

中学学科素质教育丛书（二）

# 数学教育 与素质教育

主编 ◎ 王长沛

（下册）

Science Quality

● 突出素质教育思想

● 突出学科教育特点

● 突出创新体系

● 突出教育现代化

● 突出了人的主体性

中华工商联合出版社

中学学科素质教育丛书(二)

# 数学教育与素质教育

## (下册)

本册主编 王长沛

编者 (按姓氏笔画顺序)

王长沛 王俊邦 仇楚棠

尹志锦 孙连众 张君麟

韩守为 薛文叙

中华工商联合出版社

## 下册 · 目录

### 第六章 “问题解决型”的课堂教学形式

#### 第一节 “问题解决型”课堂教学形式的系统结构…… (181)

一、知识结构的系统化…… (181)

二、典型习题规范化…… (183)

三、数学方法、数学思想深刻化…… (185)

#### 第二节 “问题解决型”课堂教学形式关注的

四大模块…… (188)

一、兴趣与导入…… (189)

二、教师的主导作用如何发挥…… (193)

三、学生的主体作用如何体现…… (202)

四、解题训练…… (208)

#### 第三节 “问题解决型”的课堂教学形式…… (212)

一、五个流程…… (212)

二、“问题解决型”的课堂教学形式的一个模式 … (213)

### 第七章 渗透数学思想方法的教学

#### 第一节 数学思想方法与素质教育…… (217)

|                     |       |
|---------------------|-------|
| 第二节 中学数学思想方法概述····· | (220) |
|---------------------|-------|

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| 第三节 在建构观指导下渗透数学思想方法的教学····· | (234) |
|-----------------------------|-------|

## 第八章 新技术应用案例

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| 一、利用《几何画板》进行问题解决····· | (252) |
|-----------------------|-------|

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| 二、利用《几何画板》验证定理结论、加强印象····· | (261) |
|----------------------------|-------|

## 第九章 数学教师与行动研究

|               |       |
|---------------|-------|
| 第一节 数学教师····· | (271) |
|---------------|-------|

|              |       |
|--------------|-------|
| 一、教师的自白····· | (271) |
|--------------|-------|

|                 |       |
|-----------------|-------|
| 二、研究告诉我们什么····· | (279) |
|-----------------|-------|

|               |       |
|---------------|-------|
| 三、重新发现教师····· | (290) |
|---------------|-------|

|               |       |
|---------------|-------|
| 第二节 行动研究····· | (299) |
|---------------|-------|

|                |       |
|----------------|-------|
| 一、教学改革的主体····· | (299) |
|----------------|-------|

|                   |       |
|-------------------|-------|
| 二、可持续发展引起的困惑····· | (303) |
|-------------------|-------|

|                 |       |
|-----------------|-------|
| 三、行动研究及其实施····· | (307) |
|-----------------|-------|

|              |       |
|--------------|-------|
| 四、比较与鉴别····· | (312) |
|--------------|-------|

|               |       |
|---------------|-------|
| 五、行动研究举例····· | (315) |
|---------------|-------|

## 第十章 研究学生了解学生

|                   |       |
|-------------------|-------|
| 第一节 为什么要研究学生····· | (324) |
|-------------------|-------|

|                 |       |
|-----------------|-------|
| 第二节 怎样研究学生····· | (333) |
|-----------------|-------|

|                                    |       |
|------------------------------------|-------|
| 一、数学教育研究方法的范式转换·····               | (334) |
| 二、新旧研究范式的区别·····                   | (337) |
| 三、理论框架·····                        | (341) |
| 第三节 生物多样性与建立新型自然价值观教育·····         | (342) |
| 一、弗赖登塔的“生命线”·····                  | (343) |
| 二、需要一个模型(理论框架)·····                | (346) |
| 第四节 数学概念理解水平·····                  | (350) |
| 一、CSMS 的背景·····                    | (351) |
| 二、数学活动难易度的解释框架·····                | (354) |
| 三、更深入的分析——转向新范式·····               | (359) |
| 第五节 我们的尝试·····                     | (363) |
| 一、研究的目的与方法·····                    | (364) |
| 二、中学阶段对数和数的表示形式的不同层次的<br>数学要求····· | (366) |
| 三、学生们对数和数的表示形式的认知情况·····           | (369) |

## 第六章 “问题解决型” 的课堂教学形式

辩证唯物主义认为：世上万物只要存在必有其原因，存在即有其某一方面的合理性；世上万物各处在其相应的系统之中，彼此相关，前后有序；世上万物都在发展变化，不可能不变也很少突变。这些重要的观点对于我们如何进行教学，如何去认识教材，如何认识学生都有重要的作用。经过多年的研究与实践，我们总结归纳了一种“问题解决型”的课堂教学形式。

“问题解决型”课堂教学形式的理论基础：

先引用波利亚（G·Polya）的一些基本观点：①“解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋”——“问题解决”的重要性；②“如果教育未能对智力的发展作出贡献，这样的教育显然是不完全的”——“问题解决”在数学教育中的重要作用；③对“问题解决”的研究应当集中在启发法（heuristic）上，“数学启发法在今天几乎已成为问题解决的同义词”。近年来人们又注意到了“调节”和“观念”的因素也同

样是解决问题的重要因素。

在前人研究的基础上我们提出了以下四个理论基础：

(1) 哲学基础：“实践是唯一且是最高的标准”——人类的知识均来源于实际，最终也必将回到实践来检验认识的真理性和，去解决实际问题。

(2) 认知心理学基础：人对事物的认识是在他已有的认知结构的基础上，按每人各自独特的方式吸收新知识，经过认可、同化、顺应、发展几个阶段而形成新的认知结构，从而完成了一次认识的飞跃。即学习者是自己通过信息传递主动地获得知识，而不是任何人教会的。

(3) 人本主义学习论基础：“培养兴趣、激发动机”，“热爱是最好的老师”，“鼓励成功”是永恒的最大的动力；关注每个人的发展，让每个人都顺利地发展与成长。

(4) 现代教学论基础：“教学过程是师生双边交流与活动的过程”，“我们的教学要给予一定的发展尝试与再现，为发现作准备”。

本章以下的讨论都是建立在这四个基础上进行的。下面我们在这种教学形式的三大系统结构；关注的四大模块；课堂教学的五个流程这三方面进行讨论。

## 第一节 “问题解决型”课堂教学形式的系统结构

在整个教学设计中都要注意到：知识结构的系统化、典型习题的规范化、数学思想、方法的深刻化这三个基本要点。

### 一、知识结构的系统化

#### 1. 依据

根据《中学数学教学大纲》：“首先要使学生正确理解数学概念……要引导学生用对比的方法认识它们之间的区别与联系。”“在教学中要加强新旧知识之间的联系，……要引导学生认真阅读理解和随时小结，把所学的知识系统化。”“要注意教学各部分内容的内在联系，以及它们之间的相互关系……要加强教材的系统性。”《会考说明》制订了双向细目表，作出了三个层次的要求。《高考说明》在此基础上又提出了“灵活和综合运用较高的要求。”

#### 2. 教学现状

我们经常测问高三学生，让他把某一单元（例如函数）的内容全写出来。几乎没有人能写全，知识既是支离破碎的又是漏洞百出的，甚至有不少的错误概念。如无人售票车一个无月票的乘客，他所坐的站数与票价之间认为没有函数关系；函数

$y=x^2$ ,  $x \in [-2, 2)$  认为是偶函数等等。问题是比较严重的,但也并不可怕,经过复习、总结以后情况定会大大改观的,从中也可见在高一、高二课堂教学中的弱点与缺陷。

### 3. 我们的做法

知识不必象教材那样一节、一节地堆砌,而应把每单元的知识按其内在规律重行组织。先给一个框架,然后按系统讨论,这样建立的知识网络不仅把知识都纳入其中,而且按认知心理学的理论这也是符合人的认知规律的,只有建立起了认知的块状网络结构,学生的认识才是完整的、深刻的,也就避免了上述知识支离破碎的毛病及只见树木不见森林的弊病。

具体做法介绍如下:

在复习初中正、反比例函数,一次函数,二次函数的基础上,我们归纳了函数要从三方面、十个知识点来讨论。

#### (1) 讨论的十个流程

#### (2) 纵 横向以各种函数分类

向 《函数知识表提要》

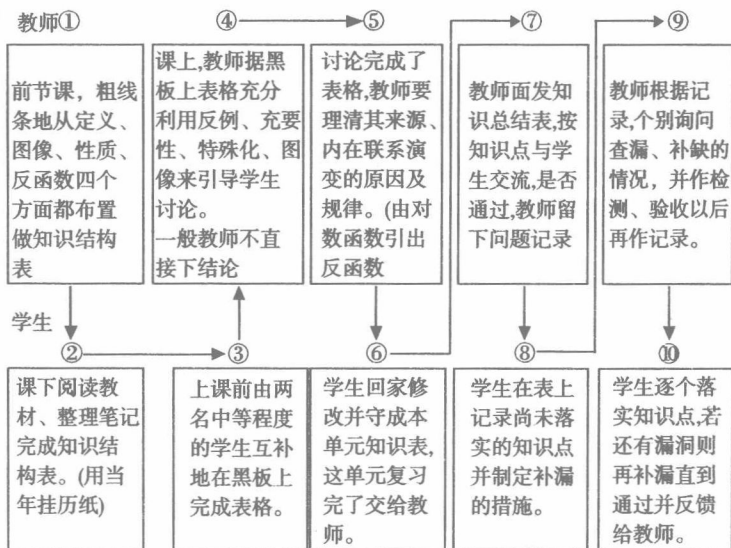
以 定义三要素

此 图象及其四种变换

分 性质及其在图象中的反映

类 反函数——定义、求解、与原来函数的关系

这样建立的知识网络就把知识纳入其中,这种做法符合人的认知规律,学习者认知的块状网络结构,也就随之完成了。这样,学生的认识才是完整的、深刻的。



## 二、典型习题规范化

学数学, 概念是第一位的, 不懂概念无法学习, 而概念不清又往往是解错题的重要原因, 但只学概念也不是学数学, 学数学必须解题

### 1. 依据

《中学数学教学大纲》规定: “练习是数学教学的有机组成部分, 对于学生掌握基础知识和基本技能、培养能力是必不可少的。” “……要充分发挥练习的作用”, 学习数学是离不开解题的。“会考”及“高考”试卷题型明确提出有选择题、填空题与解答题。按目前的考试制度, 一个学生学了12年数学, 最后就以他做15个选择题、4个填空题、6个解答大题的成功

率与得分状况来决定他数学学习成绩等次及决定他能否进大学学习。因此，中学师生都特别重视做数学题。

## 2. 教学现状

重视做数学题，这本无可非议，不幸的是出现一个奇怪的异化现象——一般学校采取的是“篇子教学”，一张接一张地做篇子，我们也经常测试学生，他们常常连课本上的习题、复习题都未落实。试问这样的篇子教学效果会好吗？必然是利少弊多。

## 3. 我们的做法

(1) 做习题分析表。做知识总结表以后，要求学生先把课本上的例题、习题、复习题整理一遍，再佐以相应的会考、高考试题，一般可按 a. 概念性问题；b. 恒等变形问题；c. 同解变形问题；d. 图形求解与性质的问题；e. 综合性问题；f. 应用性问题，这样六类进行归纳。要求每一类型配上具体实例且写出解答的规范步骤及习题所用到的数学方法及思想。正如我们熟知的，解题在数学教学中能起到加强理解的作用，评价的作用，调节的作用，发展作用和增强应用意识的作用。解题必须经过训练以形成解题能力，这在数学学习与复习中是极其重要的。有人认为这种习题归纳的做法是“套题型、不可取”。我们认为不比较难以鉴别，不总结难以探索一般规律，我们这么做不是为了套题型而是为了完成解题训练中的一个重要环节（关于解题训练将在下一个问题中谈及）即关键不在于“归纳题型”这个形式而在于你是如何训练学生解题的，学生掌握了

这些标准化了的问题之后再延伸到其它非标准的问题，重点仍在于训练学生分析问题与解决问题的能力。这才是最重要的，这也正是大纲所要求的“要重视能力的培养”，“以逐步形成运用数学知识来分析和解决实际问题的能力”。

(2) 做错误分析表。要求学生这一章所有检测中出现的错误认真的分析，不能简单地归之于不认真、马虎、粗心等。

①先展示错题。②按 a. 审题；b. 概念、定义；c. 定理、公式、法则；d. 计算程序与法则；e. 选用的方法；f. 其它原因这六方面列表进行细致分析，并对每个错题订正改错。③再做两个类似题以求巩固，一个月之后再以这两个类题检验自己是否已矫正了错误，若仍未通过则还需进行再一次的矫正与改错直至通过。

这样对每章内容，每个学生自己做了①知识总结表；②习题分析表；③检测的评价与错误分析表。师生双方对每个学习个体的知识掌握状况、解题状况都一清二楚，并不断地有针对性地弥补缺陷。由于学生积极主动参与了，教师教学有针对性，事实证明这样的学习是较有效的，每个学生都会有较大的提高，考试也必然是成功的。

### 三、数学方法、数学思想深刻化

#### 1. 依据

《中学数学教学大纲》指出：“要使学生在正确理解数学概念的基础上进行判断、推理从而理解数学的原理和方法”，

“……要使学生逐步学会分析、综合、归纳、演绎、概括、抽象、类比等重要的思想方法。”《高考说明》中更明确地提出：“数学科考试宗旨是：测试中学数学基础知识，基本技能，基本思想方法；考查逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力，以及分析问题和解决问题的能力。”数学是一门具有很强方法论意义的学科，各种方法又具有普遍性，因此数学思想、数学方法必定是我们平时教学及复习的重点内容，也必定是会考、高考的重点目标。

## 2. 教学现状

经常听到学生这样说：“我上课时，例题都能听明白，但自己做题就不会了”。“同例题类似的题我会做，一变样就不会了。”究其因是学生并没有真正理解例题的本质及掌握解法的实质，即“只知表象不知内涵”，“只知其然而不知其所以然”，这正是我们教学工作的致命弱点——学生善于模仿而缺乏创造。这就要求我们扶教育观念、教学方法上进行彻底的改革。

## 3. 我们的做法

注重在日常教学工作中潜移默化地、润物细无声地进行渗透，有计划地在各年级相同章节归纳总结思想方法，知识遗忘之后，方法才是最重要的，而能力也就从中体现出来，即真正做到“授之以渔”。这是学生终生受益的事。

(1) 数学方法从何而来，具体问题的求解活动本身往往就是产生方法的过程，且对一类问题的解决有重要影响。我们在日常的数学教学活动中及复习时都要通过解题达到：①让学生

掌握常用的数学方法——配方法、待定系统法、比较法、数学归纳法、代入法、消元法、换元法、变量转换法、坐标法、构造法等。②通过解题分析与讨论，让学生掌握科学的思维方法——观察、比较、分类、实验、概括、抽象、类比、归纳、特殊化（具体化）、一般化（系统化）等。③掌握数学中的逻辑方法——演绎法、归纳法；综合法、分析法；反证法、同一法。

（2）重视知识的发生过程，对知识中蕴涵的基本数学思想要充分揭示出来并让学生逐步领悟、逐步理解常用的数学思想——数形结合思想，方程思想，函数思想，分类思想，化归思想等。

总之，数学思想、数学方法的习得与掌握都是通过解题活动而获得的，离开解题抽象地讲什么思想、什么方法都是毫无意义的。“掌握数学意味着什么呢？这就是善于解题，不仅善于解一些标准的题，而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题。”（G·polya）

这就要求我们在日常的教学活动中特别注意对方法与思想的挖掘与讨论，一般要经历三个阶段：

①一开始是以教师导与讲解为主。

②第二阶段是教师启发引导学生进行讨论交流，教师适当地调控并加以归纳提高。

③第三阶段学生已具有一定的数学素养并养成良好的数学学习习惯，这时以他们自己讲解做题讨论为主了。

解题训练到一定的阶段要求学生对十种常用的数学方法整理出它们在数学各分支、各章节何处得到了应用，也把它们整理成图表形式，即要求学生做的第四张表——数学方法应用表。学生真正做好了这张表格，他对于数学知识的理解与掌握就到了“以不变应万变”的较高的境界。这样的学生不仅很好地理解并学会了数学，而且对他以后进一步学习都奠定了坚实的基础；这样的学生参加任何考试必然是很成功的，成绩也必然是优秀的；这样的学生在学习时具有创新意识，他们必定会成长为创造型的人才。

## 第二节 “问题解决型”课堂教学 形式关注的四大模块

“数学教育中人文精神的建设主要是指在传递数学知识、训练数学技能、培养教学智慧时，要贯穿以人为中心、以人为目的的主旨和精神。它要求数学教育中重视数学对人性的影响，关注教学对人生的价值，注重科学伦理、科技行为规范和科学态度的培养。”“当代社会，作为传播、继承科学文化的数学教育建构和重塑人文精神有着深刻的理论和现实背景。”

我国当前的教育绝大多数学校采用的仍是以认知为主的教学，这种教学的弊病已暴露无疑，当前这种教育也已到了非改不可的地步。我们借鉴人本主义的学习与教学思想所强调的①

课堂教学要充分发挥每个学生的潜能，教师要创设必要的情境以达到学生“自我实现的教学效果；②教学主要培养学生的积极性、主动性、独立性和创造性。在知识经济时代的今天培养“有创新意识的人才”更具有不可估量的作用；③在课堂教学中，学生不仅要“学会”，而更主要的是要“学会学习”即会学，且懂得如何自我评价；④在课堂教学中，注重情感的重要性，切记不能以任何理由、借口来讽刺挖苦学生，更不能使学生受到任何威胁。

因此我们提出了以下四个值得我们重视的模块，作为“问题解决型”课堂教学形式的基石。

## 一、兴趣与导入

### 1. 依据与条件

“所有的智力活动都依赖于兴趣”，“热爱是最好的老师。”

(1) 数学知识本身及教材结构所具备的和谐的美，对称的美，结构推理的美，容易从中激发兴趣

(2) 学生思维特征。初中生一感性直觉思维较多，学生易依从教师，这时感情投入、新奇感能起较大作用。

高中生一理性逻辑思维较多。学生崇拜真理、追求成功。教师知识渊博，知识对成功的有效帮助，世界的进步、人类的文明都有较大的作用

(3) 大纲规定“教学目的……要培养学生对数学的兴趣，激励学生为实现四个现代化学好数学的积极性。”

(4) 教师教学的艺术风格：知识渊博，语言风趣，讲授生动，比喻恰当，最关键的是要热爱自己的专业、热爱从事的工作及热爱学生。

## 2. 导入的目的

引起学生对学习这节内容的注意及激发兴趣，促进他们积极思维，参与师生间、学生间的交流，为引入新课作准备。

## 3. 导入的方式

(1). 实例导入：a. 教师引导学生去观察某些事物从而提出问题；或教师事先侦察好情境让学生去发现问题；或在课上展示实物、图片等让学生提出问题；b. 以讲故事、做游戏的形式导入。

(2) 设问导入：从预先布置好的某些用旧知识能解决的问题来引进新的概念、新的命题、新的方法。这些问题学生们虽已解决了，但教师又从另一角度提出对它的认识，这样认识就到了新的层次，一种好的解法往往又内涵着丰富深刻的数学思想方法。这是更重要的。

如预先布置习题：直线  $l: 6x - 3y + 4 = 0$ ，抛物线  $C: Y = 6x^2$  交于 A、B 两点，求以 AB 为直径的圆的方程

学生的解答大量的的是求出 A、B 两点坐标再求中点 O，即为圆心， $|AB|/2 = r$  也有少数同学用到了圆的直径式方程，在此基础上教师引导学生去观察  $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)$