



普通高等学校基础课程类应用型规划教材

高等数学学习指导

杨 硕 汪彩云 李 霞 编著



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等学校基础课程类应用型规划教材

高等数学学习指导

杨 硕 汪彩云 李 霞 编著

北京邮电大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是普通高等学校基础课程类应用型规划教材《高等数学(上、下)》(北京邮电大学世纪学院数理教研室编著)之配套指导书,突出了高等数学课程的特色及应用型高校的教学特点,总结归纳了《高等数学(上、下)》教材的知识体系,充分考虑到学生的学习状况和接受程度,将典型的解题方法采用流程图的方式一一展示给读者,新颖独特,清晰明了,简洁直观,通俗易懂。

本书共十二章,包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数的微分法及其应用、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数,每章主要有知识结构、解题方法流程图、典型例题、教材习题选解等内容。

本书结构严谨、逻辑清晰,文字流畅、叙述详尽,是学生和自学者学习的好帮手,可供普通高等学校和独立学院工科各专业的学生选作参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/杨硕,汪彩云,李霞编著. —北京:北京邮电大学出版社,2010.9

ISBN 978-7-5635-2405-1

I. ①高… II. ①杨…②汪…③李… III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 174795 号

书 名: 高等数学学习指导

作 者: 杨 硕 汪彩云 李 霞

责任编辑: 王丹丹 赵 旭

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)

发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt.edu.cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京源海印刷有限责任公司

开 本: 787 mm×960 mm 1/16

印 张: 20.75

字 数: 449 千字

印 数: 1—3 000 册

版 次: 2010 年 9 月第 1 版 2010 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2405-1

定 价: 35.00 元

• 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

前 言

高等数学是理工科专业一门非常重要的基础课程,它具有学时多、学习周期长、学分高、难度大、理论性强、抽象等特点,可以说它是一门让一些学生如虎添翼,又让一些学生垂头丧气的课程,是一门让教师和学生又爱又恨的课程. 教师们也在不断思考,不断探索,既要沿袭千百年的基本数学知识和技能传授给学生,又不能固守成规,一成不变;既要坚守传统数学的严谨,又要兼顾日新月异的变革与创新,还要面对当今信息社会和知识经济的挑战和冲击,这都是作为数学工作者和教育工作者必须面对和思考问题,尤其是在高等教育由精英教育逐渐向大众教育转变的过程中,对于培养应用型人才培养模式的探讨就显得尤为重要.

作为以培养应用型、创新型人才为主要目标的工科院校,我们也在进行着各种尝试. 2009年8月和2010年1月,我们分别出版了普通高等学校基础课程类应用型规划教材《高等数学(上,下)》,本书是与之配套的指导书. 它突出了高等数学课程的特色及应用型高校的教学特点,总结归纳了《高等数学(上,下)》教材的知识体系,对典型例题的选配力求典型多样,着重于基本概念和基本方法的训练,难度上层次分明,尤其注意解题方法的总结,强调对学生的思维能力、自学能力、实际应用能力和创新意识的培养. 充分考虑到学生的学习状况和接受程度,本书将每个章节中典型的解题方法采用流程图的方式一一展示给读者,新颖独特,清晰明了,简洁直观,通俗易懂,对于帮助学生掌握必要的解题方法能起到事半功倍的效果.

本书共十二章,包括:函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分、无穷级数. 每章主要有知识结构、解题方法流程图、典型例题、教材习题选解等内容. 直观、形象的图表总结,准确、精炼的要点提取,重点题型的分析解答,以及习题选解,突出了教材中的重点和难点,便于读者快速复习,高效掌握,形成稳固的知识体系,为解题能力和数学思维水平的提高打下坚实的基础.

本书在编写过程中,非常注意博采众家之长,参考了诸多相关的同类辅导书和学习指导,也融会了编者多年的教学经验. 北京邮电大学出版社从立项、编审到出版都给与了热情的支持和帮助,在此表示深深的谢意! 也感谢数理教研室其他老师的帮助!

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,不足之处,在所难免,恳请广大专家、同行和读者多提宝贵意见,以便在今后的教学实践中不断地完善和提高.

作 者

目 录

第 1 章 函数	1
1.1 知识结构	1
1.2 典型例题	1
1.3 教材习题选解	3
习题 1.1	3
习题 1.2	3
习题 1.3	4
习题 1.4	5
习题 1.5	5
综合练习题.....	6
第 2 章 极限与连续	13
2.1 知识结构.....	13
2.2 解题方法流程图.....	14
2.3 教材习题选解.....	17
习题 2.1	17
习题 2.2	17
习题 2.3	18
习题 2.4	19
习题 2.5	20
习题 2.6	21
习题 2.7	22
综合练习题	23

第 3 章 导数与微分	33
3.1 知识结构	33
3.2 典型例题	34
3.3 教材习题选解	38
习题 3.1	38
习题 3.2	40
习题 3.3	42
习题 3.4	43
习题 3.5	45
综合练习题	46
第 4 章 微分中值定理与导数的应用	54
4.1 知识结构	54
4.2 解题方法流程图	55
4.3 典型例题	56
4.4 教材习题选解	61
习题 4.1	61
习题 4.2	62
习题 4.3	65
习题 4.4	66
习题 4.5	68
习题 4.6	69
综合练习题	70
第 5 章 不定积分	79
5.1 知识结构	79
5.2 解题方法流程图	79
5.3 典型例题	81
5.4 教材习题选解	87
习题 5.1	87
习题 5.2	88
习题 5.3	91
习题 5.4	92
综合练习题	95

第 6 章 定积分	101
6.1 知识结构	101
6.2 解题方法流程图	102
6.3 典型例题	103
6.4 教材习题选解	107
习题 6.1	107
习题 6.2	107
习题 6.3	109
习题 6.4	110
习题 6.5	111
习题 6.6	113
综合练习题	116
第 7 章 微分方程	128
7.1 知识结构	128
7.2 解题方法流程图	129
7.3 典型例题	131
7.4 教材习题选解	137
习题 7.1	137
习题 7.2	137
习题 7.3	138
习题 7.4	139
习题 7.5	141
习题 7.6	142
习题 7.7	143
习题 7.8	144
综合练习题	147
第 8 章 空间解析几何与向量代数	158
8.1 知识结构	158
8.2 解题方法流程图	159
8.3 典型例题	159
8.4 教材习题选解	165
习题 8.1	165

习题 8.2	166
习题 8.3	167
习题 8.4	168
习题 8.5	170
习题 8.6	171
习题 8.7	172
综合练习题.....	174
第 9 章 多元函数的微分法及其应用	183
9.1 知识结构	183
9.2 解题方法流程图	184
9.3 典型例题	186
9.4 教材习题选解	193
习题 9.1	193
习题 9.2	195
习题 9.3	198
习题 9.4	200
习题 9.5	201
习题 9.6	203
习题 9.7	206
习题 9.8	209
综合练习题.....	210
第 10 章 重积分	219
10.1 知识结构.....	219
10.2 解题方法流程图.....	220
10.3 典型例题.....	221
10.4 教材习题选解.....	229
习题 10.1	229
习题 10.2	230
习题 10.3	238
综合练习题.....	241
第 11 章 曲线积分与曲面积分	250
11.1 知识结构.....	250

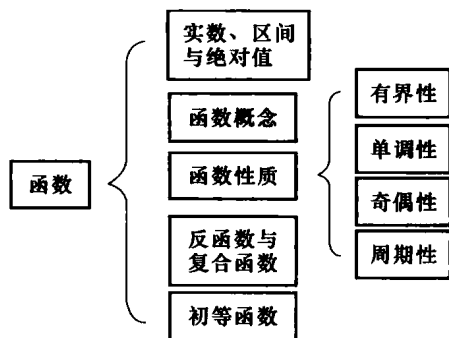
11.2 解题方法流程图·····	250
11.3 典型例题·····	253
11.4 教材习题选解·····	259
习题 11.1 ·····	259
习题 11.2 ·····	261
习题 11.3 ·····	262
习题 11.4 ·····	264
习题 11.5 ·····	265
习题 11.6 ·····	267
习题 11.7 ·····	269
综合练习题·····	270
第 12 章 无穷级数 ·····	283
12.1 知识结构·····	283
12.2 解题方法流程图·····	284
12.3 典型例题·····	287
12.4 教材习题选解·····	293
习题 12.1 ·····	293
习题 12.2 ·····	293
习题 12.3 ·····	296
习题 12.4 ·····	297
习题 12.5 ·····	299
习题 12.6 ·····	300
综合练习题·····	305

第1章 函 数



本章介绍函数的概念,函数的表示法,函数的性质及初等函数.

1.1 知 识 结 构



1.2 典 型 例 题

例 1.1 设 $f(x) = \frac{2x}{1-x}$, 求 $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$.

解 因为 $f(x) = \frac{2x}{1-x}$, 将其中的 x 换为 $f(x) = \frac{2x}{1-x}$, 得 $f[f(x)] = \frac{4x}{1-3x}$; 将 $f(x) = \frac{2x}{1-x}$ 中的 x 换为 $f[f(x)] = \frac{4x}{1-3x}$, 得 $f\{f[f(x)]\} = \frac{8x}{1-7x}$.

例 1.2 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2-4}}; \quad (2) y = \frac{\arccos \frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}.$$

解 (1) 函数要有意义, 需满足 $\begin{cases} x+4 > 0 \\ x^2-4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x < -2 \text{ 或 } x > 2 \end{cases}$, 函数的定义域为:
 $(-4, -2) \cup (2, +\infty)$.

(2) 函数要有意义, 需满足 $\begin{cases} -1 \leq \frac{2x-1}{7} \leq 1 \\ x^2-x-6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 4 \\ x < -2 \text{ 或 } x > 3 \end{cases}$, 函数的定义域为:
 $[-3, -2) \cup (3, 4]$.

例 1.3 设 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0, 1]$, 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x^2); \quad (2) f(\ln x); \quad (3) f(\arctan x); \quad (4) f(\cos x).$$

分析 由 $f(u)$ 的定义域为 $D=[0, 1]$, 令 $0 \leq u = u(x) \leq 1$, 得到 x 的变化范围即可.

解 (1) 由 $0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$, 函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-1, 1]$.

(2) 由 $0 \leq \ln x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq e$, 函数 $f(\ln x)$ 的定义域为 $[1, e]$.

(3) 由 $0 \leq \arctan x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq \tan 1$, 函数 $f(\arctan x)$ 的定义域为 $[0, \tan 1]$.

(4) 由 $0 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, 函数 $f(\cos x)$ 的定义域为 $[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$.

例 1.4 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x); \quad (2) f(x) = \begin{cases} -x^2+x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2+x, & x < 0 \end{cases}.$$

解 (1) $f(-x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = -\ln(\sqrt{x^2+1} - x) = -f(x)$, 函数为奇函数.

$$(2) f(-x) = \begin{cases} -x^2-x, & -x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2-x, & -x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x^2-x, & x < 0 \end{cases} = -f(x), \text{ 函数为奇函数.}$$

例 1.5 求函数 $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ 的周期.

解 $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, 所以函数 $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ 的周期为 π .

例 1.6 求反函数:

$$(1) y = \ln \frac{x+5}{x-5}; \quad (2) y = -\sqrt{1-x^2} (0 \leq x \leq 1).$$

解 (1) 由 $y = \ln \frac{x+5}{x-5} \Rightarrow x = \frac{5(e^y+1)}{e^y-1}$, 反函数为 $y = \frac{5(e^x+1)}{e^x-1}, x \neq 0$.

(2) 由 $y = -\sqrt{1-x^2} (0 \leq x \leq 1) \Rightarrow x = \sqrt{1-y^2}$, 反函数为 $y = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 0$.

1.3 教材习题选解

习题 1.1

2. 利用绝对值的定义证明: 对任意实数 a, b 有 $|ab| = |a| |b|$, 并用数学归纳法证明: 对任意 n 个实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 有 $|a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_1| |a_2| \cdots |a_n|$.

证明 任意实数 a, b , 若 $a \geq 0, b \geq 0$, 则 $ab \geq 0, |ab| = ab, |a| |b| = ab$; 若 $a \geq 0, b < 0$, 则 $ab \leq 0, |ab| = -ab, |a| |b| = a \cdot (-b) = -ab$; 若 $a < 0, b \geq 0$, 则 $ab \leq 0, |ab| = -ab, |a| |b| = (-a) \cdot b = -ab$; 若 $a < 0, b < 0$, 则 $ab > 0, |ab| = ab, |a| |b| = (-a) \cdot (-b) = ab$. 无论何种情况, 均有 $|ab| = |a| |b|$.

由以上的证明知: $|a_1 a_2| = |a_1| |a_2|$, 设 $|a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_1| |a_2| \cdots |a_n|$, 记 $b_n = a_1 a_2 \cdots a_n$, 则 $|a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}| = |b_n a_{n+1}| = |b_n| |a_{n+1}| = |a_1| |a_2| \cdots |a_n| |a_{n+1}|$, 由数学归纳法知, 对任意 n 个实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 有 $|a_1 a_2 \cdots a_n| = |a_1| |a_2| \cdots |a_n|$.

4. 解不等式 (3) $1 \leq |x| \leq 3$;

(4) $|x-1| \leq |5-x|$.

解 (3) 去绝对值得 $\begin{cases} x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$, 即 $-3 \leq x \leq -1$ 或 $1 \leq x \leq 3$.

(4) 不等式变形为 $|x-1| - |5-x| \leq 0$, 以分点 1, 5 分类讨论:

① 当 $x \leq 1$ 时, 变形为 $-(x-1) - (5-x) \leq 0$, 得恒成立不等式 $-4 \leq 0$;

② 当 $1 < x \leq 5$ 时, 变形为 $x-1 - (5-x) \leq 0$ 得 $x \leq 3$;

③ 当 $x > 5$ 时, 变形为 $(x-1) - (x-5) \leq 0$ 得矛盾不等式 $4 \leq 0$.

综上所述, 不等式的解为 $x \leq 3$.

习题 1.2

3. 判断函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同, 并说明理由:

(2) $f(x) = \sqrt{1-x} \sqrt{2+x}, g(x) = \sqrt{(1-x)(2+x)}$;

(4) $f(x) = \sqrt{2} \sin x, g(x) = \sqrt{1-\cos 2x}$.

解 (2) $f(x)$ 的定义域: $[-2, 1]$.

对应关系: $f(x) = \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{2+x} = \sqrt{(1-x)(2+x)}$.

$g(x)$ 的定义域: $[-2, 1]$, 对应关系 $g(x) = \sqrt{(1-x)(2+x)}$, 从而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

(4) $f(x)$ 的定义域: $\mathbf{R}$. 对应关系: $f(x) = \sqrt{2} \sin x$.

$g(x)$ 的定义域: $\mathbf{R}$. 对应关系: $g(x) = \sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} |\sin x| \neq \sqrt{2} \sin x$.

从而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同.

7. 梯形如图 1.1 所示, 当一垂直于 x 轴的直线从左向右扫过该梯形时, 若直线的垂足为 x , 试将扫过的面积 S 表示为 x 的函数.

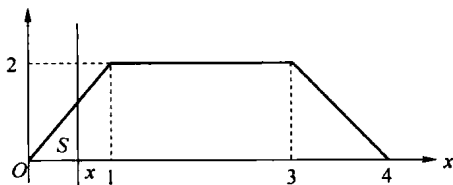


图 1.1

解 当 $x < 0$ 时, 直线未扫过梯形, $S = 0$;

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = x^2$;

当 $1 < x \leq 3$ 时, $S = 1 + (x-1) \times 2 = 2x-1$;

当 $3 < x \leq 4$ 时, $S = \frac{1}{2} \times (2+4) \times 2 - \frac{1}{2} \cdot (4-x) \cdot 2 \cdot (4-x) = -10 + 8x - x^2$;

当 $x > 4$ 时, 直线扫过整个梯形, $S = 6$.

综上所述可得面积 S 的函数表示式

$$S = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1, & 1 < x \leq 3 \\ -10+8x-x^2, & 3 < x \leq 4 \\ 6, & x > 4 \end{cases}$$

习题 1.3

1. 下列函数在指定区间内是否有界? 若有界, 给出它的一个上界与一个下界.

(1) $y = \arctan x (-\infty, +\infty)$;

(3) $y = -x^2 - 2x [-3, 3]$.

解 (1) 根据正切函数的定义知, $\tan y = x$, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\frac{\pi}{2}$ 为一个上界, $-\frac{\pi}{2}$ 为一个下界.

(3) 一元二次函数 $y = -x^2 - 2x = -(x+1)^2 + 1$, 因为在 $[-3, 3]$ 上, $y_{\max} = y(-1) = 1$, $y_{\min} = y(3) = -15$, 所以在 $[-3, 3]$ 上, 可取 $y(-1) = 1$ 为上界, $y(3) = -15$ 为下界.

3. 判断下列函数的奇偶性: (2) $y = \frac{|x|}{x}$; (4) $y = x \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$; (5) $y = \operatorname{sgn} x$.

解 (2) $f(-x) = \frac{|-x|}{-x} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数.

(4) $f(-x) = -x \frac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1} = x \frac{a^x-1}{a^x+1} = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为偶函数.

(5) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0, f(-x) = -f(x), \text{奇函数.} \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

5. 证明: 定义在对称于原点集合上的任意函数必可表为偶函数与奇函数之和.

证明 设函数 $f(x)$ 在对称区间 $(-L, L)$ 上有定义, 令

$$F(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad G(x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2}$$

由定义可知 $F(x)$ 为奇函数, $G(x)$ 为偶函数, 且 $f(x) = F(x) + G(x)$, 即得证.

习题 1.4

3. 证明: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

证明 设 $y = \arcsin x, x \in [-1, 1]$, 则 $x = \sin y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\cos(\arcsin x) = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$.

5. 设 $y = f(u)$ 的定义域为 $0 < u \leq 1$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x)$; (2) $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 (1) 由题意 $0 < e^x \leq 1$, 即得 $x \leq 0$.

(2) 由题意 $0 < \frac{1}{x} \leq 1$, 即得 $\begin{cases} x > 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$, 亦即 $x \geq 1$.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, g(x) = x^2 + x + 1$, 求 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$.

解 由于 $g(x) = x^2 + x + 1 > 0, f[g(x)] = x^2 + x + 1$; 当 $x \geq 0$ 时, $g[f(x)] = x^2 + x + 1$, 当 $x < 0$ 时, $g[f(x)] = 1$, 故 $g[f(x)] = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$.

习题 1.5

4. 证明下列等式:

(1) $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; (3) 双曲余弦函数的反函数为 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

证明 (1) 由于 $\operatorname{sh} 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$, 又 $2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2 \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$,

所以 $\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

(3) 由 $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0 \Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \Rightarrow x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$, 多值函数, 取单值分支: $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$, 交换 x, y , 即得 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, 由此可知双曲余弦函数的反函数为 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

综合练习题

一、单项选择题

1. 设 $f(x) = \frac{x-1}{x}, x \neq 0, 1$, 则 $f\left[\frac{1}{f(x)}\right] =$ (C).

- (A) $1-x$ (B) $\frac{1}{1-x}$ (C) $\frac{1}{x}$ (D) x

解 $\frac{1}{f(x)} = \frac{x}{x-1}, f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{\frac{x}{x-1} - 1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{\frac{x-1}{x-1}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{1}{x}.$

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$, 则 (D).

- (A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ -(x^2 + x), & x > 0 \end{cases}$ (B) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x), & x < 0 \\ -x^2, & x \geq 0 \end{cases}$
(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 - x, & x > 0 \end{cases}$ (D) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

解 当 $x \geq 0$ 时, $-x \leq 0, f(-x) = (-x)^2 = x^2$; 当 $x < 0$ 时, $-x > 0, f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$; 所以

$$f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$$

3. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数, $F(x) = f\left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2}\right)$, 其中 $a > 0, a \neq 1$, 则 $F(x)$ 是 (B).

- (A) 偶函数 (B) 奇函数
(C) 非奇非偶函数 (D) 奇偶性与 a 有关

解 $f(x)$ 是奇函数, $f(-x) = -f(x)$, 则

$$F(-x) = f\left(\frac{1}{a^{-x} + 1} - \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{a^x}{a^x + 1} - \frac{1}{2}\right) = f\left(1 - \frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{a^x + 1} - \frac{1}{2}\right) = -F(x)$$

4. $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是 (D).

- (A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数

解 令 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{R}$, 则 $f(x) = \left| \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right| e^{\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = \left| n\pi + \frac{\pi}{2} \right|,$

n 可任意大, 无界; 又 $f(0)=0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}, f(\pi)=0$, 不单调; 显然此函数也是非周期函数. 由此可以排除答案 (A)、(C)、(B); 由绝对值和余弦函数的奇偶性可知 $f(-x) = |-x \sin(-x)| e^{\cos(-x)} = f(x)$, 从而选 (D).

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 则下列函数中, 为偶函数的是 (B).

(A) $y = |f(x)|$

(B) $y = f(x^2)$

(C) $y = -f(-x)$

(D) $y = f^2(x)$

解 若令函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 则显然 (A)、(C)、(D) 不满足偶函数的定义, 只由 $f[(-x)^2] = f(x^2)$ 可知为偶函数.

二、填空题

1. 函数 $y = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x-3}}$ 的定义域为 $[1, 2] \cup (3, +\infty)$.

解 要使得根号有意义, 则 $\frac{x^2-3x+2}{x-3} \geq 0$, 即

$$\begin{cases} x^2-3x+2 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

或

$$\begin{cases} x^2-3x+2 \leq 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \quad (2)$$

解不等式组 (1) 得 $x > 3$, 解不等式组 (2) 得 $1 \leq x \leq 2$, 从而所求定义域为 $[1, 2] \cup (3, +\infty)$.

2. 设 $f(x) = 1 + [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $f(12) + f(-12) - 2f(0.99) = 0$.

解 由函数 $f(x)$ 的定义可知, $f(12) + f(-12) - 2f(0.99) = 13 - 11 - 2 = 0$.

3. 周期函数 $y = 3\cos^2 \frac{\pi x}{2}$ 的周期为 2 .

解 由三角函数公式 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ 有 $y = 3\cos^2 \frac{\pi x}{2} = \frac{3}{2}(1+\cos \pi x)$, 周期 $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$.

4. 函数 $y = \frac{1-2x}{3+5x}$ 的反函数为 $y = \frac{1-3x}{5x+2}, \left(x \neq -\frac{2}{5}\right)$.

解 原函数 $y = \frac{1-2x}{3+5x} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{5x-\frac{5}{2}}{3+5x} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5} \cdot \frac{1}{5x+3}$, 由此可知 $y \neq -\frac{2}{5}$, 又原函数 $y = \frac{1-2x}{3+5x}$ 反解得 $x = \frac{1-3y}{5y+2}$, 即得反函数 $y = \frac{1-3x}{5x+2} \left(x \neq -\frac{2}{5}\right)$.

5. 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, 则 $f(x)=\underline{x^2-2}$.

解 由于 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$, 设 $t=x+\frac{1}{x}$, 则原函数可表示为 $f(t)=t^2-2$, 将 t 变为 x , 即得 $f(x)=x^2-2$.

三、计算题与证明题

1. 设 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)\geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 由于 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 即 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$, $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$. $\varphi(x)\geq 0$, 从而 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, $1-x\geq 1$, 即 $x\leq 0$.

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 求函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.

解 由于函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$, 则必须满足:

$$\begin{cases} 0\leq x+a\leq 1 \\ 0\leq x-a\leq 1 \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} -a\leq x\leq 1-a \\ a\leq x\leq 1+a \end{cases}$$

这显然和 a 的取值有关, 当 $a\geq 0$ 且 $1-a\geq a$, 即 $a\leq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[a, 1-a]$; 当 $a\geq 0$ 且 $1-a<a$, 即 $a>\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为空集 $\emptyset$; 当 $a<0$ 且 $1+a\geq -a$, 即 $a\geq -\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[-a, 1+a]$; 当 $a<0$ 且 $1+a<-a$, 即 $a<-\frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为空集 $\emptyset$. 综上所述, 函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为

$$\begin{cases} [a, 1-a], & 0\leq a\leq \frac{1}{2} \\ [-a, 1+a], & -\frac{1}{2}\leq a<0 \\ \emptyset, & a<-\frac{1}{2} \text{ 或 } a>\frac{1}{2} \end{cases}$$

3. 设 $f(x)=\begin{cases} \varphi(x), & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x^2-2x, & x>0 \end{cases}$, 求 $\varphi(x)$ 使 $f(x)$ 为偶函数, 并作出 $y=f(x)$ 的图形.

解 当 $x<0$ 时, $-x>0$, 相应的表示式为 $(-x)^2-2(-x)=x^2+2x$. 又 $f(x)$ 为偶函数, 即 $f(-x)=f(x)$, 从而 $\varphi(x)=x^2+2x$. 图形如图 1.2 所示.