普通高等教育“十二五”规划教材

大学物理

刘建科 主编

科学出版社

内 容 简 介

本书是根据《理工科类大学物理课程教学基本要求(2010年版)》,在总结编者长期教学经验的基础上编写而成的.全书包括质点运动学、牛顿运动定律、能量守恒、动量守恒、角动量守恒、真空中的静电场、静电场中的导体和电介质、真空中的稳恒磁场、电磁感应、电磁场、气体动理论、热力学基础、机械振动、机械波、波动光学和近代物理专题——量子论简介等内容.

本书可作为高等工科院校、高等职业技术学院、各级各类成人教育各专业的大学物理教材,建议参考学时为80～100学时,书中带*号的内容教师可根据专业需要选讲.本书也可作为综合性大学和高等师范院校非物理类专业大学物理课程的教材和参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理/刘建科主编.—北京:科学出版社,2011
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-032133-6

Ⅰ.①大… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①物理学-高等学校-教材 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第170459号

责任编辑:胡云志 任俊红 唐保军 / 责任校对:包志虹
责任印制:张克忠 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011年8月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2011年8月第一次印刷 印张:17 3/4
印数:1—4 000 字数:446 000

定价:35.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　　言

本书根据教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会物理基础课程教学指导分委员会编制的《理工科类大学物理课程教学基本要求(2010 年版)》(以下简称《基本要求》),并考虑到课程学时和学生的实际情况编写而成. 在编写过程中,我们注意吸取了众多经典教材的优点,从而使教材适用于大多数工科院校本科、高职、成人教育类师生. 为此,我们采取的措施如下:

(1) 内容的选取比较符合《基本要求》. 对《基本要求》中规定的掌握、理解和了解的内容分别作了不同的处理,但考虑到适用对象,除《基本要求》内容外,还编入了一些要求较高的内容,并将这些内容标 * 号,作为选讲或自学内容.

(2) 精选例题和习题. 注重选编有代表性的、难易适中且较为新颖的例题和习题. 考虑到工科物理教材的特点,尽量多选用工程应用性的例题和习题. 同时,书中部分例题采用了多种解法,以培养学生灵活运用知识、分析问题和解决问题的能力. 习题的题型较为丰富,有选择题、填空题、计算题和证明题等.

(3) 注重避免与中学物理教学内容的简单重复. 容易与中学物理重复的教学内容是质点力学部分,特别是其中的例题和习题. 本书基本上选取了不同于中学内容的例题和习题.

(4) 注重处理好教材改革和教学传统的关系. 我们认为,教材改革并不是简单的"破体系","体系"是形式,形式应服从内容. "破体系"不应该作为教学改革的目的和出发点. 因此,本书比较接近传统体系,对传统教材体系未作大的改动,这样的处理方式是适应教材定位及大多数使用对象的教学实际的.

(5) 坚持体现教材内容深度广度适中,够用为原则,增强适用性.

本书由陕西科技大学刘建科任主编,西京大学李险峰任副主编. 在教材编写过程中得到了陕西省物理学会秘书长董庆彦教授的悉心指导,高等职业教学、成人教育一线的教师也提出了宝贵的意见,科学出版社为本书的编辑出版给予了大力支持. 在此,编者一并表示忠心的谢意.

由于编者水平和教学经验的限制,书中难免有不当之处,诚恳希望读者指正.

编　者

2011 年 5 月

目　　录

第 1 章　质点运动学

自然界是由物质组成的，一切物质都在不停地运动着. 在自然界中，有许多的运动形式，如机械运动、电磁运动、热运动、原子核运动、化学变化、生物运动等，而所有的这些运动形式既是相互区别又是相互联系的，而机械运动是物体最简单、最基本的运动形式，是物理学和许多工程技术学科的基础，而力学是研究物体的机械运动规律的一门学科. 所谓机械运动是指一个物体或物体系相对于另一物体或物体系的位置随时间的变化，或者是物体或物体系内部各部分之间的相对位置随时间的变化. **在力学中研究物体位置随时间变化的这部分内容称为运动学**，而本章主要内容为位移、速度、加速度等基本概念以及平面运动、圆周运动和相对运动等基本运动形式.

1-1　质点　位置矢量　运动方程

一、运动描述的相对性、参考系和坐标系

自然界中所有物体都在不停地运动，绝对静止不动的物体是不存在的. 例如，放在桌面上的书相对于桌子是静止的，但它却随地球一起绕太阳运动……一切物体都处于不断运动之中，这就是**运动的绝对性**. 描述物体的运动总是相对于其他物体而言的，如观察宇宙飞船的运动，是以地面上某一物体（如测控点）为标准，把它看成是运动的；同样，观察河水的流动，也是以我们认为不动的物体（如岸边的树）为标准来判别的. 所以在观察物体的位置以及位置变化时，总是要选择其他的物体作为标准. 选取的标准不同，则对物体运动的描述也不同. 又如，坐在稳定运动中的一火车上的乘客，相对于火车是静止不动的，而相对于地面上一物体，则位置是不断变化的. 所以相对于不同的标准物，物体运动情况的描述是不同的，这就是**运动描述的相对性**.

为描述物体的运动而选的标准物（物体系）称为参考系，不同的参考系对同一物体的描述是不同的，所以，在讲述物体的运动情况时，必须指明是相对于什么参考系的. 参考系的选择是任意的，依问题的特点和研究方便而定. 在地面上讨论物体的运动时，常常选地球为参考系；研究太阳系中星球的运动时，选太阳为参考系.

在选择了参考系以后，为了定量地描述物体的位置随时间的变化，必须在参考系上选用一个坐标系. 常用的坐标系有直角坐标系、极坐标系、球坐标系等，选用坐标系的原则，应使我们对物体位置的描述简洁、清楚.

二、质点

自然界的任何物体都有它的形状和大小. 一般情况下，物体在运动时，它的各部分的位置变化是不同的，而且物体的大小和形状在物体运动过程中还有可能是变化的，如在平直铁路上行驶

的火车，就整个火车来讲，它沿铁路平动，就其车轮来说，除了平动之外，还有绕轮轴的转动；在统计物理学中，双原子或多原子分子，除了平动之外，还有转动，以及在平衡位置附近的振动. 所以，一般情况下，物体运动的情况是相当复杂的.

一般说来，物体上各点运动状态的差异在我们所研究的问题中只占很次要的地位，我们就可以忽略物体的大小、形状及内部结构，把它看成一个只有质量的几何点，称为质点. 例如，在研究地球绕太阳公转的问题时，地球的平均半径虽然达到 6370km，这样的线度比起地球到太阳的平均距离（1.5×10^8km）来讲仍然是很小的，地球上各点的运动状态的差别完全可以忽略，因而在研究地球绕太阳的公转时，可以将地球看成只有质量没有大小和形状的几何点，即质点. 若要研究原子的内部结构，虽然原子的大小数量级只有 10^{-10}m，但却不能看成质点. 必须指出的是，一个物体能否看成质点，主要取决于研究问题的性质，质点是经过科学抽象形成的理想模型，把物体看成质点是有条件的、相对的，而不是无条件的、绝对的，对具体情况要具体分析. 同时，把物体视为质点的这种抽象的研究方法，在实践和理论上都有重要的意义. 例如，我们以后将要介绍的刚体、线性弹簧振子、理想气体、点电荷等都是理想模型，在科学研究中，根据所研究问题的性质，突出主要因素，忽略次要因素，建立理想模型，是一种经常采用的科学思维方法，这样做可以使问题大为简化但又不失其客观真实性. 同时，还要注意这种理想模型的适用条件，它的适用与否，只能通过实践来检验.

三、位置矢量

在选定参考系以后，为了定量地描述质点的位置和位置随时间的变化，必须在参考系上建立一个坐标系，如图 1-1 所示是三维直角坐标系，其中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是三个坐标轴 x、y、z 正方向的单位矢量. 在任意时刻 t，质点运动到 P 点，可用**由原点 O 指向 P 点的有向线段$\overrightarrow{OP}$来表示质点的位置，这个有向线段称为位置矢量，简称位矢**，用 $\boldsymbol{r}$ 表示，即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}$. 在三维直角坐标系中，位矢可写成

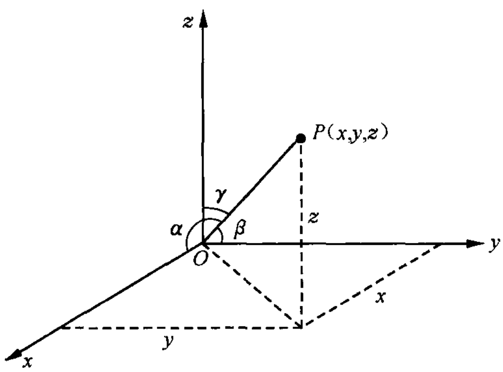

图 1-1

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小用位矢的模$|\boldsymbol{r}|$表示，它表示质点在 P 位置时到原点的距离

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向，可以由 $\boldsymbol{r}$ 和三个坐标轴正向的夹角 α、β、γ 来表示，

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta = \frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma = \frac{z}{|\boldsymbol{r}|} \tag{1-2}$$

可以看出

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

四、自然坐标

在有些情况下，质点相对参考系的运动轨迹是已知的，如以地面为参考系，火车的运动轨迹（铁路轨道）是已知的. 在这种情况下，采用直角坐标系反而不方便解决问题，采用自然坐标更为

方便，其确定方法如下：如图 1-2 所示，首先在已知的运动轨迹上任取一固定点 O，作为坐标原点，然后规定从 O 点起，沿轨迹的某一方向（如向右）量得曲线的长度，s 取正值，这个方向称为自然坐标的正方向；反之为负方向，s 取负值，这样质点在轨迹上的位置 P 就可以用 s 唯一地确定，这种确定质点位置的方法称为**自然法**. 其中 O 点是自然坐标系原点，s 是自然坐标，s 的大小和正负就代表了质点到原点之间沿轨迹的距离和相对于原点的方向.

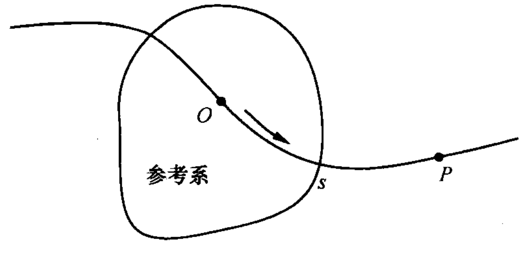

图 1-2

五、运动方程

质点相对于参考系运动时，质点位置的直角坐标（x、y、z），位矢 $\boldsymbol{r}$，自然坐标 s 都随时间 t 变化，是 t 的单值连续函数. 这个函数称为**质点的运动方程**.

用直角坐标表示的质点的运动方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1-3}$$

用位矢表示的质点的运动方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-4}$$

用自然坐标表示的质点运动方程为

$$s = s(t) \tag{1-5}$$

知道了质点的运动方程，就可以确定质点在任意时刻的位置，因而也就知道了质点运动的轨迹，得到轨迹方程. 轨迹为直线的，称质点做直线运动；轨迹为曲线的，称质点做曲线运动. 同时，利用质点的运动方程，还可以确定质点在任意时刻的速度、加速度等. 所以根据具体条件确定质点的运动方程，是研究质点运动的一个重要内容.

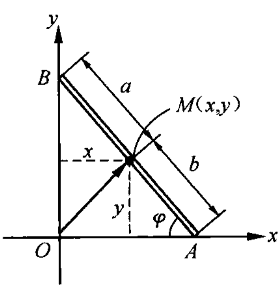

图 1-3

例 1-1 如图 1-3 所示，直杆 AB 两端可以分别在固定而相互垂直的直线导槽上滑动，已知杆的倾角 φ 按 $\varphi=\omega t$ 随时间变化，其中 ω 是常量，试求杆上任意点 M 的运动学方程和轨迹方程.

解 沿直线导槽作直角坐标系 Oxy，如图 1-3 所示，设 $BM=a$，$AM=b$，M 点的直角坐标为 (x, y)，由图可以看出

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi = a\cos\omega t \\ y = b\sin\varphi = b\sin\omega t \end{cases}$$

即是 M 点的直角坐标表示的运动方程.

用位矢表示的运动方程是

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} = a\cos\omega t\boldsymbol{i} + b\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

为了求 M 点的轨迹方程，在直角坐标系下的运动方程中消去时间 t，可得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

即 M 点的轨迹是长轴为 a，短轴为 b，中心为坐标原点的椭圆，常用椭圆规就是按照上述原理制成的.

复习思考题

1-1　如果有人问地球和一粒小米比较，哪个可以看成质点，你将怎样回答？

1-2　什么是质点运动学方程？你学过几种形式的运动学方程？

1-3　宇宙飞船的轨迹是椭圆，这是以什么为参考系的？若以太阳为参考系，宇宙飞船的运行轨道大体是什么样子？

1-2　位移　速度　加速度

一、位移

设质点沿轨迹 LM 做一般曲线运动，如图 1-4 所示，在参考系上建立三维直角坐标系 $Oxyz$，质点 t 时刻运动到 P 点，P 点的位矢为 $\boldsymbol{r}(t)$，在 $t+\Delta t$ 时刻运动到 Q 点，位矢为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$. 显然，在 Δt 时间内，质点的位置矢量的大小和方向都发生了变化，其位置的变化可用由 P 点指向 Q 点的有向线段 $\overrightarrow{PQ}$ 来表示，用 $\Delta\boldsymbol{r}$ 代替 $\overrightarrow{PQ}$ 即 $\Delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{PQ}$，$\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小就是 P 到 Q 之间的直线距离，方向由起点 P 指向终点 Q，矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 称为质点在 $t\to t+\Delta t$ 内的**位移矢量**，简称**位矢**.

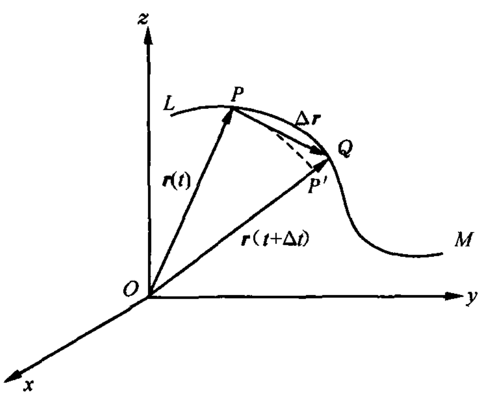

图 1-4

由图可知

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1-6}$$

即质点在某一段时间内的位移，等于在同一段时间内位矢的增量.

在三维直角坐标系下，设 P 点坐标为 (x_1,y_1,z_1)，Q 点坐标为 (x_2,y_2,z_2)，则位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 可以写成

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

上式说明**质点在某一段时间内的位移等于在同一段时间内质点在 x 轴、y 轴、z 轴上的位移的矢量和.** 其中

$$\Delta x=x_2-x_1,\quad \Delta y=y_2-y_1,\quad \Delta z=z_2-z_1$$

位移和位矢不同，位矢描述的是质点在某一时刻的位置，是由坐标原点指向质点位置的有向线段，与时刻相联系，依赖于坐标系的选择，而位移描述的是质点在某一段时间内位置的变化，是由初位置指向末位置的有向线段，与时间相联系，不依赖于坐标系的选择.

位移和路程也不同，位移反映的是一段时间始末位置的变化，不涉及质点位置变化过程的细节，如图 1-4 中，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的大小虽然等于 P 到 Q 的直线距离，并不意味着质点是从 P 沿直线 PQ 移动到 Q. 而在时间 Δt 内，质点沿曲线 $\overset{\frown}{PQ}$ 移动到 Q 点所经历的路径的长度，即曲线 $\overset{\frown}{PQ}$ 的长度，称为质点在该段时间内的路程，是一个标量. 一般情况下，某段时间内质点位移的大小不等于这段时间内质点所经历的路程，只有质点沿不变的方向做直线运动时，位移的大

小才等于路程.

位移的大小和位矢大小的增量一般也是不同的,设在时间 Δt 内位矢大小的增量为 Δr,则

$$\Delta r = |\boldsymbol{r}(t+\Delta t)| - |\boldsymbol{r}(t)| \tag{1-7}$$

在图 1-4 中,以 O 点为圆心,以 $\boldsymbol{r}(t)$ 大小为半径作圆弧,它与位矢 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ 相交于 P' 点,则 $P'Q$ 的长度就是 Δr,而位移的大小等于直线 PQ 的距离,即 $|\Delta \boldsymbol{r}| = \overline{PQ}$,特别的,当质点做半径为 R 圆周运动时,若圆心在坐标原点,在半个周期内,位移的大小 $|\Delta \boldsymbol{r}| = 2R$,而位矢大小的增量 $\Delta r = 0$.

二、速度

1. 平均速度

质点沿轨迹 LM 按运动学方程 $\boldsymbol{r}(t)$ 做一般曲线运动:在时间 Δt 内通过的位移为 $\Delta \boldsymbol{r}$,如图 1-5 所示,则**质点的位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 与相应的时间 Δt 之比,称为这一段时间内质点的平均速度**,用 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示,即

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

平均速度是矢量,其方向和位移的方向相同,它表示质点在时间 Δt 内 $\boldsymbol{r}(t)$ 随时间的平均变化率,即粗略地描述了质点在这段时间内位置随时间的变化.

我们把路程 Δs 与通过该路程所用的时间 Δt 的比值称为该点在该段时间内的平均速率,用 $\bar{v}$ 表示,即

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

平均速率是标量,其大小等于质点在单位时间内平均通过的路程.

值得注意的是,由于一般情况下 $|\Delta \boldsymbol{r}| \neq \Delta s$,所以质点的平均速度的大小也不等于平均速率,即 $|\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$,如质点做一个周期为 T 的圆周运动,在一周内平均速度为零,而平均速率 $\bar{v} = \frac{2\pi R}{T}$.

2. 瞬时速度

为了精确地描述质点运动的快慢和方向,可以将时间间隔 Δt 无限减小,并使之趋近于零,即 **$\Delta t \to 0$ 时,平均速度会趋向于一个确定的极限矢量**,如图 1-5 所示,**这个极限矢量称为 t 时刻的瞬时速度**,简称**速度**,用 $\boldsymbol{v}$ 表示,即

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

即速度也等于位置矢量对时间的一阶导数,它描述的是质点的位矢在 t 时刻的变化率. 只要知道了用位矢表示的质点运动方程 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$,就可以通过微分求出质点的运动速度.

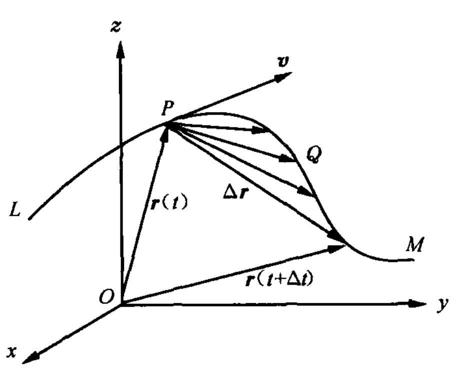

图 1-5

速度是矢量,其大小反映了 t 时刻质点运动的快慢,其方向就是 t 时刻质点的运动方向.

由图 1-5 可以看出:t 时刻质点的速度的方向,就是当 $\Delta t \to 0$ 时平均速度的极限方向,即此时

Q 点无限地向 P 点靠近，速度 $\boldsymbol{v}$ 将变得和 P 点处的切线重合并指向运动一方. 故 t 时刻质点速度的方向，沿着该时刻质点所在位置 P 点轨迹的切线，并指向质点运动的一方. 例如，转动雨伞，水滴将沿切线方向离开雨伞等.

在直角坐标系中，速度可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ \boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \\ &= v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1-9}$$

式中，$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 为速度 $\boldsymbol{v}$ 在三个坐标轴上的投影，速度的大小可表示为

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

其方向由速度与坐标轴的三个方向余弦来确定.

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v}$$

式中，α、β、γ 分别为 $\boldsymbol{v}$ 与 x、y、z 三个坐标轴正向的夹角，且满足关系式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

速度的大小常称为速率，是标量，恒取正值，一般情况下，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \neq \mathrm{d}r$，故 $v = |\boldsymbol{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$. 例如，当质点做圆周运动时，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0$ 而速率 $v = |\boldsymbol{v}| \neq 0$.

三、加速度

1. 速度增量

质点运动时，它的速度的大小和方向都可以是随时间变化的，如图 1-6(a)所示，该质点沿轨迹 LM 运动，时刻 t 时质点位于 P 点，速度为 $\boldsymbol{v}(t)$，在 $t+\Delta t$ 时刻，质点位于 Q 点，速度为 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t)$，则在 Δt 时间间隔内、质点的速度增量为

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)$$

值得注意的是，速度增量的方向和速度的方向一般是不相同的，只有在直线运动时，速度增量的方向和速度的方向才有可能相同或相反，同时，速度的增量既描述了速度大小的变化，也描述了速度方向的变化.

若用 Δv 描述速度大小的变化，则

$$\Delta v = |\boldsymbol{v}(t+\Delta t)| - |\boldsymbol{v}(t)|$$

如图 1-6(b)所示，BC 即是速度增量，其中 BD 描述的是速度方向在 Δt 时间内的变化，DC 描述的是速度大小在 Δt 时间内的变化.

2. 平均加速度

速度的增量 $\Delta\boldsymbol{v}$ 与其所经历的时间 Δt 之比，称为这段时间内质点的平均加速度，用 $\bar{\boldsymbol{a}}$ 表示，即

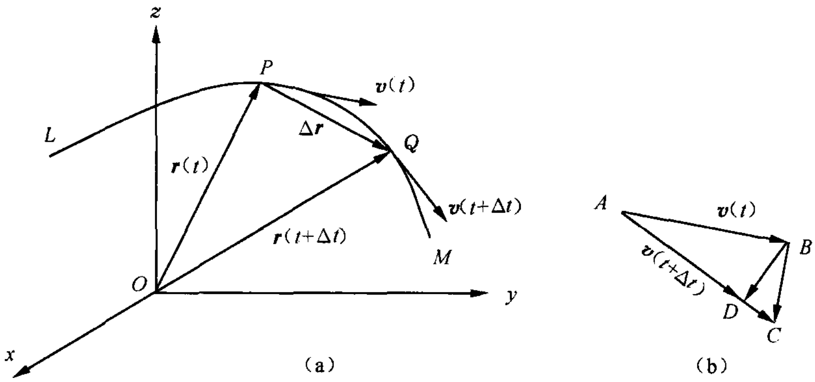

图 1-6

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

平均加速度是矢量，其方向和速度增量的方向相同，大小为$|\bar{\boldsymbol{a}}|=\left|\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}\right|$，它仅仅粗略地描述质点的速度随时间的变化.

3. 瞬时加速度

瞬时加速度也称**加速度，当 $\Delta t \to 0$ 时，质点的平均加速度就会趋于一个确定的极限矢量，这个极限矢量称为 t 时刻质点的瞬时加速度**，用 $\boldsymbol{a}$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{\boldsymbol{a}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-10}$$

加速度精确地描述了 t 时刻质点的速度变化的情况. 从上式可以看出，加速度也等于速度对时间的一阶导数，还等于位置矢量对时间的二阶导数，其方向总是指向曲线凹的一侧，与同一时刻质点的速度方向一般是不相同的.

在直角坐标系中，加速度还可以表示成

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} \tag{1-11}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{1-12}$$

$$=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-13}$$

其中

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-14}$$

分别是加速度在直角坐标系中的三个分量. 加速度的大小可表示为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \tag{1-15}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2} \tag{1-16}$$

若用 α、β、γ 表示加速度和三个直角坐标轴正向的夹角，则有

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} \tag{1-17}$$

加速度描述的是物体运动速度变化情况，这个变化既包含了速度大小的变化，也包含了速度方向的变化，所以，一般情况下，加速度的大小 $a=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right| \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，因为 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 它仅仅考虑了速度大小的变化.

例 1-2　一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}+(4t^2+3)\boldsymbol{j}$(SI)，试求：

(1) $t_1=1\mathrm{s}$ 到 $t_2=2\mathrm{s}$ 内的位移；

(2) $t_1=1\mathrm{s}$ 到 $t_2=2\mathrm{s}$ 内的平均速度和平均加速度；

(3) t 时刻的速度和加速度.

解　$\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}+(4t^2+3)\boldsymbol{j}$.

(1) 当 $t_1=1\mathrm{s}$，$t_2=2\mathrm{s}$ 时，

$$\boldsymbol{r}_1 = 3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}_2 = 6\boldsymbol{i}+19\boldsymbol{j}$$

所以从 $t_1=1\mathrm{s}$ 到 $t_2=2\mathrm{s}$ 的质点位移为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1 = (6\boldsymbol{i}+19\boldsymbol{j})-(3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j})\\ &= 3\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

(2) 当从 $t_1=1\mathrm{s}$ 到 $t_2=2\mathrm{s}$ 时，由平均速度和平均加速度的定义知

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{3\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}}{1} = 3\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}$$

而

$$\boldsymbol{v}_1=\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}=(3\boldsymbol{i}+8t\boldsymbol{j})|_{t=1}=3\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_2=\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=(3\boldsymbol{i}+8t\boldsymbol{j})|_{t=2}=3\boldsymbol{i}+16\boldsymbol{j}$$

所以

$$\Delta\boldsymbol{v}=8\boldsymbol{j}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{8\boldsymbol{j}}{1}=8\boldsymbol{j}$$

(3) 由速度和加速度的定义知

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 3\boldsymbol{i}+8t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 8\boldsymbol{j}$$

复习思考题

1-4　试结合匀速圆周运动，比较平均速度和瞬时速度.

1-5　设质点的运动方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$，在计算质点的速度和加速度时，有人先计算 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，然后根据 $v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 和 $a=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$ 求得结果；又有人先算速度和加速度分量，再合成而求得结果，即

$$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2},\quad a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$$

你认为哪一种方法正确？为什么？

1-3 直角坐标系中求解运动学问题

描述质点的机械运动，即确定质点的位矢、位移、速度和加速度，而这些量都是矢量，解决的方法是先选择参考系，建立坐标系，然后利用速度、加速度的定义来求解，而最常用的坐标系就是直角坐标系，即通过坐标系将矢量投影，再由投影算出矢量的大小和方向，从而将矢量运算转换成代数运算. 由于已知条件及所求物理量的不同，因而处理的方法也不相同，对于一般的运动学问题，可以化为三类问题处理.

一、第一类问题——已知 $\boldsymbol{r}(t)$，求 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{a}(t)$

对于这一类问题，常常直接通过速度、加速度的定义 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$，直接求出速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 和加速度 $\boldsymbol{a}(t)$.

例 1-3 一质点在 Oxy 平面内运动，如图 1-7 所示，其运动函数为 $x=R\cos\omega t$ 和 $y=R\sin\omega t$，其中 R 和 ω 为正值常量，求：

(1) 质点的运动轨道；

(2) 任一时刻它的位矢、速度和加速度.

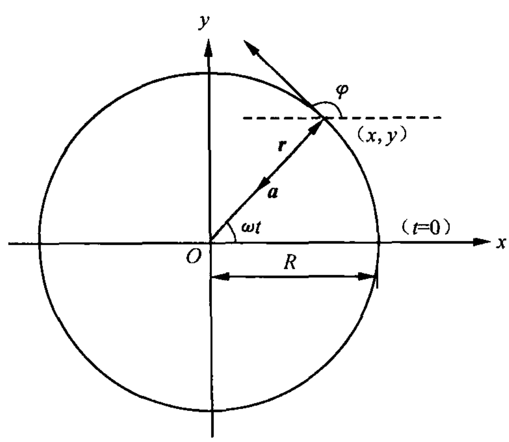

图 1-7

解 (1) 对 x、y 两个函数平方相加，即可消去 t 而得到轨道方程

$$x^2+y^2=R^2$$

这是一个圆心在坐标原点，半径为 R 的圆周的方程，它表明该质点做圆周运动，如图 1-7 所示.

(2) 任一时刻，位矢为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，所以

$$\boldsymbol{r}(t)=R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

其大小为 $r=\sqrt{x^2+y^2}=R$.

设 θ 是 t 时刻位矢和 x 轴正向的夹角，则

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\tan\omega t$$

所以 $\theta=\omega t$.

任一时刻，质点的速度由定义求出，即

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-R\omega\sin\omega t\boldsymbol{i}+R\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

即

$$v_x=-R\omega\sin\omega t,\quad v_y=R\omega\cos\omega t$$

其大小为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=R\omega$$

由于 $v=R\omega$ 是常量，所以质点做匀速圆周运动. $\boldsymbol{v}$ 和 x 轴正向夹角为 φ，则

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = -\cot\omega t$$

所以

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \omega t = \frac{\pi}{2} + \theta$$

这个结果说明，任一时刻质点的速度总是和位矢垂直，即做圆周运动的质点，其速度的方向总是沿着圆的切线.

根据加速度的定义，任一时刻的加速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\cos\omega t\boldsymbol{i} - R\omega^2\sin\omega t\boldsymbol{j} \\ &= -\omega^2(R\cos\omega t\boldsymbol{i} + R\sin\omega t\boldsymbol{j}) \\ &= -\omega^2\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

所以

$$a_x = -R\omega^2\cos\omega t$$
$$a_y = -R\omega^2\sin\omega t$$

加速度的大小 $a=|\boldsymbol{a}|=R\omega^2$.

这个结果说明，匀速圆周运动的质点，其加速度方向总和位置矢量的方向相反而指向圆心，这说明此时质点在做匀速圆周运动时，它的速度方向总是和加速度的方向是垂直的.

二、第二类问题——已知 $\boldsymbol{v}(t)$，求 $\boldsymbol{r}(t)$ 或已知 $\boldsymbol{a}(t)$，求 $\boldsymbol{v}(t)$ 和 $\boldsymbol{r}(t)$

这类问题的解决是要附以初始条件的，然后通过积分的办法求得结果，可以说，第二类问题的处理方法是和第一类问题的处理方法相反.

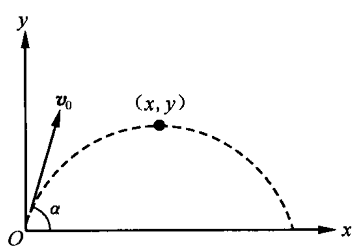

图 1-8

例 1-4　在地球表面附近，质点以初速度 $\boldsymbol{v}_0$ 被倾斜抛出，如果不计空气阻力、风力、地球自转的影响，该质点在 Oxy 铅直面内做无阻力抛体运动，如图 1-8 所示，求质点速度沿 x、y 轴的投影和质点的运动学方程

解　由题知，当 $t=0$ 时，

$$v_{0x} = v_0\cos\alpha,\quad v_{0y} = v_0\sin\alpha,\quad x_0 = 0,\quad y_0 = 0$$

设任意时刻质点的坐标为 (x,y)，速度沿 x、y 轴分量为 v_x、v_y，由题设条件得

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0,\quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g$$

或写成 $\mathrm{d}v_x=0$，$\mathrm{d}v_y=-g\mathrm{d}t$.

考虑到初始条件，上式两边同时积分得

$$\int_{v_{0x}}^{v_x}\mathrm{d}v_x = 0,\quad \int_{v_{0y}}^{v_y}\mathrm{d}v_y = \int_0^t -g\mathrm{d}t$$

可得

$$v_x = v_0\cos\alpha,\quad v_y = (v_0\sin\alpha) - gt$$

上边结果说明：做斜上抛运动的质点的速度的 x 分量大小不变，y 分量减小.

由速度的定义

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

积分得

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t v_x \mathrm{d}t$$

$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^t v_y \mathrm{d}t$$

$$x = (v_0 \cos\alpha)t$$

$$y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$$

从上两式中消去 t,得到轨迹方程

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

轨迹方程是一个开口向下的抛物线

三、第三类问题——已知物体沿 x 轴运动,已知 $a=a(x)$ 或 $a=a(v)$,求 $v(x)$

这一类问题的特点是已知条件与所求物理量和时间无关,这时必须通过换元,将加速度的表达式变形,当物体只沿 x 轴运动时,有

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

例 1-5 一质点做一维运动,其中加速度和位置的关系为 $a=-kx$,k 为正的常量,已知 $t=0$ 时,质点静止于 x_0 处,试求质点的速度和坐标的关系及运动方程:

解 设任意时刻 t,质点的速度为 v,位置为 x,所以

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -kx$$

所以

$$v\mathrm{d}v = -kx\mathrm{d}x$$

在题设中,当 $t=0$ 时,$v_0=0$,$x=x_0$,上式两边同时积分得

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^x -kx\mathrm{d}x$$

所以

$$v^2 = k(x_0^2 - x^2)$$

$$v = \pm\sqrt{k} \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

由速度的定义得

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{k} \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

所以

$$\int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \pm\int_0^t \sqrt{k}\mathrm{d}t$$

解得