初等数学复习及研究

（平面几何）

习 题 解 答

上 册

黄承宏　顾培森

江西师院井冈山分院数学科

前　　言

本书是应部分中学教师和我科学生的要求编写的。由于本书仅供大、中学校数学教师以及大学生参考，因而证法要求简洁，目的是提供一条证题途径。每个问题一般仅给出一种初等几何证法，极少数问题指出了更为简单的三角法等。上册解答了梁绍鸿编写的《初等数学复习及研究（平面几何）》的全部证明题，下册将解答该书其余问题。因成书仓促，水平有限，错漏之处敬请读者批评指正。

许多同志对本书的编写工作，给予了大力协助，他们是刘彦楠、谢华强、王土铨、肖鸣九、郭明仁、王旭、陈怀琴、周梦、朱平、章琛。

编　　者

一九八〇年十二月

录

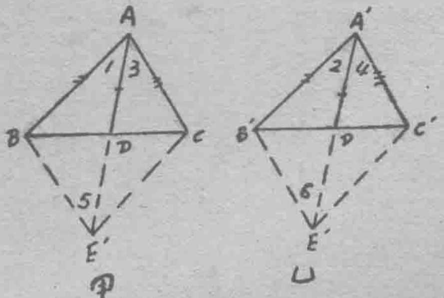
第一章　中学平面几何摘要

第一节　直线形定理

（习题二）

1、略。

2、两三角形中，若一边的中线及另两边对应相等，则它们必是合同的。



（图1）

【证】　如图1，延长AD至E，使DE = AD，延长A′D′至E′，使D′E′ = A′D′，连BE和B′E′，EC和E′C′，则四边形ABEC和A′B′E′C′均为平行四边形。

∵　BE$\perp\!\!\!\!=$AC，B′E′$\perp\!\!\!\!=$A′C′，且AC = A′C′，

∴　BE = B′E′，又AB = A′B′，AE = A′E′，

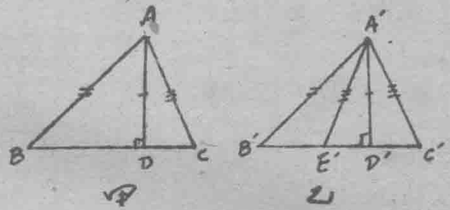
故　$\triangle ABE \cong \triangle A'B'E'$，从而$\angle 1=\angle 2$，$\angle 5=\angle 6$。

但　$\angle 5=\angle 3$，$\angle 6=\angle 4$，于是$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$，即$\angle BAC=\angle B'A'C'$。在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中：

$\because$　$AB=A'B'$，$\angle BAC=\angle B'A'C'$，$AC=A'C'$，

$\therefore$　$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

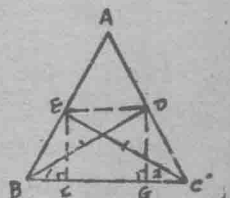
3、两三角形若一边的高及另两边对应相等，试问它们是否合同？为什么？



（图2）

【答】　如图2在$\triangle ABC$和$A'B'C'$，$\triangle ABC$和$A'B'E'$中，分别具有一边上的高及另两边对应相等的条件，其结果是$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$是合同图形，而$\triangle ABC$和$\triangle A'B'E'$不是合同图形。这是因为$\triangle ABC$和$\triangle A'B'E'$中虽具有题给条件，但此时一个为锐角三角形，一个为钝角三角形，所以它们不是合同图形。

4、有两中线相等的三角形必是等腰的。



（图3）

【证】　如图3引$EF \perp BC$，$DG \perp BC$，F、G分别为垂足。

$\because$　E、D分别为AB，AC的中点，

$\therefore$　$ED \parallel BC$。于是两平行线ED

和BC间的距离EF＝DG，又BD＝CE，

∴Rt△BDG≌Rt△CEF，从而∠1＝∠2。

在△BCD和△CBE中：∵ BD＝CE，∠1＝∠2，BC＝BC，

∴ △BCD≌△CBE，从而∠BCD＝∠CBE，于是AB＝AC。

5、有两高相等的三角形必是等腰的。

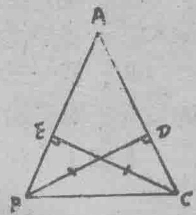
【证】 如图4，在Rt△BEC和Rt△CDB中：

∵ BD＝CE，BC＝BC，

∴ Rt△BEC≌Rt△CDB，

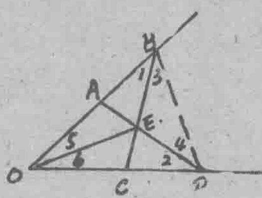
∴ ∠EBC＝∠DCB，

从而AB＝AC。



（图4）

6、在∠XOY的边OX及OY上各取两点A、B及C、D，使OA＝OC且OB＝OD。连AD与BC设交于E，求证OE平分∠XOY。



（图5）

【证】 如图5，

∵ OB＝OD，OC＝OA，

∠BOC＝∠DOA，

∴ △BOC≌△DOA，∴ ∠1＝∠2。

连BD，∵ OB＝OD，∴ ∠OBD＝∠ODB，从而∠3＝∠4，BE＝DE。在△BOE和△DOE中，∵ OB＝OD，∠1＝∠2，BE＝DE，∴ △BOE≌△DOE，

从而$\angle 5=\angle 6$，即OE平分$\angle XOY$。

7、三角形的任一边都小于半周。

【证】 设三角形三边长为a、b、c，且a最大。

$\because$ $a<b+c$，$\therefore$ $\frac{a}{2}<\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$……(1)，

又 $\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$，……(2)

(1)+(2)得 $a<\frac{1}{2}(a+b+c)$。这说明三角形中最大的一边小于半周，从而三角形的任一边都小于半周。

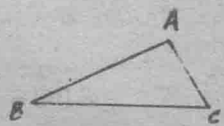
8、若一三角形中有一边等于另一边的两倍，则最短边的长介于周长的$\frac{1}{6}$与$\frac{1}{4}$之间。

【证】 如图6，$\because$ AB=2AC

（题设…… (1)

又 BC>AB－AC=2AC－AC=AC …… (2)

$\therefore$ 三边中以AC边为最短。



（图6）

(1)+(2)得3AC<AB+BC，从而4AC<AB+BC+AC，

$\because$ AC<$\frac{1}{4}$(AB+BC+AC)………(3)

又$\because$ BC<AB+AC=3AC，$\therefore$5AC>BC+2AC=BC+AB，从而6AC>AB+BC+AC，

$\therefore$ AC>$\frac{1}{6}$(AB+BC+AC)……(4)

由(3)、(4)有 $\frac{1}{6}$(AB+BC+AC)<AC<$\frac{1}{4}$(AB+BC+AC)。

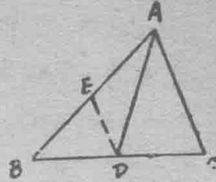
9、三角形任一边的中线小于其它两边的半和而大于它们的半差。

【证】 如图7，AD为BC边上的中线，过D作DE∥AC交AB于E，$\because$ BD=DC，而DE∥AC，

$\therefore$ $DE=\frac{1}{2}AC$,

$AE=\frac{1}{2}AB$。

在$\triangle ADE$中有 $AE-ED<AD<AE+ED$，即$\frac{1}{2}(AB-AC)<AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$。



（图7）

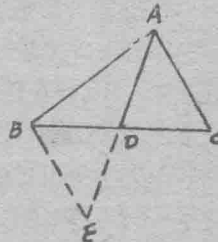
10、设在$\triangle ABC$中$AB>AC$，D是BC边的中点。求证$\angle ADB>\angle ADC$且$\angle BAD<\angle CAD$。

【证】 如图8，在$\triangle ADB$和$\triangle ADC$中：

$\because$ AD为公共边，$BD=CD$，$AB>AC$，

$\therefore$ $\angle ADB>\angle ADC$。

延长AD至E，使$DE=AD$，连BE，则$BE=AC$，$\angle CAD=\angle E$。在$\triangle ABE$中：$\because$ $AB>AC$，$\therefore$ $AB>BE$，从而$\angle BAD<\angle E=\angle CAD$。

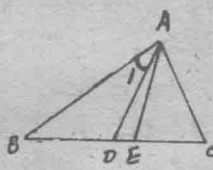


（图8）

11、三角形任一角的平分线不大于对边的中线。

【证】 如图9，AD为BC边上的中线，AE为$\angle BAC$的平分线。

设$AB>AC$，则$\angle C>\angle B$，由上题，$\angle BAD<\angle CAD$，$\therefore$ D必介于B、E之间，$\because$ $\angle AED=\angle C+\frac{1}{2}\angle A$，$\angle ADE=\angle B+\angle 1$，而$\angle 1<\frac{1}{2}\angle A$，$\therefore$ $\angle ADE<\angle B+$



（图9）

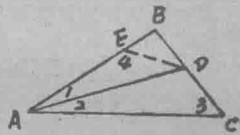
$\frac{1}{2}\angle A$，从而$\angle ADE<\angle AED$，故$AE<AD$。

设$AB<AC$，同样可证得$AE<AD$。设$AB=AC$，此时BC边上的中线，即$\angle BAC$的平分线，于是有$AE=AD$。综上所证可知三角形任一角的平分线不大于对边的中线。

12、设在$\triangle ABC$中A角的平分线交BC边于D，求证：

（1）$AB>BD$且$AC>CD$；

（2）若$AB>AC$，则$BD>CD$。



（图10）

【证】（1）∵ $\angle BDA=\angle 2+\angle 3$，又$\angle 1=\angle 2$，

∴ $\angle BDA=\angle 1+\angle 3$，

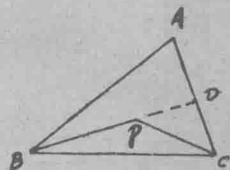
于是$\angle BDA>\angle 1$，从而$AB>BD$，同理可证$AC>CD$。（图10）

（2）∵ $AB>AC$，∴ 可在AB上截取$AE=AC$，则$\triangle ACD\cong\triangle AED$，$ED=CD$，$\angle 3=\angle 4$。由$\angle 3=\angle 4$，有$\angle BED=\angle BCF$，但$\angle BCF>\angle B$，于是$\angle BED>\angle B$，故$BD>ED=CD$。（图10）

13、设P是$\triangle ABC$内部的任一点，求证：

（1）$\angle BPC>\angle BAC$；

（2）$\frac{1}{2}(BC+CA+AB)<PA+PB+PC<BC+CA+AB$。



（图11）

【证】（1）如图11，延长BP交AC于D，∵ $\angle BPC>\angle CDP$，而$\angle CDP>\angle A$，∴ $\angle BPC>\angle A$，即$\angle BPC>\angle BAC$。

（2）如图11，∵ $PA+PB>AB$，$PB+PC>BC$，

$PC+PA>AC$，∴ $2(PA+PB+PC)>AB+BC+AC$，

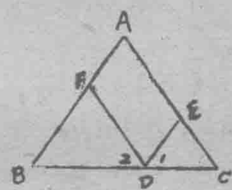
即 $PA+PB+PC>\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$。……①

又∵ $PB+PD<AB+AD$，$PC<PD+CD$，∴ 两式相加得 $PB+PC<AB+AC$，同理 $PA+PB<AC+BC$，$PC+PA<AB+AC$，上面三式相加得

$$2(PA+PB+PC)<2(AB+BC+AC)$$，

即 $PA+PB+PC<AB+BC+AC$……②， 由①和②有 $\frac{1}{2}(AB+BC+CA)<PA+PB+PC<AB+BC+CA$。

14、自等腰三角形底边上每一点引两腰的平行线与两腰交成平行四边形，求证这样的平行四边形有一定的周长。

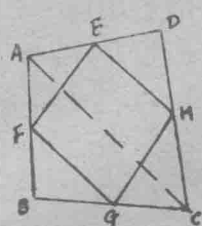


（图12）

【证】 如图12，∵$AB\parallel DE$，∴$\angle 1=\angle B$，而$\angle B=\angle C$，∴ $\angle 1=\angle C$，故$ED=EC$，同理$FD=FB$，

∴ 这个平行四边形的周长等于等腰三角形两腰长的和。

15、求证顺次连结四边形各边的中点必成一个平行四边形。



（图13）

【证】 如图13，∵ E、H 分别为AD、DC的中点，

∴$EH\underline{\parallel}\frac{1}{2}AC$，同理$FG\underline{\parallel}\frac{1}{2}AC$，故 $EH\underline{\parallel}FG$，

∴ 四边形 EFGH 是平行四边形。

16、若四边形的两对角线互相垂直，则对边中点的连结

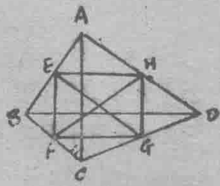
线彼此相等。

【证】 如图14，∵ E、F分别为AB、BC的中点，

∴$EF \underline{\parallel} \frac{1}{2}AC$，∵ G，H分别为CD，AD的中点，

∴$GH \underline{\parallel} \frac{1}{2}AC$，于是$EF \underline{\parallel} GH$，故EFGH为平行四边形。又∵ AC⊥BD，故▱EFGH是矩形。EG、FH是▱EFGH的两对角线，

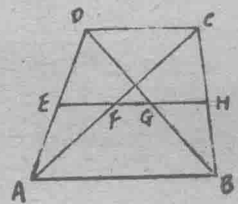
∴ EG = FH。



（图14）

17、求证梯形的两腰中点及两对角线的中点同在一直线上。

【证】如图15，∵E、G分别为AD、BD中点，∴ EG∥AB，但AB∥CD，故EG∥CD，于是得到EG必过AC的中点F。
∵ F、H分别为AC、BC中点，
∴ FH∥AB∥CD，于是得到FH必过BD中点G。∵直线EFG和直线FGH有两公共点F和G，
∴该两直线必重合，也就是E、F、G、H同在一直线上。



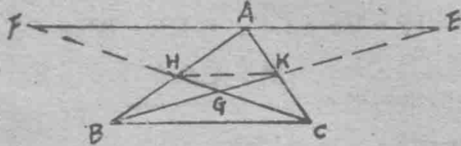
（图15）

18、设G是△ABC的重心，延长BG、CG至E、F，使GE = 2BG，且GF = 2CG，求证E、A、F三点同在一直线上。

【证】 如图16，令BE交AC于K，CF交AB于H，

∵ G为△ABC的重心，∴ $BG = \frac{1}{3}BE$，$GK = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{6}BE$，从而$BK = BG + GK = \frac{1}{2}BE$，又 BH = AH，

于是HK∥AE。同理可证HK∥AF。∵过HK外的一点A只可作一条直线平行于HK，∴E、A、F三点同在一直线上。



（图16）

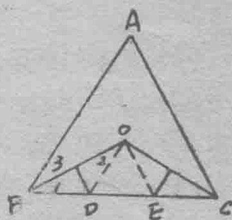
19、设O是正三角形△ABC的中心，求证BO与CO的中垂线必三等分BC边。

【证】如图17，∵ D是BO中垂线与BC的交点，

∴ DB＝DO， ∠1＝∠2，

∵ O是正△ABC的中心，

∴ ∠1＝∠3， 从而∠2＝∠3，于是OD∥AB。同理可证EC＝EO，OE∥AC。又∵△ABC为正三角形，

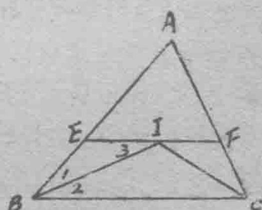


（图17）

∴ △ODE也是正三角形，从而BD＝DO＝DE＝OE＝EC，

即BD＝DE＝EC。

20、设I是△ABC的内心，过I引线平行于BC而交AB，AC于E，F，求证EF＝BE＋CF。



（图18）

【证】如图18，∵I是△ABC的内心，∴∠1＝∠2，

∵ $EI // BC$，∴$\angle 2=\angle 3$，于是$\angle 1=\angle 3$，

∴ $EI=BE$。

同理可证 $IF=CF$。又E、I、F在同一直线上，且I在E、F之间，

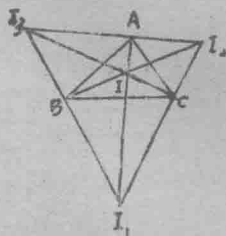
故 $EI+IF=BE+CF$，即$EF=BE+CF$。

21、设I、I_1、I_2、I_3顺次是△ABC的内心及对着A、B、C的旁心，求证：

（1）$\angle BIC=90°+\frac{1}{2}\angle A$；

（2）$\angle BI_1C=90°-\frac{1}{2}\angle A$；

（3）$\angle BI_2C=\angle BI_3C=\frac{1}{2}\angle A$。



（图19）

【证】（1）∵ I是△ABC的内心，

∴ $\angle BIC=180°-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle A)=90°+\frac{1}{2}\angle A$。

（2）∵ I_1是△ABC中对着A的旁心，

∴ $\angle IBI_1=\angle ICI_1=90°$，从而$\angle BI_1C=180°-\angle BIC=180°-(90°+\frac{1}{2}\angle A)=90°-\frac{1}{2}\angle A$。

（3）∵ I_2是△ABC中对着B的旁心，∴I_2是 BI与I_1C延线的交点，故$\angle BI_2C=90°-\angle BI_1C=90°-(90°-\frac{1}{2}\angle A)=\frac{1}{2}\angle A$。

∵ I_3是△ABC中对着C的旁心，

∴ I_3是CI与I_1B延线的交点。

故 $\angle BI_3C=90°-\angle BI_1C=\frac{1}{2}\angle A$。

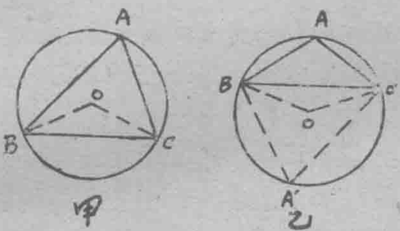
于是$\angle BI_2C=\angle BI_3C=\frac{1}{2}\angle A$。（图19）

22、设O是△ABC的外心，求证$\angle BOC$等于$2\angle A$或等

于$360° - 2\angle A$。

【证】 如图20，若$\angle A \leqslant 90°$，则$\triangle ABC$的外心O在$\triangle ABC$的形内或在边BC的中点上，此时$\angle BOC$，$\angle BAC$分别为$\triangle ABC$外接圆的圆心角和圆周角，$\therefore \angle BOC = 2\angle A$。

若$\angle A > 90°$，如图20乙，则外心O在$\triangle ABC$形外，此时于优弧$\overset{\frown}{BC}$上任取一点A'便有$\angle BOC = 2\angle A' = 2(180° - \angle A) = 360° - 2\angle A$。

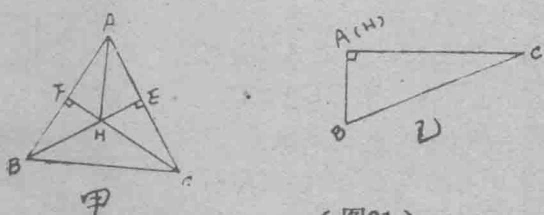


（图20）

23、设H是$\triangle ABC$的垂心，求证$\angle BHC$等于$180° - \angle A$或等于$\angle A$。

【证】 如图21甲，若$\angle A$为锐角或钝角时，

$\because$ H为$\triangle ABC$的垂心，$\therefore \angle BHC = \angle EHF = 180° -$



（图21）

$\angle A$。若$\angle A$为直角时，如图21乙，∵$\triangle ABC$的垂心G重合于A，∴$\angle BHC=\angle A$。

24、设有四点其中有一点是其余三点连成的三角形的垂心，则其余三点都有同样的性质。

这样的四点合称为一**垂心组**。

【证】 利用上题图，设H为$\triangle ABC$的垂心，则A为$\triangle BHC$三条高的交点，B为$\triangle AHC$三条高的交点，C为$\triangle AHB$三条高的交点，故A、B、C分别为$\triangle BHC$，$\triangle AHC$，$\triangle AHB$的垂心。

25、三角形的内心和三旁心构成一垂心组

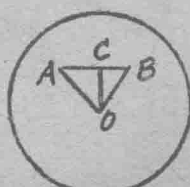
【证】 利用21题的图，∵I为$\triangle ABC$的内心，I_1, I_2，I_3为三旁心，

∴ $\angle IBI_3=\angle IBI_1=90°$，即B在$I_1I_3$连线上。同理A、C分别在$I_2I_3$，$I_1I_2$上。这时由于I是$\triangle I_1I_2I_3$的垂心，所以据24题可知四点I、$I_1$、$I_2$、$I_3$构成一垂心组。

第二节 关于园的定理（习题三）

1、一个线段的两端若在圆内，则整个线段在圆内。

【证】 如图22，线段AB的两端点A、B在⊙O内，作$OC\perp AB$，则AC上所有的点到O的距离都小于OA，BC上所有的点到O的距离都小于OB，且$OC<OA$，但已知OA，O

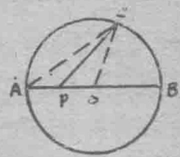


（图22）

B都小于半径，所以线段AB上所有的点到O的距离都小于半径，所以线段AB在圆内。

2、设AB是⊙O的直径，P是半线OA上的点，C是⊙O上的任意点，求证PA⩽PC⩽PB。

【证】 仅证当P位于半线OA上的O、A之间的情形，如图23，



（图23）

①若C异于A、B时，连OC、AC，

则∠ACP<∠ACO=∠PAC,

∴PA<PC,

∵ PC<PO+OC，而OC=OB,

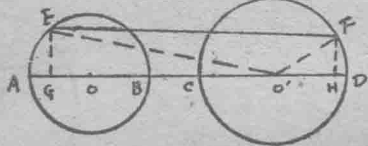
∴ PC<PO+OB=PB，于是PA<PC<PB；

②若C重合于A时，则PA=PC<PB；

③若C重合于B时，则PA<PC=PB。

因此，当P位于半线OA上的O、A之间时有PA⩽PC⩽PB。当P位于半线OA的其它位置时，可仿此证明。

3、设⊙O与⊙O′外离，连心线OO′交⊙O及⊙O′于A、B及C、D，四交点成{A、B、C、D}的顺序。今在⊙O及⊙O′上各任取一点E及F，求证BC⩽EF⩽AD。



（图24）

【证】 如图24，过E、F分别作连心线OO′的垂线，垂足为G及H，则BC⩽GH⩽EF。（当E、F分别重合于B、C时，前段取等号；当E、F分别重合于A、D或EF∥AD

时，后段取等号。)连$O'E$，$O'F$，则$EF<O'E+O'F$。

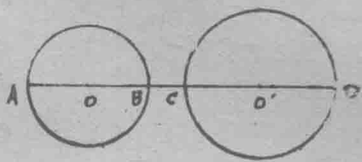
∵ $O'E<O'A$，$O'F=O'D$，∴ $EF<O'A+O'D=AD$，当E、F分别重合于A、D时，$EF=AD$，于是$EF\leqslant AD$。从而$BC\leqslant EF\leqslant AD$

4、设一直线上四点A、B、C、D排成{A、B、C、D}顺序，求证：

(1)直径各为AB、CD的两圆外离；

(2)直径各为AC、BD的两圆相交；

(3)直径各为AD、BC的两圆内含。



(图25)

【证】 如图25，设⊙O的半径为r，⊙O′的半径为r′，

(1)∵ $OO'=OB+BC+CO'>OB+CO'=r+r'$，

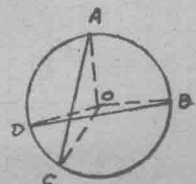
∴ 直径各为AB、CD的两圆外离。

(2)、(3)可仿此证明。

5、在圆上顺序取A、B、C、D四点，若$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{CD}>\overset{\frown}{DA}$，则弦$AC<BD$。

【证】 如图26，∵ $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{BC}>\overset{\frown}{CD}>\overset{\frown}{DA}$，

∴ $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CD}$、$\overset{\frown}{DA}$的度数均小于90°，从而BD弦所对的弧$\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}$，AC弦所对的弧$\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA}$均为劣弧，于是∠AOC的度量与$\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DA}$的度量相



(图26)