

数学分析

上册

师范专科试用教材

数 学 分 析

(上册)

师专数学专业教材协编组编

吉林教育出版社

数学专科教材编审委员会名单

主任委员：朱静航

副主任委员：马忠林 方嘉琳 黄启昌 张海权 苏明礼
郭卫中 黄明游 刘孟德 王家彦 幸志明
张必忠（常务）

委员：汪德林 张承璞 邓鹤年 索光俭 熊锡金
师连城 孙纪方 张永春 林壬白

秘书长：孙纪方（兼）

副秘书长：李德本

师范专科试用教材 数学分析

师专数学专业教材协编组 编

责任编辑：白国才

封面设计：王劲涛

出版：吉林教育出版社 787×1092毫米32开本 19.25印张 2插页

发行：吉林省新华书店 425,000字 1997年11月第1版

1987年11月第1次印刷 印数：1—10,000册

印刷：吉林师范学院印刷厂 统一书号7375.653 定价：3.30元

师专数学教材出版说明

师范专科学校承担着培养大批合格的初中教师的重任。随着九年制义务教育的普及和四化建设的深入发展，师专的地位和作用愈来愈受到社会的重视。但是，就师专数学专业而言，到目前为止，国内还没有公开出版一套完整的、令人满意的专业教材，这给师专教学带来了一定的困难。为了解决这一问题，填补这一空白，在吉林省教育委员会的组织和资助下，由四平师院、吉林师院、长春师院、通化师院、白城师专、齐齐哈尔师院、廊坊师专、内蒙民族师院、昭盟蒙族师专等九所师范院校联合编写了这套教材。本套教材共有十四种，十五册，它们是：《空间解析几何》，《高等代数》《数学分析》（上、下册），《概率论与数理统计》，《逻辑代数与计算机语言》，《普通物理》，《初等代数研究》，《初等几何研究》，《中学数学教材教法总论》，《高等几何》，《常微分方程》，《复变函数》，《高等数学》（物理专业用），《高等数学》（化学专业用）。

本套教材是根据国家教委制定的二年制师范专科学校的教学计划（征求意见稿）和各门课程的教学大纲并结合九所院校的教学实践编写的。为保证教材质量，邀请了东北师大、吉林大学等校的二十多位教授、专家、学者组成教材编审委员会，对全套教材的编写进行具体指导和严格审查。

本套教材包括了教学计划规定的师专数学专业的全部专业课程(必修课及选修课)的教材以及物理和化学专业的高等数学教材。编写时充分注意了各门教材内容上的衔接与配合,深度和广度方面的协调一致。并在文字使用、表述方式、名词术语和符号的使用等方面有统一的要求,力争规范划一。

本套教材从培养目标出发,突出了师专教育的要求和特点。教材选择上避免了“多、深、尖”的弊病,体现了“少、广、新”的原则。力求培养学生具有坚实的理论基础和广阔的视野,以适应“三个面向”的需要。在表述方面,在充分注意科学性和严密性的前提下,力求通俗易懂,深入浅出,详尽透彻,易教易学。

为了加强对学生的能力培养和科学的思维方法的训练,各门教材都配备了较多的例题和习题。它们都经过精心选择,与正文内容密切配合,有些还是正文内容的补充和提高。对于难度较大的习题,作了适当的提示。

本套教材不仅可供师范专科学校使用,还可作为教育学院、职业大学、电视大学以及函授、刊授等相应专业的教材,亦可作为师范院校本科及其它院校有关专业的教学参考书。

编写一套完整的、适应四化建设需要的教材是一项十分艰巨的任务。我们的工作只是一个初步的尝试,缺点和谬误在所难免。诚恳希望得到有关专家和广大读者的批评指正。吉林省教育委员会和参加编写工作的九所院校的有领导对于本套教材的编写出版给予了宝贵的支持,谨此表示衷心的感谢。

师专数学专业教材协编组

1986年10月

目 录

第一章 函 数	1
§ 1 函数概念	1
1.1 集合与映射	1
1.2 实数集 R	9
1.3 函 数	13
习 题 1.1	20
§ 2 几种特殊类型函数	24
2.1 有界函数	24
2.2 单调函数	27
2.3 奇函数与偶函数	29
2.4 周期函数	30
习 题 1.2	30
§ 3 函数的运算	32
3.1 四则运算	32
3.2 复合函数	33
3.3 反函数	36
习 题 1.3	39
第二章 初等函数	41
2.1 基本初等函数	41
2.2 初等函数	47
习 题 1.4	48
第三章 数列极限	51
§ 1 数列极限的概念	51

1.1	问题的提出	51
1.2	数列极限的概念	54
1.3	例	59
	习 题 2.1	67
§ 2	收敛数列的性质	69
2.1	唯一性	69
2.2	有界性	70
2.3	保号性	71
2.4	不等式性质	73
	习 题 2.2	76
§ 3	数列极限的四则运算	77
	习 题 2.3	83
§ 4	数列极限存在判别法	84
	习 题 2.4	95
第三章	函数极限	97
§ 1	函数极限的概念	97
1.1	当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 的极限	97
1.2	当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)$ 的极限	103
1.3	函数的单侧极限	109
	习 题 3.1	115
§ 2	函数极限的性质及四则运算	117
	习 题 3.2	128
§ 3	函数极限存在判别法两个重要极限	129
3.1	函数极限存在判别法	129
3.2	两个重要极限	131
	习 题 3.3	138
§ 4	无穷小量与无穷大量	140
4.1	无穷小量	140

4.2	无穷大量	143
4.3	阶的比较	147
习 题 3.4		151
第四章	函数的连续性	153
§ 1	函数连续性的概念	153
1.1	函数在一点的连续性	153
1.2	区间上的连续函数	157
1.3	间断点的分类	159
习 题 4.1		163
§ 2	连续函数的基本性质	165
2.1	连续函数的局部性质和四则运算	165
2.2	闭区间上连续函数的性质	167
习 题 4.2		173
§ 3	初等函数的连续性	174
3.1	反函数与复合函数的连续性	174
3.2	初等函数的连续性	177
习 题 4.3		180
第五章	导数与微分	182
§ 1	导数的概念	182
1.1	引出导数概念的实例	182
1.2	导数的概念	186
1.3	导数的几何意义	189
1.4	函数可导与连续的关系	190
习 题 5.1		192
§ 2	导数的基本公式与运算法则	194
2.1	代数和的导数	194
2.2	乘积的导数	195
2.3	商的导数	197

2.4	对数函数的导数	200
2.5	三角函数的导数	201
2.6	复合函数的导数	203
2.7	反函数的导数	206
2.8	导数公式	213
	习 题 5.2	219
§ 3	隐函数与隐函数的导数	226
3.1	隐函数定义	226
3.2	隐函数的导数	227
3.3	取对数求导法	231
	习 题 5.3	232
§ 4	参数方程求导数	234
	习 题 5.4	236
§ 5	微 分	237
5.1	微分的概念	237
5.2	微分的几何意义	241
§ 6	微分的求法及微分形式不变性	242
6.1	微分的运算法则和公式	242
6.2	微分形式的不变性	245
	习 题 5.6	247
§ 7	微分在近似计算中的应用	248
7.1	近似计算	248
7.2	误差估计	252
	习 题 5.7	254
§ 8	高阶导数与高阶微分	255
8.1	高阶导数的概念	255
8.2	高阶导数的运算	257

8.3	高阶微分	266
	习 题 5.8	269
第六章	中值定理与泰勒公式	272
§ 1	中值定理	272
	习 题 6.1	287
§ 2	洛必达法则	291
2.1	$\frac{0}{0}$ 型待定型定值法	292
2.2	$\frac{\infty}{\infty}$ 型待定型定值法	298
2.3	其他待定型	301
	习 题 6.2	307
§ 3	泰勒公式	310
3.1	泰勒多项式	311
3.2	泰勒公式及其余项	313
3.3	常用的几个展开式	319
3.4	泰勒展开式的应用	325
	习 题 6.3	329
第七章	导数在研究函数上的应用	332
§ 1	函数的单调性	332
1.1	函数单调性判别法	332
1.2	不等式定理	335
	习 题 7.1	337
§ 2	最大值和最小值问题	338
2.1	极 值	339
2.2	最大值最小值	347
2.3	最大值最小值应用题	348
	习 题 7.2	353

§ 3	函数的凸性	357
	习 题 7.3	363
§ 4	函数作图	363
4.1	曲线的渐近线	363
4.2	描绘函数图象	366
	习 题 7.4	371
第八章	实数基本定理	373
§ 1	区间套定理	373
	习 题 8.1	376
§ 2	有限复盖定理	377
	习 题 8.2	379
§ 3	数集的确界	380
	习 题 8.3	384
§ 4	数列的聚点	385
	习 题 8.4	387
§ 5	数列的子列	388
	习 题 8.5	391
§ 6	柯西数列	391
	习 题 8.6	394
§ 7	闭区间上连续函数性质的证明	394
	习 题 8.7	400
第九章	不定积分	402
§ 1	不定积分概念与基本积分表	402
1.1	原函数与不定积分	402
1.2	不定积分的性质与基本积分表	404
	习 题 9.1	408
§ 2	积分法	408

2.1	分项积分法 (简单积分法)	409
2.2	换元积分法	411
2.3	分部积分法	421
	习 题 9.2	426
§ 3	有理函数和可化为有理函数的积分	429
3.1	有理函数的积分	430
3.2	三角函数有理式 $R(\sin x, \cos x)$ 的积分	439
3.3	简单无理函数的积分	444
	习 题 9.3	449
第十章	定积分	451
§ 1	定积分的概念	451
1.1	问题的提出	451
1.2	定积分的概念	456
1.3	定积分的几何意义	459
	习 题 10.1	461
§ 2	定积分的存在性	463
2.1	可积的必要条件	463
2.2	小和与大和	465
2.3	可积准则	469
2.4	可积函数类	472
	习 题 10.2	477
§ 3	定积分的简单性质	479
3.1	定积分的简单性质	479
3.2	积分中值定理	489
	习 题 10.3	493
§ 4	定积分的计算	496
4.1	按定义计算定积分	496
4.2	微积分学基本定理	497

4.3	定积分的分部积分法	506
4.4	定积分的换元积分法	510
4.5	定积分的近似计算	519
	习 题 10.4	530
第十一章 定积分的应用		536
§ 1	定积分在几何上的应用	536
1.1	平面图形的面积	536
1.2	平面曲线的弧长	546
1.3	立体体积	552
1.4	旋转体的侧面积	556
	习 题 11.1	559
§ 2	定积分在物理上的某些应用举例	561
2.1	压力	561
2.2	功	562
	习 题 11.2	564
习题答案		565
后 记		607

第一章 函 数

在中学数学教材中已经有了“集合”和“函数”的概念。

它们是极为重要的两个概念。本章除对中学数学已讲过的函数及其性质重点复习外，并作些必要的补充。

§ 1 函数概念

1.1 集合与映射

1 集合

集合是一个基本概念。一般地，我们把具有某种共同性质事物的全体，叫做一个集合（或简称为集）。构成集合的个体，称为集合的元素。例如，一个班学生的集合，一批产品的集合，全体实数的集合，平面上所有点的集合等等。

通常我们用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合，用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素。

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A ，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A ，记作 $a \notin A$ 。例如， A 是自然数集合，则 $3 \in N$ ， $\frac{1}{2} \notin N$ 。

含有有限个元素的集合称为有限集，例如，前四个自然数的集合，一个班学生的集合等都是有限集。特别地，只含有一个元素的集合称为单元素集。例如，满足方程 $x-1=0$

的所有 x 的集合，就是只含有一个元素 1 的集合；含有无限多个元素的集合称为无限集，如自然数集合就是一个无限集。

集合通常用两种方法表示：

I 列举法：就是按任意顺序列出集合的所有元素，并用花括号 $\{ \}$ 括起来，元素间用逗号隔开表示集合的方法。例如，前四个自然数的集合 A ，可表示为

$$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}。$$

有限集，通常用列举法表示。由于无限集不能把它的所有元素都列出来，因而一般不用列举法表示，但有些无限集的元素间有比较明显的规律性，我们列举出其中一些元素，其余的用省略号代替，也可用列举法表示。例如，自然数集合 N ，可表示为

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots \}。$$

用列举法表示集合时，必须列出集合的所有元素，不能遗漏和重复，且与顺序无关。比如， $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ ，则 $\{ 2, 3, 4, 1 \}$ ， $\{ 3, 4, 1, 2 \}$ ， $\{ 4, 1, 2, 3 \}$ ， $\{ 1, 4, 3, 2 \}$ 等，都认为是同一个集合，即都是集合 A 。

II 描述法：就是把集合里元素的共同特征性质描述出来表示集合的方法，设 $P(x)$ 为某个与 x 有关的特征性质， B 为满足 $P(x)$ 的一切 x 构成的集合，则可表示为

$$B = \{ x | P(x) \}。$$

无限集合，通常用描述法表示。例如，满足不等式 $x^2 - 3x - 4 > 0$ 的一切 x 所组成的集合 B 可表示为

$$B = \{ x | x^2 - 3x - 4 > 0 \}$$

有限集合，有时只知道元素所具有的特征性质，也采用描述法表示。例如

$$C = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

当方程没有解出之前，只好用描述法给出，当把方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 解出后，知 $C = \{1, 2\}$ 。

集合中的元素可以是任何事物，但若集合的元素都是数，称这种集合为数集，也称为点集。

我们用下列记号表示常用的一些数集：

N：表示一切自然数的集合；

Z：表示一切整数的集合；

Q：表示一切有理数的集合；

R：表示一切实数的集合。

我们看下面一个集合：

$$S = \{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\},$$

它是由 $x^2 + 1 = 0$ 的所有实数根组成的集合，由于这个方程没有实数根，从而这个集合没有元素。

定义 1.1 不包含任何元素的集合，称为空集合，简称空集，记为 ϕ 。 $S = \{x \mid x \in R, x^2 + 1 = 0\}$ 是空集。又如一批产品都是成品，废品的集合为空集。

定义 1.2 设 A, B 是两个集合，若任意 $a \in A$ ，必有 $a \in B$ ，则称 A 是 B 的子集；记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ ，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A 。如图 1.1，即：集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，就说 A 是 B 的子集。例如，

$$N \subset Z \subset Q \subset R,$$

又如，设 A 表示全班女生集合， B 表

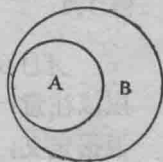


图 1.1

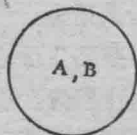
示全班学生集合，则 $A \subset B$ 。

由于空集不含有任何元素，所以规定空集 ϕ 是任何集合的子集，即设 A 为任意集合，则 $\phi \subset A$ 。

由子集的定义，知 $A \subset A$ ，即任何集合是它自身的子集。

定义 1.3 设 A, B 是两个集合。若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，称 A 与 B 相等，记为 $A = B$ 。

即：集 A 的元素都是集 B 的元素，同时集 B 的元素也都是集 A 的元素，此时 A, B 两个集合的元素必然完全相同。如图 1.2。例如，



$$A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\},$$

$$B = \{1, 2\}$$

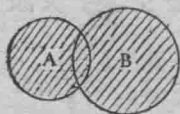
图 1.2

则 $A = B$

由两个集合相等的定义可知：要证明集合 A 与集合 B 相等，只须证明 $A \subset B$ 和 $B \subset A$ 即可。

集合之间同样可以进行运算。

定义 1.4 设 A, B 是两个集合。由 A 和 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$ ，如图 1.3，即



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

图 1.3

例如， $A = \{1, 2, 3\}$ ，

$B = \{3, 4, 5\}$ 则

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

应该注意：相同元素只算一次。

根据定义，有

$$A \cup A = A,$$