

“十一五”国家重点图书

计算机科学与技术学科前沿丛书

计算机科学与技术学科研究生系列教材（中文版）

小波变换与 图像、图形处理技术

孙延奎 著



清华大学出版社

TP391.41
S973

国家重点图书

计算机科学



郑州大学 *040107475791*

计算机科学与技术学科研究生系列教材（中文版）

小波变换与 图像、图形处理技术

孙延奎 著



清华大学出版社
北京

TP391.41
S973

内 容 简 介

本书重点介绍小波技术及其在信号、图像与图形处理中的应用,涵盖了经典小波、细分小波与双树复小波。基础部分内容包括多分辨分析的概念、一维二维离散小波变换及其 Mallat 算法实现、紧支撑小波的构造与作图、小波时频分析、双树复小波变换、小波信号处理、图像融合、图像压缩、图像检索;提高部分内容包括小波变换的提升实现、二进小波及其在图像多尺度边缘检测中的应用、Loop 细分小波、Catmull-Clark 细分小波、网格多分辨表示、编辑、压缩与去噪等。

本书可作为研究生或高年级本科生教材,也可供从事相关领域研究与应用的专业技术人员参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

小波变换与图像、图形处理技术/孙延奎著. —北京:清华大学出版社,2012.3

(计算机科学与技术学科前沿丛书·计算机科学与技术学科研究生系列教材(中文版))

ISBN 978-7-302-27761-3

I. ①小… II. ①孙… III. ①小波理论—应用—图像处理 IV. ①TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 280388 号

责任编辑:白立军 顾 冰

封面设计:常雪影

责任校对:梁 毅

责任印制:王静怡

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课 件 下 载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 刷 者:北京富博印刷有限公司

装 订 者:北京市密云县京文制本装订厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:16

字 数:397千字

版 次:2012年3月第1版

印 次:2012年3月第1次印刷

印 数:1~3000

定 价:29.00元

产品编号:028715-01

前 言

小波分析是 20 世纪 80 年代后期形成的一个新兴的数学分支。它是在傅里叶分析的基础上发展起来的,但小波分析与傅里叶分析存在极大的不同。从微观上看,小波变换与傅里叶变换的根本区别是由小波和正弦波的不同局部化性质产生的。从宏观上看,傅里叶分析是整体域分析,用单独的时域或频域表示信号的特征;而小波分析是局部化时频分析,它用时域和频域的联合表示信号的特征。作为时频分析方法,小波分析比傅里叶分析有着许多本质性的进步。它能够从信号中提取许多有用的信息,是各种信号处理方法(如时频分析、多尺度分析和子带编码)的统一处理框架,它的快速算法为分析和解决实际问题带来极大的方便,目前在语音、图像、图形、通信、地震、生物医学、机械震动、计算机视觉等领域都有很好的应用。小波分析是目前国际上公认的信号信息获取与处理领域的高新技术,是多学科关注的热点,是信号处理的前沿课题。

小波技术在应用中不断发展,粗略地讲,小波已经历第一代、第二代和第三代小波发展几个阶段。第一代小波的显著特征是定义域是整个数轴或平面,其小波是由一个母小波的二进伸缩与平移得到的,小波构造主要在频域进行,构造工具是傅里叶变换,主要应用于信号与图像处理等领域;第二代小波的显著特征是定义域在数轴上某个区间、平面上某个区域或流形(如球面),放弃了小波是由母小波的二进伸缩与平移得到的思想,小波构造主要在时域进行,构造工具是提升格式(lifting scheme),其主要应用领域是曲线曲面造型、图形绘制和行星数据分析等;第三代小波的显著特征是小波多方向的选择性,主要是构造具有更多方向性的不可分离二维小波,在图像处理等领域具有重要应用。

小波变换取得广泛应用的根本原因在于它同时具有以下特性:

- ① 数据去相关性,即数据的稀疏表示;
- ② 小波变换的快速算法;
- ③ 多分辨或多尺度表示;
- ④ 局部化时频分析。

笔者从事小波理论及其应用研究近 20 年,教学近 10 年,一直努力追随这个领域的发展步伐。在编著《小波分析及其应用》(机械工业出版社,2005)及教学实践的基础上,结合领域的最新发展及笔者最新研究成果,创作完成了本书。该书在努力保持小波理论数学严谨性的同时,着力从工程技术角度阐述小波技术及其应用。旨在突破小波分析的数学障碍,显现其实用的本质,让小波分析方法和傅里叶分析一样,成为一种基础的、普及的,容易为广大读者所掌握和应用的数学工具。

本书具有以下特点。

(1) 研究成果与教学实践相融合。书中的内容笔者大都进行了研究,对有关内容具有较深刻的理解与认识;更重要的是,书中的内容为笔者进行了多年的教学实践,经过消化理解、归纳整理,并从读者需求的角度撰写。

(2) 内容覆盖面广。涵盖了第一代小波、第二代小波及第三代小波的部分内容。其中,小波变换的提升实现、二进小波、双树复小波、表面细分小波的4章专题论述是笔者给读者的特别奉献。

(3) 应用性强。本书在介绍算法原理的基础上,十分关注小波变换的实现与应用的关键技术。重点介绍小波在信号、图像与图形处理中的应用。这些应用包括信号突变点检测、信号去噪、信号时频分析、图像融合、图像压缩、图像检索、图像多尺度边缘检测;网格多分辨率表示、编辑、去噪及月球模型的造型与可视化。

(4) 注重学习引导。每章结束语是各章内容的补充说明与扩展,着重对各章内容总点评、补充说明或学习引导。大多给出了相关的研究课题以及可进一步参考的个别文献。不仅明确了书中内容的基本地位,也为进一步学习指明了努力方向,对研究生的学习研究很有帮助。

(5) 由浅入深,理论与应用交错编排。第1章以 Haar 小波分析为例,介绍小波分析的核心概念和算法,使读者对小波分析有一个直观的认识,为进一步学习奠定良好基础。在总体安排上,将理论与应用交错编排,以期增强内容的可读性。

(6) 努力突破小波分析的数学障碍,显现其实用的本质。力求简化数学推导过程,甚至略去一些复杂的数学证明,使得读者只需具备高等数学的基础知识即可阅读本书。重点阐述数学方法的工程意义,并从读者应用小波技术的角度出发,充分考虑在算法实现时可能遇到的问题,以使所述算法具有实际可操作性。同时,书中结合大量的图表和例子说明小波技术的原理、算法和应用。

本书可作为研究生或高年级本科生教材,也可供从事相关领域研究与应用的专业技术人员参考。书中内容难度不等,可根据需要安排学习。作为教材使用时建议如下。

(1) 因材施教,合理选择教学内容

本书基础部分为必修内容,包括第1~3章,第5章,第6章中的6.1节、6.2节,第7章中7.1节~7.4节,第8章中的8.1节、8.2节,第10章;其余章节为提高部分,可根据需要选学,第4章、第9章相对独立,跳过它们不影响其他章节的学习。

(2) 单项练习

为巩固课堂教学效果,让学生更好地掌握知识点,课后安排了适量习题。

(3) 综合实践

根据学生的研究兴趣安排期末大实验,锻炼他们综合利用小波技术解决应用问题的能力。这些实验可包括语音或心电信号小波处理、信号时频分析、小波图像融合系统、小波图像压缩系统、小波图像检索系统、小波图像多尺度边缘检测系统、小波图像去噪系统、小波图像识别系统、网格细分小波分解与重构系统;也可根据学生的专业需求选择大实验。作为课程实践,可强调运用不同小波解决同一问题并比较分析实验结果,加深对小波技术的理解与认识。在编程方面,可考虑利用已有的 MATLAB 或 C++ 小波库,在学习理解的基础上结合自己的实验任务进行改进。

最后要说明的是,①选该书作为教材可提供教学电子课件;②虽然笔者对 Curvelet 和 Contourlet 已有几年的教学实践,但有关内容尚需进一步归纳与整理,限于时间与精力,本

书暂未涵盖；③为能起到引导学习的作用，本书参考文献中除了撰写此书实际参考的之外，还包括供感兴趣的读者选读的文献，因只为引入相关话题，引用相关参考文献时不免挂一漏十，敬请谅解。

感谢清华大学多年来选我小波课的研究生们，我与他们一起教学相长；感谢国家自然科学基金项目(60971006)资助。限于作者的认识水平与能力，书中难免有不足与疏漏之处，敬请读者批评指正。

孙延奎

2012 年 1 月于北京清华园

目 录

第 1 章 Haar 小波分析	1
1.1 简介	1
1.2 平均与细节	2
1.3 尺度函数与小波函数	3
1.4 多分辨分析	6
1.5 小波变换的计算	8
1.6 小波变换的滤波器组实现——Mallat 算法	10
1.6.1 离散序列的卷积	10
1.6.2 二通道滤波器组	11
1.6.3 小波变换的滤波器组算法	12
1.7 小波变换的提升实现	14
1.7.1 Haar 小波变换	14
1.7.2 Haar 小波变换的提升实现	15
1.7.3 提升算法	15
1.8 本章小结	17
习题	17
第 2 章 多分辨分析与 Mallat 算法	18
2.1 预备知识	18
2.2 一维正交多分辨分析	20
2.2.1 多分辨分析的定义与举例	20
2.2.2 由多分辨分析构造正交小波	25
2.2.3 小波变换的 Mallat 算法	33
2.2.4 Mallat 算法的实现	35
2.2.5 具有边界延拓与截取功能的二通道分析/综合系统	38
2.2.6 小波处理信号的基本步骤	39
2.3 一维双正交多分辨分析	42
2.4 本章小结	45
习题	46
第 3 章 紧支撑小波的构造	47
3.1 紧支撑正交小波的构造	47
3.1.1 构造紧支撑正交小波的必要条件	47
3.1.2 构造 p 阶消失矩紧支撑正交小波的充分条件	49
3.1.3 Daubechies 正交小波的求解	51
3.2 尺度函数与小波函数的求解与作图	55
3.2.1 尺度函数的求解	55

3.2.2	正交尺度函数与小波函数的作图	56
3.3	紧支撑双正交小波的构造	60
3.3.1	必要条件	60
3.3.2	充分条件	67
3.3.3	具有对称性的紧支撑双正交小波的代数构造	68
3.4	本章小结	73
习题		73
第4章	小波变换的提升实现	75
4.1	多相位矩阵的因子分解	75
4.2	提升算法	81
4.3	整数小波变换	86
4.4	提升算法举例	86
4.5	对称提升因子分解	88
4.5.1	对称 Laurent 多项式的欧几里德算法	89
4.5.2	对称双正交滤波器多相位矩阵的提升分解	90
4.5.3	对称提升因子的计算方法	90
4.6	小波变换提升算法的实现技巧	91
4.6.1	任意长度信号小波变换的提升实现	91
4.6.2	利用少量辅助内存实现多尺度小波变换	92
4.6.3	边界处理	92
4.6.4	其他技巧	93
4.7	本章小结	93
习题		93
第5章	二维可分离小波变换及图像融合应用	95
5.1	二维正交多分辨分析	95
5.2	二维小波变换的 Mallat 算法	97
5.3	二维小波变换的几何意义	103
5.4	MATLAB 实现	105
5.5	小波图像融合	106
5.6	本章小结	109
习题		110
第6章	小波图像压缩	111
6.1	小波图像压缩简介	111
6.2	嵌入式零树小波图像编码	113
6.3	SPIHT 编码	121
6.4	EBCOT 编码	129
6.5	JPEG 2000 简介	131
6.6	本章小结	133
习题		134

第 7 章 小波时频分析	135
7.1 小波及连续小波变换	135
7.1.1 小波	135
7.1.2 连续小波变换	136
7.2 常用的基本小波	137
7.3 时频分析	140
7.3.1 傅里叶变换简介	140
7.3.2 短时傅里叶变换	141
7.3.3 小波时频分析	144
7.4 离散小波的局部化时频分析	145
7.4.1 小波变换的分类	145
7.4.2 离散小波的时频分析	146
7.5 S 变换	149
7.5.1 S 变换的定义	149
7.5.2 S 变换的性质	150
7.5.3 S 变换的应用	150
7.6 本章小结	152
习题	153
第 8 章 小波信号去噪	154
8.1 去噪问题描述	155
8.2 小波阈值去噪法	156
8.2.1 小波阈值收缩法	156
8.2.2 平移不变量小波阈值去噪法	160
8.2.3 平稳不变小波阈值去噪	164
8.3 本章小结	167
习题	168
第 9 章 二进小波及多尺度边缘检测应用	169
9.1 连续二进小波变换	169
9.2 二进小波的构造	171
9.3 离散二进小波变换的快速算法	177
9.4 二维二进小波变换及其快速算法	179
9.4.1 二维二进小波变换	179
9.4.2 二维二进小波的构造	180
9.4.3 离散二维二进小波变换及其快速算法	183
9.5 二进小波变换的模极大与信号多尺度边缘检测	185
9.6 二维小波变换模极大与图像多尺度边缘提取	186
9.6.1 连续图像的二进小波多尺度边缘检测	186
9.6.2 数字图像的多尺度边缘提取	187
9.6.3 阶梯型边界点的提取	189

9.6.4 边缘平移与滤波器对称性的关系	189
9.7 二维平稳二进小波变换	190
9.7.1 二维平稳二进小波的构造	190
9.7.2 离散快速算法	191
9.8 本章小结	193
习题	193
第 10 章 双树复小波变换及其应用	194
10.1 引言	194
10.2 一维双树复小波变换	195
10.3 二维双树复小波变换	198
10.3.1 二维双树实小波变换	198
10.3.2 二维双树复小波变换	200
10.4 双树复小波变换的应用	202
10.4.1 在图像纹理提取中的应用	202
10.4.2 其他应用简介	205
10.5 本章小结	206
习题	207
第 11 章 表面细分小波及其应用	208
11.1 研究背景	208
11.2 细分方法与细分曲面	210
11.2.1 Chaikin 的角切割细分曲线	210
11.2.2 Doo-Sabin 细分曲面	211
11.3 细分曲面的多分辨分析	213
11.4 Loop 细分小波及其应用	218
11.4.1 Loop 细分	218
11.4.2 双正交 Loop 细分小波	219
11.5 Catmull-Clark 细分小波及其应用	225
11.5.1 Catmull-Clark 细分	225
11.5.2 B 样条曲线的小波提升算法	226
11.5.3 Catmull-Clark 细分小波提升算法	227
11.5.4 在月球三维模型压缩及多分辨可视化中的应用	231
11.6 本章小结	236
习题	236
附录 符号的意义	237
参考文献	239

第 1 章 Haar 小波分析

1.1 简 介

小波分析的起源有多种说法。1910 年, Haar 提出了最早的 Haar 小波规范正交基, 但当时并没有出现“小波”一词。法国数学家 Meyer 认为, 小波分析思想萌芽于 1930—1980 年, 但真正起锤炼作用的是法国地质物理学家 Jean Morlet。当时 Morlet 的主要工作是, 通过分析由爆炸方法产生的人造地震数据来探知地下岩石油层分布, 即如何从地震反射信号中提取有用的石油信息。在地震信号分析中, 波的震动频率及其发生的时刻都很重要, 因此, 用地震法探矿的关键是对收集来的信息用合适的信号分析方法进行分析。傅里叶变换只能提供信号在整个时间域上的频率, 不能提供信号在某个时间段上的频率信息; 短时傅里叶变换将整个时间域分割成一些小的等时间间隔, 然后在每个时间段上用傅里叶分析, 它在一定程度上包含了时间频率信息, 但由于时间间隔不能调整, 因而它难以检测持续时间很短、频率很高的脉冲信号的发生时刻。1981 年, Morlet 在对傅里叶变换和短时傅里叶变换的异同、特点及函数构造进行创造性研究的基础上, 首次提出了“小波分析”的概念, 给出了以它名字命名的 Morlet 小波, 如图 1-1 所示, 该小波在地质数据处理中取得了极大成功。

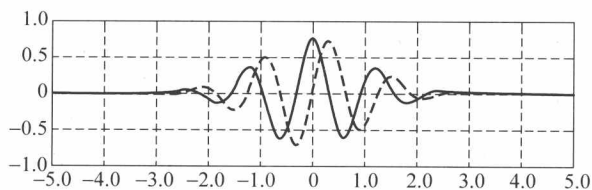


图 1-1 Morlet 小波: 实部(实线)、虚部(虚线)

Meyer 对 Morlet 的方法进行了深入系统的研究, 为小波分析的诞生和发展做出了重要的贡献。1986 年, 他意外而创造性地构造出具有一定衰减性的光滑函数 ψ , 其二进伸缩和平移 $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)\}_{j,k \in \mathbf{Z}}$ 构成函数空间 $L^2(\mathbf{R})$ 的一个标准正交基, 使小波分析取得了突破性发展。同年, 从事计算机视觉与图像分析的研究者 Mallat 与 Meyer 合作, 提出了多分辨率分析(multiresolution analysis, MRA)的理论框架^[1], 统一了先前提出的各种具体小波的构造方法, 成为小波构造的通用框架; 而且, 统一了各种信号处理的方法, 如多尺度分析(multiscale analysis)、时频分析和子带编码(subband coding)等, 使小波分析再次取得了突破性发展。更重要的是, 基于多分辨率分析框架, Mallat 于 1986 年建立了与经典快速傅里叶变换(FFT)相应的快速小波变换算法(称为 Mallat 算法)^[2], 由此实现了小波分析从数学到技术的转变, 奠定了小波分析作为快速计算工具的地位。这些工作与随后 Daubechies、Chui 等人的工作共同奠定了小波分析的理论基础。

本章从工程的角度出发, 以最简单的 Haar 小波分析为例, 从平均和细节这一简单计算入手, 依次引出尺度函数、小波函数、多分辨率分析、小波变换和滤波器组等概念, 使大家对小

波分析的思想、方法等有一个初步的、直观的理解和认识。

1.2 平均与细节

本节通过求平均与细节这两个线性变换,介绍信号序列的多分辨表示、小波变换及其塔式算法,同时说明将信号的小波变换用于信号压缩的思想。

设 $\{x_1, x_2\}$ 是由两个元素组成的信号,定义这两个元素的平均与细节为

$$a = (x_1 + x_2)/2$$

$$d = (x_1 - x_2)/2$$

则可将 $\{a, d\}$ 作为原信号的另一种表示,而且原信号 $\{x_1, x_2\}$ 可由 $\{a, d\}$ 恢复如下:

$$x_1 = a + d$$

$$x_2 = a - d$$

信号 $\{a, d\}$ 是 $\{x_1, x_2\}$ 的线性变换的结果,可以看出,当 x_1 与 x_2 非常接近时, d 会很小,这时, $\{x_1, x_2\}$ 可近似地用 $\{a\}$ 来表示,由此可实现信号压缩。重构信号为 $\{a, a\}$,误差信号为 $\{|x_1 - a|, |x_2 - a|\} = \{|d|, |d|\}$ 。特别地,当 $x_1 = x_2$ 时, $d = 0$,这时可实现信号的完全重构。这表明,平均值 a 可以看成原信号的整体信息,而 d 可看成原信号用 a 表示时丢失的细节信息。用 $\{a\}$ 近似地表示 $\{x_1, x_2\}$ 可实现信号压缩,而且,丢失很小的细节信息对最终信号的重构不会造成大的影响。

对于较多元素的信号 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,通过如下平均和细节运算可得到信号的另一表示 $\{a_{1,0}, a_{1,1}, d_{1,0}, d_{1,1}\}$ 。若细节信号 $d_{1,0}, d_{1,1}$ 都很小,则丢弃细节信号,可得压缩后的信号为 $\{a_{1,0}, a_{1,1}\}$ 。

(1) 平均运算:

$$\begin{cases} a_{1,0} = (x_1 + x_2)/2 \\ a_{1,1} = (x_3 + x_4)/2 \end{cases} \quad (1-1)$$

(2) 细节运算:

$$\begin{cases} d_{1,0} = (x_1 - x_2)/2 \\ d_{1,1} = (x_3 - x_4)/2 \end{cases} \quad (1-2)$$

用类似的方法可对压缩后的信号 $\{a_{1,0}, a_{1,1}\}$ 进行变换:

$$\begin{cases} a_{0,0} = (a_{1,0} + a_{1,1})/2 & (\text{平均}) \\ d_{0,0} = (a_{1,0} - a_{1,1})/2 & (\text{细节}) \end{cases} \quad (1-3)$$

如果 $d_{1,0}, d_{1,1}$ 和 $d_{0,0}$ 都非常小,则可以用 $\{a_{0,0}\}$ 代替原信号 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 。事实上,

$$\begin{aligned} a_{0,0} &= (a_{1,0} + a_{1,1})/2 = ((x_1 + x_2)/2 + (x_3 + x_4)/2)/2 \\ &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4 \end{aligned} \quad (1-4)$$

即 $a_{0,0}$ 为整个信号所有元素的平均值,它保留了信号最基本的信息。

易知,由 $\{a_{0,0}, d_{0,0}\}$ 可重构 $\{a_{1,0}, a_{1,1}\}$,由 $\{a_{1,0}, a_{1,1}\}$ 和 $\{d_{1,0}, d_{1,1}\}$ 可重构 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,于是,由 $\{a_{0,0}, d_{0,0}, d_{1,0}, d_{1,1}\}$ 可恢复 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,故我们找到原信号序列的另一种表示:

$$\{a_{0,0}, d_{0,0}, d_{1,0}, d_{1,1}\} \quad (1-5)$$

该序列称为原始序列 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 的小波变换,这种表示为数据压缩提供了更多的选择。

为体现小波分析中多分辨率表示的思想,称原信号 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 为最高分辨率信息,而根据求平均与细节的不同层次将平均信息(也称低频信息)与细节信息(也称高频信息)与分辨率联系起来,具体如下:

- (1) $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 表示最高分辨率信息;
- (2) $\{a_{1,0}, a_{1,1}\}$ 表示次高分辨率低频信息;
- (3) $\{d_{1,0}, d_{1,1}\}$ 表示次高分辨率细节信息;
- (4) $\{a_{0,0}\}$ 表示最低分辨率低频信息;
- (5) $\{d_{0,0}\}$ 表示最低分辨率细节信息。

在这种意义上, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 的小波变换 $\{a_{0,0}, d_{0,0}, d_{1,0}, d_{1,1}\}$ 由信号的整体平均及两个不同分辨率的细节信息组成,因而是 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 的一个多分辨率表示。

信号的小波变换过程可以用塔式算法表示。以 $\{3, 1, -2, 4\}$ 为例,它的塔式算法如图 1-2 所示。

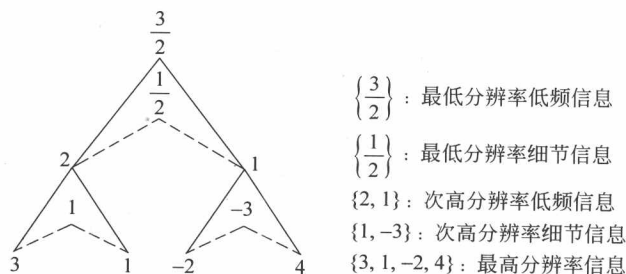


图 1-2 小波变换的塔式算法

可以看出, $\{3, 1, -2, 4\}$ 的小波变换为 $\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, -3\right\}$ 。

1.3 尺度函数与小波函数

本节引入 Haar 尺度函数与小波函数的概念,介绍一个函数的多分辨率表示及其与小波变换之间的关系。

现在将信号序列 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 看成单位区间上的一个函数:

$$f(t) = x_1 X_{[0,1/4)}(t) + x_2 X_{[1/4,1/2)}(t) + x_3 X_{[1/2,3/4)}(t) + x_4 X_{[3/4,1)}(t) \quad (1-6)$$

其中 $X_{[a,b)}(t)$ 表示区间 $[a,b)$ 上的特征函数。 $f(t)$ 是一个分段常数函数,如图 1-3 所示。

顺便指出, $[0,1)$ 上的连续函数可用更小区间上的更多的特征函数逼近。

现分析 $X_{[0,1/4)}(t)$ 、 $X_{[1/4,1/2)}(t)$ 、 $X_{[1/2,3/4)}(t)$ 和 $X_{[3/4,1)}(t)$ 之间的关系。显然,

$$X_{[1/4,1/2)}(t) = X_{[0,1/4)}(t - 1/4)$$

$$X_{[1/2,3/4)}(t) = X_{[0,1/4)}(t - 1/2)$$

$$X_{[3/4,1)}(t) = X_{[0,1/4)}(t - 3/4)$$

另一方面, $X_{[0,1/4)}(t)$ 可以看成单位区间上的特征函数

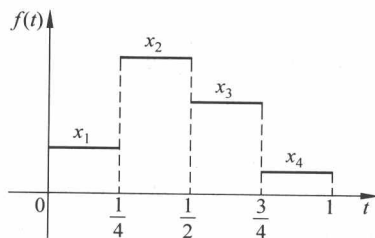


图 1-3 序列 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 对应的分段常数函数

的伸缩,即

$$X_{[0,1/4)}(t) = X_{[0,1)}(2^2 t)$$

于是, $X_{[1/4,1/2)}(t)$ 、 $X_{[1/2,3/4)}(t)$ 和 $X_{[3/4,1)}(t)$ 都可看成 $X_{[0,1)}(t)$ 的伸缩和平移。

引入记号:

$$\phi(t) = X_{[0,1)}(t) = 1, \quad 0 \leq t < 1 \quad (1-7)$$

定义

$$\phi_{j,k}(t) = \phi(2^j t - k), \quad k = 0, 1, \dots, 2^j - 1 \quad (1-8)$$

则

$$\phi_{0,0}(t) = \phi(t)$$

$$\phi_{1,0}(t) = \phi(2t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq t < 1 \end{cases}$$

$$\phi_{1,1}(t) = \phi(2t - 1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq t < 1 \end{cases}$$

这表明, $\phi_{1,0}(t)$ 和 $\phi_{1,1}(t)$ 可以由 $\phi_{0,0}(t)$ 的伸缩与平移得到, 如图 1-4 所示。

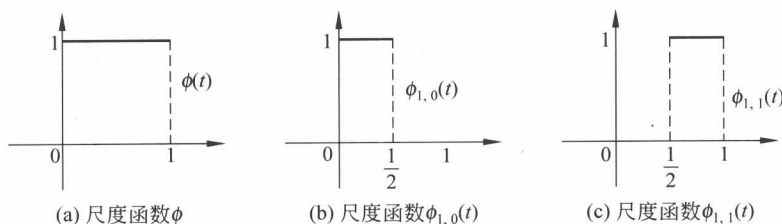


图 1-4 尺度函数的图形

$\phi(t)$ 被称为 Haar 尺度函数。式(1-6)定义的函数 $f(t)$ 可以重新写成如下形式:

$$f(t) = x_1 \phi_{2,0}(t) + x_2 \phi_{2,1}(t) + x_3 \phi_{2,2}(t) + x_4 \phi_{2,3}(t) \quad (1-9)$$

即函数 $f(t)$ 可以用一个 Haar 尺度函数 $\phi(t)$ 的伸缩与平移的线性组合表示。

$\phi_{j,k}$ 在其上不为零的区间叫做该函数的支撑。容易验证, $\phi_{j,k}$ 的支撑为 $\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right)$, 支撑的宽度 $\frac{1}{2^j}$ 随 j 的增加而减小。 j 称为分辨率, $1/2^j$ 称为尺度。

下面讨论用 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 的小波变换 $\{a_{0,0}, d_{0,0}, d_{1,0}, d_{1,1}\}$ 来表示式(1-9)定义的函数 $f(t)$ 。可将式(1-9)中的 $f(t)$ 看成最高分辨率的分解。求平均如同将 $f(t)$ 进行较低分辨率的表示, 这等价于用 $\phi_{1,0}$ 和 $\phi_{1,1}$ 的线性组合表示 $f(t)$ 。在这种表示中, $\phi_{1,0}$ 的系数是 $a_{1,0}$, 它是式(1-9)中 $f(t)$ 的前两个系数的平均值; $\phi_{1,1}$ 的系数是 $a_{1,1}$, 它是 $f(t)$ 的后两个系数的平均值。于是得到如下函数:

$$g_1(t) = a_{1,0} \phi_{1,0}(t) + a_{1,1} \phi_{1,1}(t) \quad (1-10)$$

一般地, $x_1 \neq x_2$ 。所以由 $f(1/8) = x_1$ 及 $g_1(1/8) = a_{1,0} = (x_1 + x_2)/2$ 可知, g_1 不等于 f , 即用 g_1 来表示 f 时丢失了一些细节信息, 需要一个函数来描述这种信息。该函数称为小波函数。

基本小波函数定义如下:

$$\psi(t) = X_{[0,1/2)}(t) - X_{[1/2,1)}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \end{cases} \quad (1-11)$$

不难发现, $\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1)$ 。 $\psi(t)$ 称为 Haar 小波, 其图形如图 1-5 所示。

与尺度函数 $\phi(t)$ 类似, 定义小波函数的伸缩和平移如下:

$$\psi_{j,k}(t) = \psi(2^j t - k), \quad k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$

于是有

$$\begin{aligned} \psi_{0,0}(t) &= \psi(t) \\ \psi_{1,0}(t) &= \psi(2t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/4 \\ -1, & 1/4 \leq t < 1/2 \\ 0, & 1/2 \leq t < 1 \end{cases} \\ \psi_{1,1}(t) &= \psi(2t-1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq t < 3/4 \\ -1, & 3/4 \leq t < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\psi_{1,0}(t)$ 和 $\psi_{1,1}(t)$ 的图形如图 1-6 所示。

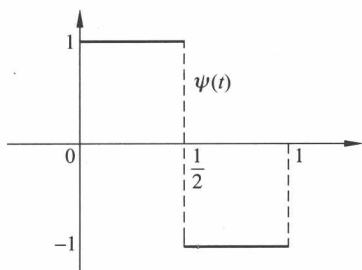


图 1-5 Haar 小波 $\psi(t)$ 的图形

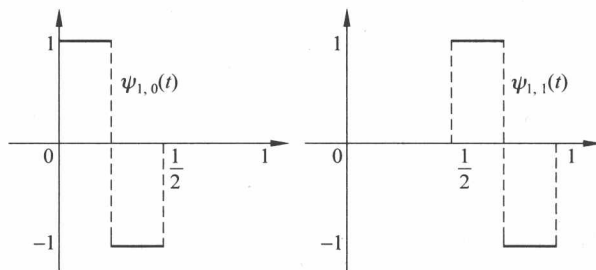


图 1-6 $\psi_{1,0}(t)$ 和 $\psi_{1,1}(t)$ 的图形

现重新考虑利用 $\{a_{0,0}, d_{0,0}, d_{1,0}, d_{1,1}\}$ 、尺度函数 $\{\phi_{1,0}, \phi_{1,1}\}$ 和小波函数 $\{\psi_{1,0}, \psi_{1,1}\}$ 表示 $f(t)$ 的问题。由式 (1-6) 可知, $f(t)$ 的最高分辨率表示是在长度为 $1/4$ 的子区间上。下面就每个子区间 $[0, 1/4)$ 、 $[1/4, 1/2)$ 、 $[1/2, 3/4)$ 和 $[3/4, 1)$ 上来看一下 g_1 和 f 的差别, 以便利用小波函数捕捉丢失的细节信息。

在区间 $[0, 1/4)$ 上, $f(t) - g_1(t) = x_1 - a_{1,0} = d_{1,0} (\Rightarrow x_1 = a_{1,0} + d_{1,0})$

在区间 $[1/4, 1/2)$ 上, $f(t) - g_1(t) = x_2 - a_{1,0} = -d_{1,0} (\Rightarrow x_2 = a_{1,0} - d_{1,0})$

这表明, 在区间 $[0, 1/2)$ 上,

$$f(t) = a_{1,0} \phi_{1,0}(t) + d_{1,0} \psi_{1,0}(t)$$

类似地, 在区间 $[1/2, 1)$ 上, 有

$$f(t) = a_{1,1} \phi_{1,1}(t) + d_{1,1} \psi_{1,1}(t)$$

将区间 $[0, 1/2)$ 及 $[1/2, 1)$ 上两个 $f(t)$ 的表达式写在一起, 可以得到区间 $[0, 1)$ 上 $f(t)$ 的一个新的表达式:

$$f(t) = a_{1,0} \phi_{1,0}(t) + a_{1,1} \phi_{1,1}(t) + d_{1,0} \psi_{1,0}(t) + d_{1,1} \psi_{1,1}(t) \quad (1-12)$$

$f(t)$ 被表示成支撑宽度为 $1/2$ 的尺度函数与小波函数的线性组合。其中, $d_{1,0} \psi_{1,0}(t)$ 和 $d_{1,1} \psi_{1,1}(t)$ 用于捕捉用 $g_1(t)$ 逼近 $f(t)$ 时丢失的细节信息。

现在根据对 $\{a_{1,0}, a_{1,1}\}$ 求平均的原理, 引入区间 $[0, 1]$ 上的平均函数 $a_{0,0}\phi_{0,0}(t)$ 代替式 (1-12) 中的前两项, 而细节项保持不变。令

$$g_0(t) = a_{0,0}\phi_{0,0}(t) + d_{1,0}\psi_{1,0}(t) + d_{1,1}\psi_{1,1}(t)$$

考虑用 $g_0(t)$ 逼近 $f(t)$ 时, 如何捕捉丢失的细节信息:

在区间 $[0, 1/4]$ 上, $f(t) - g_0(t) = x_1 - a_{0,0} - d_{1,0} = d_{0,0}$

在区间 $[1/4, 1/2]$ 上, $f(t) - g_0(t) = x_2 - a_{0,0} + d_{1,0} = d_{0,0}$

类似地, 在区间 $[1/2, 1]$ 上, $f(t) - g_0(t) = -d_{0,0}$

因此在区间 $[0, 1]$ 上,

$$f(t) = a_{0,0}\phi_{0,0}(t) + d_{0,0}\psi_{0,0}(t) + d_{1,0}\psi_{1,0}(t) + d_{1,1}\psi_{1,1}(t) \quad (1-13)$$

式 (1-13) 表明, 函数 $f(t)$ 可用序列 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 的小波变换、尺度函数和小波函数表示。

综上所述, 可给出序列 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 对应的函数表示, 以及该函数的如下多分辨率表示:

$$\begin{aligned} f(t) &= x_1 X_{[0,1/4]}(t) + x_2 X_{[1/4,1/2]}(t) + x_3 X_{[1/2,3/4]}(t) + x_4 X_{[3/4,1]}(t) \\ &= x_1 \phi_{2,0}(t) + x_2 \phi_{2,1}(t) + x_3 \phi_{2,2}(t) + x_4 \phi_{2,3}(t) \\ &= a_{1,0}\phi_{1,0}(t) + a_{1,1}\phi_{1,1}(t) + d_{1,0}\psi_{1,0}(t) + d_{1,1}\psi_{1,1}(t) \\ &= a_{0,0}\phi_{0,0}(t) + d_{0,0}\psi_{0,0}(t) + d_{1,0}\psi_{1,0}(t) + d_{1,1}\psi_{1,1}(t) \end{aligned}$$

其中, $\phi_{0,0}(t) = \phi(t)$, $\psi_{0,0}(t) = \psi(t)$ 。而 $\phi(t)$ 和 $\psi(t)$ 满足以下方程:

$$\phi(t) = \phi_{1,0}(t) + \phi_{1,1}(t) \quad (1-14)$$

$$\psi(t) = \phi_{1,0}(t) - \phi_{1,1}(t) \quad (1-15)$$

分别称式 (1-14) 和式 (1-15) 为两尺度方程和小波方程。

1.4 多分辨率分析

本节以 Haar 小波分析为例说明多分辨率分析的概念, 目的是从函数空间的高度认识函数的多分辨率表示。这里将涉及 $\phi_{j,k}$ 和 $\psi_{j,k}$ 所在函数空间的数学细节。

用 V_0 表示在区间 $[0, 1]$ 上为常数的函数所组成的线性空间, 尺度函数 $\{\phi = \phi_{0,0}\}$ 构成空间 V_0 的一个基; V_1 表示所有在区间 $[0, 1/2]$ 和 $[1/2, 1]$ 上分别为常数的分段函数构成的一个空间, 则 V_1 是一个线性空间, $\{\phi_{1,0}, \phi_{1,1}\}$ 构成 V_1 的一个基。显然式 (1-10) 定义的 $g_1(t)$ 属于 V_1 。因区间 $[0, 1]$ 上为常数的函数在 $[0, 1/2]$ 和 $[1/2, 1]$ 上自然也为常数, 故 $V_0 \subset V_1$ 。

用 V_2 表示所有在子区间 $[0, 1/4], \dots, [3/4, 1]$ 上分别为常数的函数空间。一般地, 令 V_j 表示所有在长度为 $1/2^j$ 的等间隔子区间上分别为常数的函数空间, 则 V_j 都是线性空间, 而且, 尺度函数 $\{\phi_{j,k}; k=0, 1, \dots, 2^j-1\}$ 构成 V_j 的一个基, 并且 V_j 满足如下嵌套关系:

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$$

对 V_j 中的元素定义内积如下:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g^*(t) dt \quad (1-16)$$

其中, $g^*(t)$ 表示 $g(t)$ 的共轭函数。容易验证, V_j 构成一个内积空间, 称为尺度空间。

如果 $\langle f, g \rangle = 0$, 则 f 和 g 称为正交的。令 $W_j = \{h \in V_{j+1} : \langle h, f \rangle = 0, \forall f \in V_j\}$, 则 W_j 被定义为 V_j 在 V_{j+1} 中的正交补, 即 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, 其中 $\oplus$ 表示正交和。

由于 $\langle \phi_{1,0}, \phi_{1,1} \rangle = 0$, 故 $\{\phi_{1,0}, \phi_{1,1}\}$ 构成 V_1 的一个正交基。一般地, 对每个 $j \geq 0$, 且 $k \neq l$, 都有 $\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle = 0$, 故 $\{\phi_{j,k}; k=0, 1, \dots, 2^j-1\}$ 构成 V_j 的一个正交基, 所以空间 V_j 的维数是 2^j , 即 $\dim V_j = 2^j$ 。下面证明, $\{\psi_{j,k}; k=0, 1, \dots, 2^j-1\}$ 构成 W_j 的一个正交基。

注意, 函数 $\psi_{j,k}$ 为常数的区间的长度为 $1/2^{j+1}$, 如图 1-7 所示, 可以看出, $\psi_{j,k} \in V_{j+1}$ 。

对 $\forall f \in V_j$, 容易验证, $\langle \psi_{j,k}, f \rangle = 0$, 从而 $\psi_{j,k} \in W_j$ 。例如, 对于 $f = c_0 \phi_{1,0} + c_1 \phi_{1,1} \in V_1$, c_0, c_1 是任意常数, 则

$$\langle \psi_{1,0}, f \rangle = c_0 \langle \psi_{1,0}, \phi_{1,0} \rangle + c_1 \langle \psi_{1,0}, \phi_{1,1} \rangle = 0 + 0 = 0$$

因此 $\psi_{1,0} \in W_1$; 类似地, $\psi_{1,1} \in W_1$ 。一般情况下, $\forall f \in V_j$, 存

在 $c_0, \dots, c_{2^j-1}$, 使得 $f = \sum_{l=0}^{2^j-1} c_l \phi_{j,l}$, 于是 $\langle \psi_{j,k}, f \rangle = \sum_{l=0}^{2^j-1} c_l \langle \psi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle = 0$ 。

此外, 对于 $k \neq l$, 还有 $\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,l} \rangle = 0$, 故 $\{\psi_{j,k}; k=0, 1, \dots, 2^j-1\}$ 是 W_j 中一组线性无关的正交向量。

因为 $\dim V_{j+1} = \dim V_j + \dim W_j$, 而 $\dim V_{j+1} = 2^{j+1}$, $\dim V_j = 2^j$, 故 $\dim W_j = 2^j$ 。又 $\{\psi_{j,k}; k=0, 1, \dots, 2^j-1\}$ 是 W_j 中 2^j 个正交向量, 所以 $\{\psi_{j,k}; k=0, 1, \dots, 2^j-1\}$ 是 W_j 的一个正交基。

作为以上讨论的副产品, 我们获得了 V_{j+1} 的另一个正交基:

$$\{\phi_{j,0}, \dots, \phi_{j,2^j-1}, \psi_{j,0}, \dots, \psi_{j,2^j-1}\} \quad (1-17)$$

W_j 有什么作用呢? W_j 可以看成高分辨率函数空间 V_{j+1} 用低分辨率函数空间 V_j 逼近时所丢失的细节信息, 我们称 W_j 为小波空间。于是, 对任一非负整数 $j > 0$, V_{j+1} 存在以下空间分解:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j = \dots = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j \quad (1-18)$$

从而, 对任一函数 $f_{j+1} \in V_{j+1}$, 存在以下多分辨表示:

$$f_{j+1} = f_j + d_j = f_{j-1} + d_{j-1} + d_j = \dots = f_0 + d_0 + d_1 + \dots + d_j \quad (1-19)$$

其中

$$f_l = \sum_{k=0}^{2^l-1} a_{l,k} \phi_{l,k} \in V_l, \quad l = 0, 1, \dots, j+1$$

$$d_l = \sum_{k=0}^{2^l-1} d_{l,k} \psi_{l,k} \in W_l, \quad l = 0, 1, \dots, j$$

$$\langle f_l, d_l \rangle = 0, \quad l = 0, 1, \dots, j$$

而 $\{a_{0,0}, d_{0,0}, \dots, d_{j,0}, \dots, d_{j,2^j-1}\}$ 正是序列 $\{a_{j+1,0}, a_{j+1,1}, \dots, d_{j+1,2^{j+1}-1}\}$ 的小波变换。

我们称 $\{V_j; j=0, 1, \dots\}$ 为由 Haar 尺度函数 ϕ 生成的 $L^2([0,1))$ 的多分辨率分析, 其中,

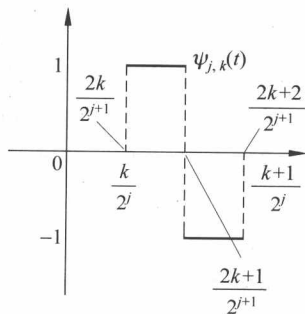


图 1-7 $\psi_{j,k}(t)$ 的图形