，经过十年的风雨历程，不断扩充，形成了以小学、初中、高中各学科20余册。在竞争激烈、强手如林的图书市场中、以不可抑制之势保持着畅销态势，这不能不说是教辅图书销售中的一个奇迹。

目前，新的一轮考试改革和教学改革方案正在教育部和考试中心的领导下，从试点省份向全国范围内有条不紊地贯彻、实施、推广。“新课程标准”“新教材”“3+X方案”“综合能力测试”等热点话题一直牵动着全国中、小学生及家长的心。基于此，我们对《基础知识手册》丛书进行了全面的创造性的更新。《基础知识手册》丛书，全面贯彻教育新理念，注重能力和素质的培养，以新的教纲考纲和课程标准为依据、以思维为焦点、以方法为主线、以能力为核心，将基础知识和考试内容、命题探索、能力提高融为一体。在整体的设计上关注梯度，突出能力立意。编写时做到每个知识点层层把关，由“易”到“难”，由“章节”到“专题”到“整体”；由“基础”到“能力”到“综合”，以点带面，层层推进，步步提高，真正实现学生由“知识立意”向“能力立意”的转化。

作者郑重声明：《基础知识手册》丛书为薛金星先生的专项研究成果，已经注册。请读者认准封面上注册商标及“薛金星总主编”等字样，以防假冒。

作者郑重声明：保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。**本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。**

来信请寄：北京市安贞邮局69号信箱薛金星收，邮编：100029。
联系电话：（010）61743009

高三·七班
杨蕊炼

《中学基础知识手册》丛书编委会

再版前言

为帮助高中学生系统、全面地学习化学基础知识，掌握化学学习的思维方法，我们将中学阶段所涉及的化学知识按照“基本概念”、“基本理论”、“元素及其化合物”、“化学实验”、“化学实验”、“化学计算”、“化学计算”等五部分进行了系统的分类归纳。并本着以知识为载体进行思维方法指点、学习能力培养的指导思想，以《高考考试说明》为依据。对每部分的知识点按照课本顺序，根据学生的认知规律，进行了细致的、创新性的剖析，随后对每个知识点还设计了针对性例题解析。每一部分还对该部分的规律、思维方法、学习技巧等都作了总结，可使学生加深对知识的理解，学会如何学好化学。

本书全面系统地讲解知识要点，点拨高考考点，巧析重点难点。通过剖析教材，讲解典型例题，讲清解题思路，总结学习的方法，并对所有知识点进行延伸性讨论，实现了知识的迁移。

本书与其它同类书相比具有四个鲜明的特点：

一、基础知识丰富全面。针对化学知识点分散，规律性难把握的特点，编者反复审读教材，力求全面、透稳地把握。在此基础上，筛选、提炼知识要点，形成体系，真正做到“一册在手，内容全有”。

二、切实注重思维方法。本书在剖析基础知识的过程中，重在教会学生化学学习的思维方法。通过学习本书，让学生明确如何学习化学，怎样才能学好化学。

三、努力摆脱题海战术。经过高三复习的学生都有体会，复习过程中做过的题，以后再遇到类似题，照样不会做。主要原因就是没有学会如何学习。本书就很好地解决了这个问题：给学生一个方法，给学生一种，将学生从题中解放出来，让学生轻轻松松学化学。

四、准确把握高考脉搏。编者认真研究教学大纲、考试说明和近几年的高考题，明确考点、热点隶属于哪个单元，化整为零，把它们分散到每个知识点中，讲深讲透，并让它们起到一个统率作用，取得举一反三、触类旁通的学习效果。

本书的编写者都是从事高中化学教学的重点中学的优秀教师，有着丰富的教学经验和突出的教学成绩。但书中问题在所难免，敬请读者不吝指正，以期再版时有所增益。

薛金星

2002 年 6 月于北师大

目　录

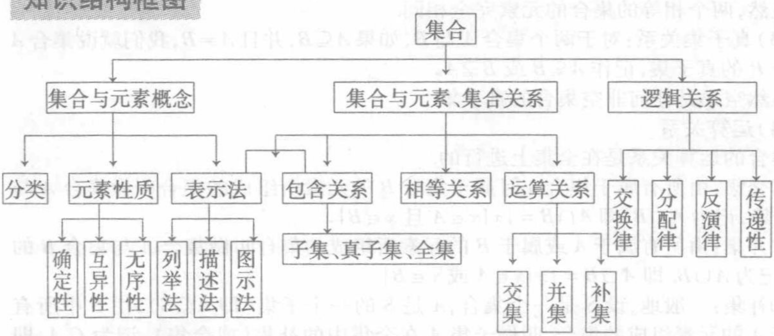
第一章 集合与简易逻辑

第一讲

集 合

第一部分 基础知识精要

知识结构框图



基础知识点拨

一、集合的基本概念及表示方法

1. 集合与元素

一般地，某些指定的对象集在一起就成为一个集合，也简称集，通常用大写字母 A、B、C…表示. 集合中的每一个对象叫做集合的一个元素，通常用小写字母 a，b，c……表示.

2. 集合的分类

集合
- 按元素的属性分
  - 数集（元素是数）
  - 点集（元素是点）
  - 序数对（元素是有序数对）
- 按元素多少分
  - 有限集（元素个数是有限个）
  - 无限集（元素个数是无限个）
  - 空集（不含任何元素）

3. 集合中元素的性质

集合有两个特性:整体性与确定性.

对于一个给定的集合,它的元素具有确定性、互异性、无序性.

4. 集合的表示方法

①列举法　②描述法　③图示法(文氏图法)　④区间法　⑤字母法.

二、元素与集合、集合与集合之间的关系

1. 元素与集合:“$\in$”或“$\notin$”

说明:元素与集合之间是个体与整体的关系,不存在大小与相等关系,如3与$\{3\}$,只能是$3\in\{3\}$,不是$3=\{3\}$,再如2与$\{3\}$,只能是$2\notin\{3\}$,不能是$2\neq\{3\}$.

2. 集合与集合之间的关系

(1)包含关系

①子集:如果$x\in A\Rightarrow x\in B$,则集合A是集合B的子集,记为$A\subseteq B$或$B\supseteq A$.

显然,任何集合是它自身的子集,即$A\subseteq A$;空集是任何集合的子集,即$\varnothing\subseteq A$.

②全集:如果集合S含有我们所研究的各个集合的全部元素,这个集合就可以看作一个全集. 全集通常用$\cup$表示.

显然,一切集合都是这个全集的子集.

(2)相等关系

对于两个集合A、B,如果$A\subseteq B$,同时$B\subseteq A$,那么集合A和集合B叫做集合相等,记为$A=B$.

显然,两个相等的集合的元素完全相同.

(3)真子集关系:对于两个集合A与B,如果$A\subseteq B$,并且$A\neq B$,我们就说集合A是集合B的真子集,记作$A\subsetneqq B$或$B\supsetneqq A$

显然空集是任何非空集合的真子集.

(4)运算关系

集合的运算关系是在全集上进行的.

①交集:由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合叫做集合A与B的交集,记为$A\cap B$,即$A\cap B=\{x|x\in A 且 x\in B\}$.

②并集:由所有属于A或属于B的元素所组成的集合叫做集合A与集合B的并集,记为$A\cup B$. 即$A\cup B=\{x|x\in A 或 x\in B\}$.

③补集:一般地,设S是一个集合,A是S的一个子集(即$A\subseteq S$),由S中所有不属于A的元素组成的集合,叫做子集A在全集中的补集(或余集),记为C_SA,即$C_SA=\{x|x\in S 且 x\notin A\}$.

三、集合之间的逻辑关系

1. 交集的运算性质

$A\cap B=B\cap A,A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B,A\cap U=A,A\cap A=A,A\cap\varnothing=\varnothing$

2. 并集的运算性质

$A\cup B=B\cup A,A\cup B\supseteq A,A\cup B\supseteq B,A\cup U=U,A\cup A=A,A\cup\varnothing=A$

3. 补集的运算性质

$\complement_U(\complement_U A)=A,\complement_U\varnothing=\cup,\complement_U\cup=\varnothing,A\cap\complement_U A=\varnothing,A\cup\complement_U A=\cup$

4. 分配律、结合律

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

5. 反演律(摩根法则)

$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B,\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$

6. 传递性

若集合 $A\subseteq B,B\subseteq C$,则集合 $A\subseteq C$;

若集合 $A\subsetneqq B,B\subsetneqq C$,则集合 $A\subsetneqq C$.

四、有限集合的子集个数公式

1. 设有限集合 A 中有 n 个元素,则 A 的子集个数有:$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots\cdots+C_n^n=2^n$(个),其中真子集的个数为 2^n-1(个),非空子集个数为 2^n-1(个),非空真子集个数为 2^n-2(个)

2. 有限集合间的元素的个数公式:

设有限集合 A 的元素个数为 $n(A)$,$\cup$ 为全集,易得

①$n(A)+n(\complement_U A)=n(\cup)$

②$n(A\cap B)=n(A)-n(A\cap\complement_U B)=n(B)-n(B\cap\complement_U A)$

③$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

第二部分 学习方法指导

高考命题规律

纵观近年高考试题,集合部分主要以考查基础层次的试题为主,涉及集合的运算和概念.试题体现了集合在中学数学中的基础性与工具作用、难度不大.要求概念清楚,会正确表示集合.

数学思想方法

一、数学思想

(一)数形结合的思想

在解决数学问题时,将抽象的数学语言与直观的图形结合起来,使抽象思维和形象思维结合起来,实现抽象概念与具体形象的联系和转化,即把数量关系转化为图形的性质来确定,或者把图形的性质问题转化为数量关系问题来研究.

例 1 已知集合 $A=\{x|x^2-2x-8<0\}$ $B=\{x|x-a<0\}$

(Ⅰ)若 $A\cap B=\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

(Ⅱ)若 $A\subsetneqq B$,求实数 a 的取值范围.

命题目的: 巩固集合与集合之间的关系符号,能解一次、二次不等式.

思路分析: (Ⅰ)$A\cap B=\varnothing$ 其实质是 A 与 B 无公共元素,(Ⅱ)$A\subsetneqq B$ 说明了 A 是 B 的真子集.明确了上述关系,只要画数轴即可得到答案.

解: $\because$ $A=\{x|x^2-2x-8<0\}=\{x|-2<x<4\}$,$B=\{x|x<a\}$

在数轴上将集合 A 表示出来,如图 1-1 所示,由图可知:

图1-1

(Ⅰ)若 $A\cap B=\varnothing$,则 $a\leqslant-2$

(Ⅱ)若 $A\subsetneqq B$,则 $a\geqslant4$

说明:在研究集合之间的关系时,要注意利用图形的直观性.

例2　用文氏图表示下列各集合之间的关系：

（Ⅰ）$R,Q_+,Z,N_+,\{0\}$

（Ⅱ）$A=\{$四边形$\}$　$B=\{$平行四边形$\}$　$C=\{$菱形$\}$　$D=\{$矩形$\}$　$E=\{$正方形$\}$　$F=\{$梯形$\}$

命题目的：考查数集与点集之间的关系.

思路分析：关键要搞清各集合之间的关系

解：（Ⅰ）如图1－2　（Ⅱ）如图1－3

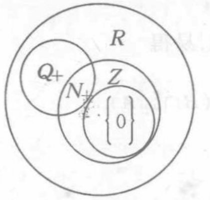


图1－2

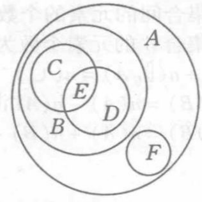


图1－3

说明：(1)文氏图非常清楚的表示有关概念的相互关系，这里要注意：$\{$平行四边形$\}\cap\{$梯形$\}=\varnothing$，在图中要有正确的表示.

(2)借助文氏图的直观性，它可以帮助我们深刻地理解某些概念和关系，便于记忆、思考、解答问题.

（二）分类讨论的思想：

它是根据数学对象本质属性的相同点和不同点，确定划分标准，进行分类，然后对每一类分别进行求解，并综合得出答案. 在划分中要求始终使用同一个标准，这个标准应该是科学的、合理的，要满足互质、无漏、最简的原则.

例3　数集$Z=\{(2n+1)\pi,n$是整数$\}$与数集$Y=\{(4k\pm1)\pi,k$是整数$\}$之间的关系是　（　　）

A. $X\subsetneqq Y$　　B. $X\supsetneqq Y$　　C. $X=Y$　　D. $X\neq Y$

命题目的：考查分类讨论的思想，及集合与集合之间的关系.

思路分析一：根据题意应从集合的包含、相等、不等的概念出发，考察集合与集合之间元素的所属关系.

解法一：$\because$ $\{2n+1,n\in Z\}=\{$奇数$\}$而$4k\pm1(k\in Z)$必为奇数，$\therefore$ $X\supseteq Y$ ①，反之，当$n\in Z$时，$x=(2n+1)\pi$

若n为奇数，即$n=2k-1(k\in Z)$，则$x=(4k-1)\pi$

若n为偶数，即$n=2k(k\in Z)$，则$x=(4k+1)\pi$，$\therefore$ $X\subseteq Y$ ②，

由①②可得$Z=Y$，故选C.

思路分析二：欲考查集合Z与Y的关系可以从Z与Y的元素入手.

解法二：解n取正数时

$Z=\{\cdots-5\pi,-3\pi,-\pi,\pi,3\pi,5\pi\cdots\}$

$Y=\{\cdots-5\pi,-3\pi,-\pi,\pi,3\pi,5\pi\cdots\}$

$Y=Z$，选C

说明：判定集合与集合间的关系，基本方法可归纳为判定元素与集合的关系.

例4　若$A=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2,x\in A\}$若$C\subseteq B$，试求$a$的值.

命题目的：考查集合与集合之间的关系及用描述法表示集合.

思路分析:关键在于求出集合 B 与 C,然后分情况讨论解决.

解:根据题意,有 $-2\leqslant x\leqslant a$

$\therefore\ -1\leqslant y=2x+3\leqslant 2a+3\qquad 0\leqslant z=x^2\leqslant \max\{(-2)^2,a^2\}$

(1)当 $a\geqslant 2$ 时,$a^2\geqslant 4$,$\therefore\ 0\leqslant z\leqslant a^2$ 而 $C\subseteq B$

$\therefore\ a^2\leqslant 2a+3$ 即有 $-1\leqslant a\leqslant 3$ $\therefore\ 2\leqslant a\leqslant 3$

(3)当 $-2\leqslant a<2$ 时 $a^2\leqslant 4$

$\therefore\ 0\leqslant z\leqslant 4$,$\because\ C\subseteq B$,$\therefore\ 4\leqslant 2a+3$ $\therefore\ a\geqslant\dfrac{1}{2}$ $\therefore\ \dfrac{1}{2}\leqslant a<2$

由(1)(2)可知$\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 3$

说明:解集合问题时,对集合元素的准确识别十分重要,不允许有半点错误,否则必将导致解题的失败,不妨,判断一下下面两组集合元素有何差异.

(1)$\{x|y=3x^2+x-5\}$;$\{y|y=3x^2+x-5\}$;$\{(x,y)|y=3x^2+x-5\}$

(2){二次方程 $3x^2+x-a=0$};{x|二次方程 $3x^2+x-a=0$ 且 $a\geqslant 3$};{a|二次方程 $3x^2+x-a=0$ 有相等的二实根};{a|二次方程 $3x^2+x-a=0$ 有实根}.

二、数学方法

(一)观察法

例5 集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},k\in Z\right\}$,$N=\left\{x|x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$,则 ( )

A. $M\subsetneqq N$ B. $M\supsetneqq N$ C. $M=N$ D. $M\cap N=\varnothing$

命题目的:本题主要考查集合和任意角的概念,以及灵活运用这些基本概念的能力.

思路分析一:深刻认识集合 M,N 中的元素都是终边落在直角坐标系中特殊位置的一些角.

解法一:代值验证,然后观察结果,分别令 $k=\cdots\cdots-1,0,1,2,\cdots\cdots$得

$M=\left\{\cdots\cdots-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4},\cdots\cdots\right\}$

$N=\left\{\cdots\cdots\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4},\pi,\dfrac{5\pi}{4},\cdots\cdots\right\}$

那么 $M\subsetneqq N$,故选 A.

解法二:对 M:$x=\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2k\pi+\pi}{4}=\dfrac{(2k+1)}{4}\pi\ k\in\mathbf{Z}$

对 N:$x=\dfrac{k\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{k\pi+2\pi}{4}=\dfrac{(k+2)\pi}{4}\ k\in\mathbf{Z}$

$\because\ k\in\mathbf{Z}$ $\therefore$ $(2k+1)\pi$ 为 π 的奇数倍

$(k+2)\pi$ 为的整数倍

$\therefore\ M\subsetneqq N$ 选 A

说明:本题也可用数形结合法求解.作出 M、N 在坐标系中的角的终边,可以看出:M 中的角的终边落在各象限的角分线上,而集合 N 中的角的终边分别落在各象限的角平分线和 x 轴,y 轴上,故选 A.

(二)图示法

如上面例5的说明

(三)分析法

例6 同时满足(1)$M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,(2)若 $a\in M$,则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有 ( )

A. 32 个　　　B. 15 个　　　C. 7 个　　　D. 6 个

命题目的：本题主要考查了集合的基本知识，以及逻辑思维的能力.

思路分析：正确理解题目中两个已知条件给出的符号语言，找出这两个条件的内在联系，即 M 的元素是 1,2,3,4,5 中的一部分或全部，并且 $a\in M$，那么 $6-a$ 也应在集合 M 中.

解：由已知条件，集合 M 中的元素必须具备两个条件，不妨设 $1\in M$，那么 $6-1=5$，也同时为 M 中的元素，由此可知 $M=\{1,5\}$，同理可推 $\{2,4\}$，$\{3\}$，$\{1,5,2,4\}$，$\{1,5,3\}$，$\{2,4,3\}$，$\{1,2,3,4,5\}$ 都满足题设，故选 C.

说明：本题要全面分析条件，若只考虑(1)忽视了(2)，则会选 A；若对“$\subseteq$”概念模糊，又可能选 D.

数学规律小结

1. 集合是一种数学工具

常用来表示不等式、方程的解、函数的定义域、值域等.

2. 集合的概念、性质、集合间的关系是高中数学的基础

(1) 集合为一原始概念

(2) 集合中元素的性质：确定性、无序性、互异性

(3) 集合的表示法：列举法、描述法、图示法、区间法、字母法

(4) 集合间的关系

①从属关系：元素与集合之间用“$\in$”或“$\notin$”符号表示.

②包含关系：集合与集合之间用“$\subseteq$”或“$\not\subseteq$”符号表示

③相等关系：若 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$ 则 $A=B$

④运算关系：交集、并集、补集的运算

3. 交集、并集，常用来表示不等式(组)、方程(组)的解

概括为：“且”用交，“或”用并；解要精，数轴分.

综合解题指导

例 1　已知 $A=\{0,1\}$ $B=\{x|x\subseteq A\}$，用列举法表示 A

命题目的：考查集合的表示方法，以及对符号语言的理解

思路分析：　$\because$　B 中元素 $x\subseteq A$，所以先求 A 的子集，再把 A 的子集作为 B 的元素.

解：　$\because$　$A=\{0,1\}$ $\therefore$　A 的子集为 $\varnothing$，$\{0\}$ $\{1\}$ $\{0,1\}$

$\therefore$　$B=\{x|x\subseteq A\}=\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

说明：集合 B 是把 A 的子集作为元素.

例 2　已知集合 $M=\{x|x^2=1\}$，集合 $N=\{x|ax=1\}$，若 $N\subsetneq M$，那么 a 的值为（　　）

A. 1　　　B. -1　　　C. 1 或 -1　　　D. 0,1 或 -1

命题目的：本题主要考查集合中有关空集，真子集的概念，以及方程的相关知识.

思路分析：由已知条件 $N\subsetneq M$，必须全面考虑集合 N 既可含集合 M 中的部分元素，也可为空集.

解法Ⅰ：由已知 $N\subsetneq M$，根据空集是任意非空集合的真子集，即 $N=\varnothing$，那么方程 $ax=1$ 无解，推出 $a=0$，若 $N\neq\varnothing$ 时，集合 N 中必须且只能含有 M 中的部分元素，当 $x=1$，可得 $a=1$，当 $x=-1$，可得 $a=-1$，故选 D.

解法Ⅱ：由已知 $M=\{1,-1\}$ 然后将选项 D 中的值分别代入方程 $ax=1$，均合

题意,故选 D.

说明:要全面深刻地理解 $N\subsetneqq M$ 这个条件.

例 3 集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x|\log_2(x^2-5x+8)=1\}$,$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$,求当 a 取什么值时,$A\cap B\supsetneqq\varnothing$,且 $A\cap C=\varnothing$同时成立.

命题目的:本题考查集合的运算,集合间的关系问题.

思路分析:由于集合 B、C 分别是方程 $\log_2(x^2-5x+8)=1$ 和 $x^2+2x-8=0$ 的解集,可以求得 $B=\{2,3\}$,$C=\{2,-4\}$,$A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 即 $A\cap B\neq\varnothing$ 即 2 或 3 是关于 x 的方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解,由此可求 a.

解:由 $\log_2(x^2-5x+8)=1$ 得 $x^2-5x+8=0$, $\therefore$ $B=\{2,3\}$

由 $x^2+2x-8=0$, $\therefore$ $C=\{2,-4\}$. 又 $A\cap C=\varnothing$,

$\therefore$ 2 和 -4 都不是关于 x 的方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解.

而 $A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 即 $A\cap B\neq\varnothing$

$\therefore$ 3 是关于 x 的方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解.

$\therefore$ $3^2-a\cdot3+a^2-19=0$,可以解得 $a=5$ 或 $a=-2$

当 $a=5$ 时,可以求得 $A=\{2,3\}$, $\therefore$ $A\cap C=\{2\}$,这与 $A\cap C=\varnothing$矛盾

所以把 $a=5$ 舍去. 当 $a=-2$ 时,可以求得 $A=\{3,-5\}$,符合 $A\cap C=\varnothing$

$A\cup B\supsetneqq\varnothing$, $\therefore$ $a=-2$

说明:本题要注意验根.

例 4 设有两个集合 A,B,$A=\left\{x\,\middle|\,\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}\right\}$,$B=\{x|x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0\}$若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

命题目的:本题主要考查,解不等式的能力和集合之间的关系问题.

思路分析:集合 A 为含绝对值符号的不等式,集合 B 是一元二次不等式,两者都含有字母参数 a,应注意 a 的取值.

解:由不等式$\left|x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$

得$-\dfrac{(a-1)^2}{2}\leqslant x-\dfrac{(a+1)^2}{2}\leqslant\dfrac{(a-1)^2}{2}$

得 $2a\leqslant x\leqslant a^2+1$ 即 $A=\{x|2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$

又 $\because$ $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0$,即$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant0$,

当 $3a+1\geqslant2$,即 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$时,$B=\{x|2\leqslant x\leqslant3a+1\}$

当 $3a+1<2$ 即 $x<\dfrac{1}{3}$时,$B=\{x|3a+1\leqslant x\leqslant2\}$

1°当 $a\geqslant\dfrac{1}{3}$时,由 $A\subseteq B$ 有$\begin{cases}2\leqslant2a\\a^2+1\leqslant3a+1\end{cases}$ $\therefore$ $1\leqslant a\leqslant3$

2°当 $a<\dfrac{1}{3}$时,由 $A\subseteq B$ 有$\begin{cases}3a+1\leqslant2a\\a^2+1\leqslant2\end{cases}$ $\therefore$ $a=-1$

综上可知:a 的取值范围是 $a=-1$ 或 $1\leqslant a\leqslant3$

说明:本题是从集合与集合的包含关系出发,在考查集合与集合的关系过程中确定 a 的取值范围.

例 5 已知全集$\cup=\{a|a<10$,且 $a\in N^*\}$,$A\cap B=\{2\}$,$\complement_U A\cap\complement_U B=\{1,9\}$,$\complement_U A\cap B=\{4,6,8\}$,求集合 A、B.

命题目的:本题主要考查集合的交、并、补运算.

数学基础知识手册

思路分析:本题可用文氏图法去求解,根据题意标出 $A\cap B$;$\complement_U A\cap\complement_U B$,$\complement_U A\cap B$,$\complement_U(A\cup B)$ 即 $\complement_U A\cap\complement_U B$,然后根据条件填图.

解:如图1-4,∵ $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 则 $A\cap\complement_U B$(即在 A 中但不在 B 中的元素)中只有3,5,7

∴ $A=\{2,3,5,7\}$　$B=\{2,4,6,8\}$

说明:如果遇有例5类型题目,用文氏图法较方便

例6　已知 M、N 都有3个元素,且 $M=\{a,a+d,a+2d\}$

$N=\{a,aq,aq^2\}$ 其中 $a\neq0$,$M=N$,求 q 的值

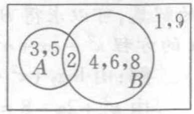


图1-4

思路分析:因 $M=N$,所以 $a+d=aq$,$a+2d=aq^2$……①

或 $a+d=aq^2$. $a+2d=aq$……②

通过解方程求 q.

命题目的:考查集合中元素的性质和集合相等的概念.

思路分析:因 $M=N$,所以 $a+d=aq$,$a+2d=aq^2$……①或 $a+d=aq^2$,$a+2d=aq$……②,通过解方程求 q.

解:对①后式减前式得 $d=aq(q-1)$ 代入前式得,$q=1$. 但当 $aq=a=1$ 矛盾(违背了元素的互异性).

对②后式减前式得 $d=aq(1-q)$ 再代入后式得 $q=1$(舍)$q=-\frac{1}{2}$.

综上 $q=-\frac{1}{2}$.

说明:本题主要考查元素的互异性这一特性.

例7　已知 $A=\{x|x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,求实数 P 的取值范围.

命题目的:考查集合间关系及对符号语言的转化.

思路分析:由 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ 确定 A,然后求 P

解:因 A 是方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 的根.　∵　$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ ∴　方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 有非正根或无解.

(1)当 $A=\varnothing$ 时,$\Delta<0$ ∴　$-4<p<0$,

(2)当 $A\neq\varnothing$ 时,即方程根非正时.

须 $\begin{cases}\Delta\geqslant0\\x_1+x_2=-(p+2)\leqslant0\end{cases}$　　解得 $\begin{cases}P\leqslant-4\text{ 或 }P\geqslant0\\P\geqslant0\end{cases}$

∴　$P\geqslant0$

综上(1)$P>-4$

说明:本题主要考查分类讨论思想.

例8　设 $A=\{x|x^2+4x=0\}$,$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1)若 $A\cap B=B$,求 a 的值;

(2)若 $A\cup B=B$,求 a 的值.

命题目的:考查集合与集合间的包含关系.

思路分析:什么是 $A\cap B=B$? 什么是 $A\cup B=B$? 弄清它们的含义,问题就可以解决了.

解:$A=\{-4,0\}$

(1) ∵　$A\cap B=B$,∴　$B\subseteq A$

1°若 $0\in B$,则 $a^2-1=0$,$a=\pm1$

当 $a=1$ 时,$B=A$;