浙江省“十一五”重点建设教材

高职数学建模竞赛培训教程

戎 笑 于德明 主 编
孙 霞 宋 维 副主编

清华大学出版社

浙江省“十一五”重点建设教材

高职数学建模竞赛培训教程

戎　笑　于德明　主　编
孙　霞　宋　维　副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书汇集了高职院校学生和作者多年的数学建模竞赛经验，用尽可能少的篇幅，介绍了适合高职学生掌握的一些建模方法，例如初等模型、微积分模型、线性规划模型、微分方程模型、评价模型、图论模型、概率模型等。同时，本书通过实际案例介绍了各类建模方法，尽可能通过浅显易懂的讲解和数学软件来实现案例。附录给出了近年大学生数学建模的专科类竞赛题、MATLAB 软件的常用命令和部分优秀论文，方便学生参考。

本书可以作为高等职业院校各专业数学建模课程的教材，也可以作为高职高等数学教学的补充材料以及学生参加数学建模竞赛的培训教材。

图书在版编目(CIP)数据

高职数学建模竞赛培训教程/戎笑等主编. —北京：清华大学出版社，2010.9
ISBN 978-7-302-23845-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①戎… Ⅲ. ①数学模型—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ: ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 177022 号

责任编辑：束传政
责任校对：袁 芳
责任印制：杨 艳
出版发行：清华大学出版社　　　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京市清华园胶印厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　**印　张**：8　**字　数**：181 千字
版　次：2010 年 9 月第 1 版　**印　次**：2010 年 9 月第 1 次印刷
印　数：1～4000
定　价：15.00 元

产品编号：038279-01

前 言

FOREWORD

数学是自然的，数学概念、数学方法、数学思想的起源和发展都是自然的。优秀的数学教学，不仅使得人们能正确地理解数学，而且还教育人们学会如何去掌握和运用数学，后者事实上是更不易做好的，它绝不是一件可以“顺理成章”的事。有些人把掌握数学认为只是去抱住一个数学“工具箱”，这是一种习俗化的见解。所谓掌握好数学，首先是指掌握好数学的思维，这里的思维，主要是指数学的演绎思维。数学的演绎思维是一种本领，它与文学、语言和各种艺术一样。有了好的数学思维，还需要掌握运用数学的能力。通过数学建模，学生不仅仅能学习数学的演绎思维，还能从传统的数学教学中走出来，去应用数学，让杂乱无章的实际问题变得有序清晰，真正地感受数学的美妙。数学建模内容活泼、信息量大，不需要太多数学推导的过程，非常适合以技能性培养为主的高职学生学习。案例式的数学教学方法也比目前纯理论的数学教学更容易为高职学生所接受，数学建模可以作为高职学生数学教学的重要组成部分。

另外，大学生数学建模竞赛是学生展现自我的一个非常好的平台，学生的参与热情非常高。通过数学建模竞赛，不仅锻炼和培养了学生，也锻炼了一支教师队伍，教师可以通过竞赛辅导提高自身的理论水平和教学水平。本书的作者是浙江机电职业技术学院的一批教员，他们开设数学建模课程，从 2004 年起开始带领本校学生参加全国大学生数学建模竞赛，成绩优异，辅导的学生多次获全国大学生数学建模竞赛一等奖。他们在数学建模教学方面积累了丰富的经验。本书就是这一经验的结晶。

本书的特点是：教学内容选取充分考虑高职学生实际情况；紧紧围绕全国大学生数学建模竞赛，与社会热点问题相结合；教材编写过程中关注学生普适性培养与个性化辅导相结合；着重于学生开放思维的培养。

全书共 10 章，由戎笑、于德明主编，孙霞、宋维副主编。各章编写人员如下：戎笑（第一、六、十章）、王珍娥（第二章）、孙霞（第四章）、宋维（第五章）、孙洁（第七章）、于德明（第八章）、徐家利（第九章）；第三章和附录由本书所有作者合作完成。

由于编者水平有限，且数学建模用到的数学知识包罗万象，书中难免有疏漏和不妥之处，恳请专家和广大读者批评指正。作者 E-mail：rongxiaohz@163.com。

编　者

2010 年 5 月于杭州

目 录

CONTENTS

第一章 数学模型和数学建模 ······ 1

第一节 数学模型 ······ 1
第二节 数学建模 ······ 1
第三节 数学建模竞赛介绍 ······ 3
第四节 数学建模需要的能力 ······ 4
第五节 数学建模需要的基本知识 ······ 6

第二章 初等模型 ······ 8

第一节 椅子问题 ······ 8
第二节 银行借贷问题 ······ 9
第三节 双层玻璃的功效 ······ 11
第四节 人造卫星测控站的优化分布模型 ······ 13
第五节 公平的席位分配问题 ······ 15
习题 ······ 18

第三章 微积分模型 ······ 19

第一节 n 级混联电路问题 ······ 19
第二节 城市垃圾的处理 ······ 21
第三节 陈酒出售的最佳时机问题 ······ 22
第四节 可口可乐易拉罐的设计问题 ······ 24
第五节 合理减肥问题 ······ 27
第六节 保险收益模型 ······ 28
习题 ······ 29

第四章 线性规划模型 ······ 31

第一节 饲料配比问题——线性规划 ······ 31
第二节 汽车厂生产计划问题——整数线性规划 ······ 33
第三节 会议筹备问题——0-1 规划 ······ 35
习题 ······ 38

第五章　微分方程模型 …………………………………………………… 40

第一节　崖高的估算 …………………………………………………… 40
第二节　人口增长的预报 ……………………………………………… 41
第三节　海上缉私问题 ………………………………………………… 44
习题 ……………………………………………………………………… 47

第六章　评价模型 …………………………………………………………… 48

第一节　多变量综合评价法 …………………………………………… 48
第二节　电脑的选购——层次分析法 ………………………………… 50
第三节　蠓虫分类问题——判别分析法 ……………………………… 58
习题 ……………………………………………………………………… 64

第七章　图论模型 …………………………………………………………… 66

第一节　路径选择问题——最短路 …………………………………… 66
第二节　中国邮递员问题——欧拉图的应用 ………………………… 68
习题 ……………………………………………………………………… 70

第八章　概率模型 …………………………………………………………… 71

第一节　报童的诀窍 …………………………………………………… 71
第二节　随机人口模型 ………………………………………………… 73
习题 ……………………………………………………………………… 75

第九章　数据处理 …………………………………………………………… 76

第一节　数据的收集与整理 …………………………………………… 76
第二节　数据的拟合 …………………………………………………… 79
第三节　数据的回归分析 ……………………………………………… 82
习题 ……………………………………………………………………… 90

第十章　数学建模论文的书写 ……………………………………………… 91

附录 A　历年全国大学生数学建模竞赛题目(大专组) …………………… 94

附录 B　MATLAB 常用的基本函数命令 …………………………………… 114

参考文献…………………………………………………………………………… 121

第一章

数学模型和数学建模

第一节　数学模型

数学模型(Mathematical Model)是用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际问题本质属性的抽象而又简洁的刻画。它或能解释某些客观现象,或能预测未来的发展规律,或能为控制某一现象的发展提供某种意义上的最优策略或较好策略。简言之,数学模型是用数学术语对部分现实世界的描述。

其实早在学习初等数学时,就已经有数学模型了,只是为了着重讲解某个知识点,往往人为地设置一些简化的问题,然后进行求解。例如,初等数学中一个简单的应用题:用铁皮做罐头盒,每张铁皮单独制盒身 25 个,单独制盒底 40 个。一个盒身与两个盒底配套,现有 36 张铁皮,这些铁皮恰好能做多少罐头盒?

根据建立数学模型的目的和问题的背景,对上述问题做出必要的简化假设(比如不考虑实际的裁剪法,仅从计算面积出发考虑问题);用字母表示待求的未知量(x 代表罐头盒数);利用相应的面积知识规律$\left(\text{盒身面积是一张铁皮的}\frac{1}{25}\text{,盒底面积是一张铁皮的}\frac{1}{40}\right)$,列出数学式子$\left(\text{一元一次方程}\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{40}\times 2\right)x=36\text{,也就是一个简单的数学模型}\right)$;求出这个数学模型的答案($x=400$);用这个答案解释原问题(36 张铁皮恰好能做 400 个罐头盒);最后可以用实际来验证上述结果。从这个问题中可以看到,其简化的假设对问题的解决非常有帮助,而实际问题往往要考虑更多的因素,例如具体的裁剪法对问题的影响等,真实的数学模型往往要复杂很多。

第二节　数学建模

一、什么是数学建模

数学建模(Mathematical Modeling)是指对现实世界的一特定对象,为了某一特定目的,做出一些重要的简化和假设,运用适当的数学工具得到一个数学结构,用它来解释特定现象的现实性态,预测对象的未来状况,提供处理对象的优化决策和控制,设计满足某种需要的产品等。

二、数学建模的一般步骤

数学建模面临的实际问题是多种多样的,建模的目的不同,分析的方法不同,采用的

数学工具不同，所得模型的类型也不同，我们不能指望归纳出若干条准则，适用于一切实际问题的数学建模方法。建模要经过哪些步骤并没有一定的模式，下面介绍的步骤是建模的一般过程，具有一定的普遍意义，如图 1-1 所示。

问题分析→模型假设→模型建立→模型求解→模型分析与验证→模型应用

图 1-1　数学建模步骤示意图

1. 问题分析

了解问题的实际背景，明确建模目的，搜集必要的信息如现象、数据等，尽量弄清对象的主要特征，通过深入调查研究，虚心向实际工作者请教，或利用现有的网络资源等，尽量掌握第一手资料。将现实问题“翻译”成抽象的数学问题，形成一个比较清晰的“问题”。其“翻译”的过程是数学建模非常关键的一步，对于复杂的数学模型往往不能一次到位，需要对问题进行深入研究，在研究过程中不停地加深理解，明确目标，其实质是对实际问题的数学提炼。

2. 模型假设

根据前面对实际问题的研究，抓住问题的本质，忽略次要因素，作出必要的、合理的简化假设，确定模型所涉及的主要因素并抽象为变量，对于建模的成败这是非常重要和困难的一步。假设不合理或太简单，会导致模型过于粗糙，得出的结果是错误的或无用的；假设过分详细，试图把复杂对象的众多因素都考虑进去，会使模型建立者很难或无法继续下一步的工作。常常需要在合理与简化之间作出恰当的折中。这种恰当的折中需要模型建立者具有丰富的想象力、洞察力、判断力以及经验。有能力的模型建立者往往会在问题的研究过程中，不停地修正模型的假设，找到假设的平衡点，使其符合问题研究的本质。

3. 模型建立

根据所做的假设，用数学的语言、符号描述对象的内在规律，建立包含常量、变量等的数学模型，如优化模型、微分方程模型、评价模型、图论模型、概率模型等。这里除了需要一些相关学科的专门知识外，还常常需要较为广阔的应用数学方面的知识。要理解数学运算的本质，任何一种数学计算方法，例如导数、积分，都需要应用者对其运算本质的理解，绝不是仅仅学会了计算，这对于数学建模者来说尤为重要。纯粹的计算也许在做一些纯粹的数学练习题时还有一定的用处，但在建模过程中，没有实际意义的计算是没有办法使用的，只有知道数学运算的本质，才能合理地使用这些数学运算方法。数学建模是变通的、灵活的，数学思想的应用是其真正的灵魂。同时建模时还应遵循的一个原则是：尽量采用简单的数学工具，因为你的模型总是希望更多的人了解和使用，而不是只供少数专家欣赏。

4. 模型求解

模型可以采用解方程、画图形、优化方法、数值计算、统计分析等各种数学方法，特别是数学软件进行求解。近年来计算机技术高速发展，数学软件和网络的功能日益强大，

MATLAB、Mathmatic、Lingo、Lindo 等数学软件慢慢地进入了学生的课堂，学生的计算机应用能力越来越强，对数学软件的接受能力也非常好。让学生从繁琐、精细的数学计算中走出来，着重于数学的应用，也是数学学习的一个方向。

5. 模型分析与检验

对求解结果进行数学上的分析，如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的灵敏性分析、对假设的强健性分析等，是数学建模的重要组成部分。另外，把求解和分析结果“翻译”回到实际问题，与实际的现象、数据比较，检验模型的合理性和适用性。这一步对于模型是否真的有用非常关键，要以严肃认真的态度对待。如果结果与实际不符，问题常常出在模型假设上，应该修改、补充假设，重新建模，如图 1-1 中的虚线所示，有些模型要经过几次反复，不断完善，直到检验结果满意。

6. 模型应用

数学模型是将现象加以归纳、抽象的产物，它源于现实，又高于现实。只有当数学建模的结果经受住现实对象的检验时，才可以用来指导实际。

应当指出，并不是所有问题的建模都要经过这些步骤，有时各步骤之间的界限也不那么分明，建模时不要拘泥于形式上的按部就班。另外，需要指出，本书的重点不在于介绍现实问题的数学模型(Mathematical Model)是什么样子(其数学的理论性相对比较强)，而是要讨论建立数学模型(Mathematical Modeling)的全过程，也就是主要侧重于模型的应用。建立数学模型下面简称为数学建模或建模。

第三节　数学建模竞赛介绍

美国大学生数学建模竞赛(MCM/ICM)，是一项国际级的竞赛项目，为现今各类数学建模竞赛之鼻祖。MCM/ICM 是 Mathematical Contest in Modeling 和 Interdisciplinary Contest in Modeling 的缩写，即“数学建模竞赛”和“交叉学科建模竞赛”。MCM 始于 1985 年，ICM 始于 2000 年，由 COMAP(the Consortium for Mathematics and Its Application，美国数学及其应用联合会)主办，竞赛以三名学生组成一个队，赛前有指导教师培训。赛题来源于实际问题，比赛时要求每个队就选定的赛题在连续三天的时间里写出论文。数学建模竞赛宗旨是鼓励大学生对范围并不固定的各种实际问题予以阐明、分析并提出解法，通过这样一种方式鼓励师生积极参与并强调实现完整的模型构造的过程。这项赛事自诞生起就引起了越来越多的关注，逐渐有其他国家的高校参加。我国自 1989 年起陆续有高校参加美国大学生数学建模竞赛。

1992 年起我国开始举办自己的大学生数学建模竞赛，是全国高校规模最大的课外科技活动之一，并成为教育部组织的全国大学生十项学科竞赛之一。中国大学生数学建模竞赛(China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling，CUMCM)主办机构是教育部高等教育司和中国工业与应用数学学会(CSIAM)。全国大学生数学建模竞赛是全国高校规模最大的课外科技活动之一。竞赛宗旨：创新意识、团队精神、重在参与、公平竞争。竞赛时间为每年 9 月第二个星期五至第三个星期一(共 3 天，72 小时)举行，竞赛

面向全国大专院校的学生，不分专业。竞赛分甲、乙两组，甲组竞赛所有大学生均可参加，乙组竞赛只有大专生(包括高职高专生)可以参加。竞赛开始后，赛题将公布在指定的网址供参赛队下载，参赛队在规定时间内完成答卷，并准时交卷。竞赛期间参赛队员可以使用各种图书资料、计算机和软件，可在互联网上查询资料。

竞赛题目一般来源于工程技术和管理科学等方面经过适当简化加工的实际问题(社会热点问题)，不要求参赛者预先掌握深入的专门知识，只需要学过高等学校的数学课程。题目有较大的灵活性供参赛者发挥其创造能力。参赛者应根据题目要求，完成一篇包括模型的假设、建立和求解、计算方法的设计和计算机实现、结果的分析和检验、模型的改进等方面的论文(即答卷)。竞赛评奖以假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰程度为主要标准。

数学建模竞赛与普通数学竞赛有很大的区别。在竞赛的宗旨上，普通数学竞赛考查参赛者掌握数学理论的水平以及解决理论问题的技能技巧；而数学建模竞赛考查参赛者利用数学及各科知识、计算机等技术手段解决实际问题的综合能力，鼓励大学生参与解决实际问题的全过程。在竞赛的内容上，普通数学竞赛题目为数学理论题；而数学建模竞赛题目来自于实际问题，且问题涉及的领域很广泛。在竞赛的形式上，普通数学竞赛为闭卷，个人独立解题，题目一般不止 1 个；而数学建模竞赛为开卷，可使用任何非生命的资源和团体，题目只有 1 个。在答卷评阅上，普通数学竞赛的答案是唯一的；而数学建模竞赛允许有不同的答案，着重建模思想及实际眼光。

第四节　数学建模需要的能力

数学建模，对于那些初次接触的人来说，总是充满了畏惧心理，对自身的能力没有充分的认识，不知道自己应该具备什么条件，才能够学习数学建模这门“深奥”的学问，能够参加数学建模竞赛。其实在前面的介绍中，我们已经提到，简单的数学建模在初中数学中就有，数学建模并不可怕。学习数学建模者，一方面，可以补充一些相关的数学知识和一些成熟的经典数学模型，这将在我们后面的各个章节中安排；另一重要方面，在学习知识的同时，一定要注意自身各种能力的培养，这是数学建模倡导的，更是它有别于纯粹的数学研究的地方。下面我们提出几种能力的要求，希望学习者在学习过程中努力提高。

1. 应用数学进行分析、推理和计算的能力

要有应用数学的意识、数学的眼光，要有从数学的角度观察事物、阐释现象、分析问题的能力。传统数学教育的内容选择往往“理论”占多数，比较强调数学的逻辑性、严谨性、系统性和理论性，重复严谨的数学概念，讲授主要为解题服务的技巧，学习者的应用数学意识比较淡薄，在学习与社会实践中缺乏用数学的意识，当然无从谈起用数学解决问题。数学建模是应用数学的学习，其主要是培养学习者应用数学的能力，帮助学习者学会用数学知识分析问题，使复杂问题简单化、抽象内容形象化、动态内容可视化。

2. 用数学语言表达实际问题及用普通人能理解的语言表达数学结果的能力

数学语言是伴随着数学自身的发生和发展而逐渐成长起来的，是储存、传承和加工数

学思想信息的工具，具有抽象性、准确性、简约性和形式化等特点。数学中的文字语言不是自然语言文字的简单移植或组合，而是经过一定的加工、改造、限定、精确化而形成的。并且这些语言具有数学学科特指的确定的语义，常以数学概念、术语的形式出现。缺乏数学语言表达（即数学化）能力的学习者不能把自然语言形式转化为符号语言或数学表示形式，就没有办法利用数学工具去解决问题。另一方面，数学的计算结果，还需要"翻译"成普通人能够理解的语言，其应用才能为大多数人接受。作为数学建模的学习者应当具有这种"翻译"能力。

3. 应用计算机及相应数学软件的能力

数学建模是一门内容很丰富的课程，它把很多相关的学科与数学都联系在一起。数学模型的求解往往需要借助计算机来实现。数学软件可以使冗繁变为简洁高效，使得学习者敢想、敢试、敢创新，也使学习者将有限的精力从运算中解放出来，更多的时间拿来思考问题和建模。从另一个角度上说，避开了枯燥的运算，使得数学学习变得生动精彩。

4. 文献检索能力，自学能力，组织、协调、管理能力

目前网上资源非常丰富，很多数学知识可以从大量的网上精品课程中学习到，学习者也可以通过百度、谷歌等搜索引擎对需要的知识进行搜索；还可以通过万方、维普、CNKI等网上数据库，进行文献的检索。合理地利用网上资源，对于数学建模者来说是非常重要的。数学建模所涉及的知识面非常广泛，对于学习者来说，掌握所有的相关知识几乎是不可能的，其自我学习的能力能够帮助学习者对检索的知识进行消化和吸收，最终为己所用。另一方面，数学建模实践，特别是数学建模竞赛不是依赖一人的力量可以完成的，团队的协作能力起着至关重要的作用。良好的组织、协调、管理能力能使团队根据工作任务，对资源进行分配，同时控制、激励和协调群体活动，使之相互融合，从而实现目标。

5. 创造力、想象力、联想力和洞察力

数学建模的过程是一个创新的过程，数学建模强调的是获取新知识的能力，是解决问题的过程，而不是知识与结果。数学建模不同于理论数学，其对实际问题的研究往往并不存在所谓的标准答案，随着对问题的深入理解，解决问题将是一个不断创新的过程。让学生去探讨一个非常实际的问题，学生会有浓厚的兴趣，其自主的创新能力将得到很好的培养。想象力指人们在原有知识的基础上，将新感知的形象与记忆中的形象相互比较、重新组合、加工处理，创造出新的形象，是一种形象思维活动。洞察力指人们在充分占有资料的基础上，经过初步分析能迅速抓住主要矛盾，舍弃次要因素，简化问题的层次，对可以用哪些方法解决面临的问题，以及不同方法的优劣作出判断的能力。除了想象、洞察这些属于形象思维、逻辑思维范畴的能力之外，直觉和灵感，也就是联想力往往也起着不可忽视的作用。

每个人的能力是有限的，从大学生数学建模竞赛的角度上说，竞赛是一个团队的合作过程，有时个人能力的不足是可以通过团队的协作来补足的。三人一组的竞赛小组，三个人是可以分工合作的，例如一个参赛者有较强的数学分析、推理、证明的能力，一个参赛者有较强的计算机软件应用能力，一个参赛者有较好的语言表达能力，往往这样的一个团队组合通过密切的配合可以凭借优势互补，依靠团队的力量攻克很多模型。

第五节　数学建模需要的基本知识

一、必要的数学理论知识

学习数学建模者，需要有一定的初等数学基础，同时需要掌握高等数学中的一些知识，比如极限、导数、定积分、空间解析几何、多元微积分、微分方程、级数等；还需要掌握线性代数中的一些知识，比如行列式、矩阵的计算、线性方程组的求解、特征值与特征向量等；并对图论、概率等方面的知识要有一定的了解。数学建模涉及的数学知识面比较广，这些数学知识有一部分以前是接触过的，也有些以前从未接触过。对于这部分从未接触过的知识，可以在学习某类模型需要时，采用教师简单讲解，学生自学的方式去了解、掌握。

二、简单的数学模型

本书主要针对大专类学生，特别是高等职业教育类的学生。这类学生数学基础相对比较薄弱，进入大学后，高等数学的学时比例也不高，学习的内容也非常有限。本书希望通过介绍一些常见模型，例如初等模型、数学规划模型、微分方程模型、离散模型、概率模型、统计回归模型等，通过这些模型的讲解，树立起基本的数学建模思想。

三、计算机的使用

数学建模需要各种计算机技术手段的配合，如查阅各种文献资料、数学符号的输入、文档排版、使用各种数学软件包等。这里简要介绍几种数学软件包。

1. MATLAB

MATLAB是矩阵实验室（Matrix Laboratory）之意。除具备卓越的数值计算能力外，它还提供了专业水平的符号计算、文字处理、可视化建模仿真和实时控制等功能。MATLAB的基本数据单位是矩阵，它的指令表达式与数学工程中常用的形式十分相似，MATLAB拥有数百个内部函数的主包和三十几种工具包（Toolbox）。开放性使MATLAB广受用户欢迎，除内部函数外，所有MATLAB主包文件和各种工具包都是可读、可修改的文件，用户通过对源程序的修改或加入自己编写程序构造新的专用工具包。

2. Mathematica

Wolfram Research是高科技计算机运算（Technical Computing）的先驱，由复杂理论的发明者Stephen Wolfram成立于1987年，在1988年推出高科技计算机运算软件Mathematica。Mathematica是一套整合数字以及符号运算的数学工具软件，提供了全球超过百万的研究人员、工程师、物理学家、分析师以及其他技术专业人员容易使用的顶级科学运算环境。目前已在学术界、电机、机械、化学、土木、信息工程、财务金融、医学、物理、统计、教育出版、OEM等领域广泛使用。Mathematica具有高阶的演算方法、丰富的数学函数库和庞大的数学知识库，同时具有非常强的运算能力。

3. LINDO 和 LINGO

LINDO(Linear,INteractive,and Discrete Optimizer)主要用于解决线性规划(Linear Programming,LP)和整数规划(Integer Programming,IP)问题。LINGO 主要用于求解非线性规划(NLP)和二次规则(QP)。其中 LINDO、LINGO 学生版可解决最多达 300 个变量和 150 个约束的规则问题,并且容易阅读、了解和修改。

第 二 章

初等模型

初等模型是指用较简单初等的数学方法建立起来的数学模型。对于数学建模，判断一个模型的优劣完全在于模型的正确性和应用效果，而不在于采用多少高深的数学知识。在同样的应用效果下，用初等方法建立的数学模型可能更优于用高等方法建立的数学模型。本章利用初等数学的方法，通过几个实例给出数学建模的基本过程。

第一节　椅 子 问 题

一、问题的提出

日常生活中经常碰到这样一个事实，把椅子放在不平的地面上，通常只有三只脚着地，放不稳。然而只需稍挪动几次，就可以使四只脚同时着地，放稳了。这个看来似乎与数学无关的现象，你能用数学语言给以描述并用数学工具来证实吗？

二、问题的解决

1. 问题假设

(1) 椅子四条腿一样长，椅脚与地面接触处可视为一个点，四脚的连线呈正方形。

(2) 地面高度是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况)，即地面可视为数学上的连续曲面。

(3) 对于椅脚的间距和椅腿的长度而言，地面是相对平坦的，使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地。

2. 问题分析

模型构成的中心问题是用数学语言把椅子四只脚同时着地的条件和结论表示出来。

首先要用变量表示椅子的位置。注意到椅脚连线呈正方形，以中心为对称点，正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变，于是可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置。在图 2-1 中椅脚连线为正方形 $ABCD$，对角线 AC 与 x 轴重合，椅子绕中心点 O 旋转角度 θ 后，正方形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 的位置，所以对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示了椅子的位置。

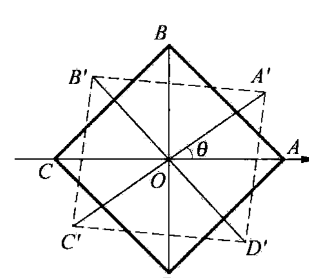


图 2-1

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来。如果用某个

变量表示椅脚与地面的垂直距离，那么当这个距离为零时，就是椅脚着地了。椅子在不同位置时椅脚与地面的距离不同，所以这个距离是椅子的位置变量 θ 的函数。

虽然椅子有四只脚，因而有四个距离，但是由正方形的中心对称性，只要设两个距离函数就行了。记 A、C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，则 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 皆大于等于零。由假设(2)知，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 都是连续函数；由假设(3)知，椅子在任何位置至少有三只脚着地；所以对于任意的 θ，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为零。当 $\theta=0$ 时，不妨设 $g(\theta)=0$，$f(\theta)>0$。这样，改变椅子的位置使四脚同时着地，就归结为证明如下的数学命题：

已知 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对于任意的 θ，$f(\theta)\cdot g(\theta)=0$，且 $g(0)=0$，$f(0)>0$，则必存在 θ_0，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

可以看到，引入了变量 θ 和函数 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 后，就把模型的假设条件和椅脚同时着地的结论用简单、精确的数学语言表述出来了，从而构成了这个实际问题的数学模型。

3. 模型求解

上述命题有多种证明方法，这里只介绍其中的一种。

将椅子旋转 $90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$，对角线 AC 与 BD 的位置互换，由 $g(0)=0$，$f(0)>0$ 知，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$。

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $h(0)>0$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$。由 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的连续性知，$h(\theta)$ 也在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续。根据闭区间上连续函数的零点定理知，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内必存在一点 θ_0，使得 $h(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$。又因为 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

由于这个问题非常直观和简单，模型的分析和检验就略去了。这个模型的巧妙之处在于用一元变量 θ 表示了椅子的位置，用 θ 的两个函数表示了椅子的四脚与地面的距离。至于利用正方形的中心对称性以及旋转 90° 并不是本质的东西。

思考：学习者可以考虑椅子的四脚连线呈**长方形**的情形。

第二节　银行借贷问题

一、问题的提出

随着人们生活水平的提高，同样也随着房价的不断上升，人们开始向银行申请个人住房贷款。其还款方式有以下两种。

(1) 等本不等息递减还款法：即每月还贷本金相同，利息逐月减少。

(2) 等额本息还款法：即每月以相等的额度平均偿还贷款本息。

请你分析这两种还贷方式的利弊。

二、问题的解决

设贷款 20 万元，分 30 年还清，年利率为 5.04%(即月利率 0.42%)。

1. 第一种还款方法

每月还本金$\frac{200\ 000}{30\times 12}=555.56$ 元，而第一个月需要利息为 $200\ 000\times 0.0042=840$ 元，第一个月需还总额为 1395.56 元。

第二个月还本金 555.56 元，还息为$(200\ 000-555.56)\times 0.0042=837.67$ 元，总额为 1393.23 元。

每月还款额公式为：

$$\text{每月还款额}=\frac{\text{贷款本金}}{\text{还款期数}}+(\text{贷款本金}-\text{已还本金})\times\text{月利率}$$

最后一个月还款仅为 $555.56+555.56\times 0.0042=557.89$ 元。可以计算按此种还款方式累计还款总额 351 620 元，还款总利息为 151 620 元。

2. 第二种还款方式

为方便计算，设贷款本金为 a_0，月利率为 r，第 n 个月后欠款金额为 a_n，每月还款额度为 x，则第一个月后欠款额为欠款总额 $a_0(1+r)$减去已还额度 x。各月的欠款金额如下：

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_0(1+r)-x\\
a_2 &= a_1(1+r)-x\\
&\vdots\\
a_{n-1} &= a_{n-2}(1+r)-x\\
a_n &= a_{n-1}(1+r)-x
\end{aligned}$$

数列的后一项减前一项，依次可得：

$$\begin{aligned}
a_1-a_0 &= (a_1-a_0)(1+r)^0\\
&\vdots\\
a_{n-1}-a_{n-2} &= (a_1-a_0)(1+r)^{n-2}\\
a_n-a_{n-1} &= (a_1-a_0)(1+r)^{n-1} \qquad (*)
\end{aligned}$$

此(*)式表明数列$\{a_n-a_{n-1}\}$是以 a_1-a_0 为首项，$1+r$ 为公比的等比数列。

将此 n 个式子相加可得

$$a_n-a_0=(a_1-a_0)\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}=(a_1-a_0)\frac{(1+r)^n-1}{r}$$

故有

$$a_n=a_0+(a_1-a_0)\frac{(1+r)^n-1}{r} \tag{2-1}$$

若 n 为还贷期数，n 个月后已全部还清，欠款金额应为 0 元。为了求出每月的平均还款额度 x，令 $a_n=0$，将 $a_1=a_0(1+r)-x$ 代入式(2-1)，则可得

$$x=a_0r\frac{(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$$

即每月还款额公式为：

$$每月还款额 = 贷款本金 \times 月利率 \times \frac{(1+月利率)^{还款期数}}{(1+月利率)^{还款期数}-1} \tag{2-2}$$

按上述本金 $a_0=200\,000$，月利率 $r=0.0042$，还款期数 $30\times12=360$，代入式(2-2)得

$$x = 200\,000 \times 0.0042 \times \frac{(1+0.0042)^{360}}{(1+0.0042)^{360}-1} = 1078.54$$

累计还款总额为 388 274.4 元，还息总额 188 274.4 元。

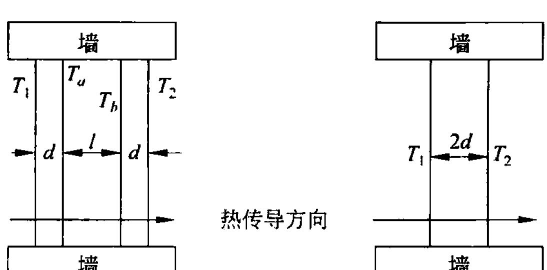
第一种方法（等额本金）这种还款方式是前期还款压力比较大，后期还款压力小，这种还款方式最省利息。第二种方法（等额本息）这种还款方式是每月的还款额相等，还款压力相对较小，但是缴的利息较多。从银行的角度说，等额本金还款法，由于顾客一开始就多还本金，所以越往后所占银行本金越少，因而所产生的利息也少。而等额本息还款法则不同，开始还的贷款本金较少，占用银行资金相对也较多，所以利息也会相应增加。看来贷款买房还有学问呢。

思考：学习者还可以利用本题的模型，假设提前还款，两种还款方式所还的本息总额又各会是多少呢？对买房者选择贷款是否会有影响呢？

第三节　双层玻璃的功效

一、问题的提出

现在有很多建筑物的窗户大多采用双层玻璃，即窗户装两层玻璃且中间留有一定空隙（如图 2-2(a)所示），两层厚度为 d 的玻璃夹着一层厚度为 l 的空气，这样是为了隔热和保暖，即减少室内向室外的热量流失。我们要建立一个模型来描述热量通过窗户的传导（即流失）过程，并将双层玻璃窗与用同样材料做成的单层玻璃窗（如图 2-2(b)所示玻璃窗厚度为 $2d$）的热量传导进行对比，对双层玻璃能够减少多少热量损失给出定量分析结果。



(a) 双层玻璃窗图　(b) 单层玻璃窗图

图 2-2　玻璃窗模型

二、问题的解决

1. 模型假设

(1) 热量的传播过程只有传导，没有对流，即假定窗户密封性能很好，两层玻璃之间