结构可靠性设计

JIEGOU KEKAOXING SHEJI

国防工业出版社
National Defense Industry Press

内 容 提 要

本书从结构分析和设计的角度介绍了结构元件、结构体系的可靠性分析与设计理论，介绍了结构可靠性试验的有关内容，重点介绍了结构体系的可靠性分析方法，对在疲劳载荷作用下的结构可靠性问题给予了特别的重视。

本书可作为飞机设计、机械设计和其它结构类专业本科生的教材，也可供结构强度类专业师生及其它相关专业科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构可靠性设计 / 姚卫星，顾怡编. —北京：国防工业出版社，2004.11

ISBN 7-118-03536-5

Ⅰ.结… Ⅱ.①姚…②顾… Ⅲ.结构-可靠性-设计 Ⅳ.V423

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 00117 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 8½　字数 250 千字

2004 年 11 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—3000 册　定价 25.00 元

国防书店：(010)68428422　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　发行业务：(010)68472764

前　言

工程结构在使用中经受着复杂的载荷和环境。结构设计中设计人员必须面对各种不确定性,在结构安全评定中,这些不确定性成了安全评定的难点。结构可靠性分析和设计能够较好地处理这些不确定性,因此引起了从事结构分析、设计、制造、使用和管理的专家和工程技术人员的重视。南京航空航天大学航空宇航学院系已在飞机设计专业开设“结构可靠性设计”课程多年,本书是在姚卫星教授编写的《结构可靠性设计引论》讲义的基础上,经修改和补充编写而成的。

保证一个工程结构在预定的使用环境和服役期内安全可靠地运行,涉及到多个方面。本书所介绍的结构可靠性分析和设计的内容只涉及了其中的一个方面。由于工程结构在重复载荷下的疲劳破坏是影响工程结构安全的主要因素之一,因此本教材对结构在疲劳载荷下的可靠性分析给予了足够的重视。根据设计专业的特点,本教材还注意从结构设计的角度叙述结构可靠性分析和设计的有关概念,并使有关概念和理论同工程实际相结合。

全书共分五章,第1章主要介绍结构可靠性分析和设计的有关术语和结构设计思想的演变,第2章十分简要地介绍了与结构可靠性分析相关的概率统计知识,学过概率论的读者可跳过这一章的一至五节。第3章介绍结构元件的可靠性分析和设计,第4章介绍结构体系的可靠性分析和设计,第5章介绍结构可靠性试验方案设计和试验过程中的有关数据分析和处理的理论与方法。

在编写过程中我们参照了许多已出版的书籍和学术论文,在此向这些文献的作者表示衷心的感谢。成建国教授认真审阅了全书,并提出了不少宝贵意见,特此致谢。本书是在南京航空航天大学教务处和教材科的关心下出版的,在此深表感谢。作者特别感谢管爱平同志为本书所付出的辛勤劳动。

编 者

2004年8月

目　录

第1章 概　　论

1.1 可靠性的定义

国标 GB3187—82 给出了产品可靠性和可靠度的一般定义：

可靠性：产品在规定条件下和规定时间内，完成规定功能的能力。

可靠度：产品在规定条件下和规定时间内，完成规定功能的概率。

显见，可靠度是可靠性的定量表示。由于产品在规定条件下和规定时间内能否完成规定功能是随机事件，因此必须用概率来度量其发生的可能性的大小。GB3187—82 中给出的定义是适用于一切产品的可靠性的一般定义，因研究的具体对象和使用条件等的不同，可靠性的具体定义可能有所不同。

可靠性研究最早出现在电子、电气和自动控制系统等方面，并逐步形成了可靠性研究的科学体系。结构可靠性的研究则稍后于电子和自动控制系统可靠性的研究，并且至今在理论上和实践上还没能像电子系统可靠性那样系统、完整和有效。

产品的质量与诸多的因素有关，见图 1-1。广义的可靠性即有效性包含了产品的维修性和狭义可靠性两个方面，它不仅与产品的内在品质有关，还与使用和环境等有关。

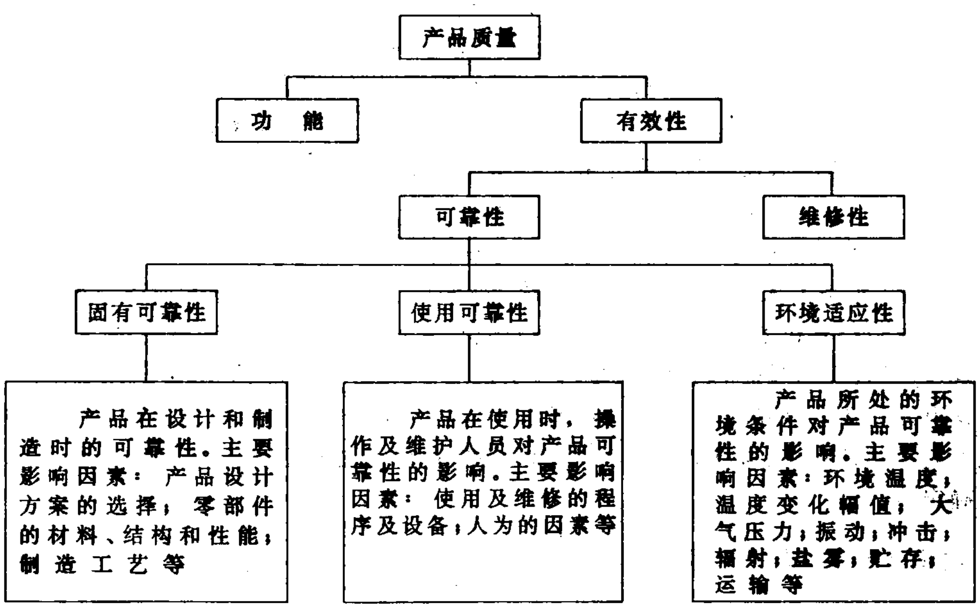

图 1-1　产品质量与可靠性

1.2 结构可靠性问题的提出

1.2.1 结构可靠性问题的提出

结构可靠性理论和应用这一学科分支的发展，如同其它学科一样，有着理论上的基础和客观上的需要，理论的形成与发展又以现实的需要作为动力。由于许多工程结构越来越复杂、越来越昂贵，因此如何使结构既有合适的安全性同时又有良好的经济性这一问题日益成为结构设计的明确要求，并且希望不仅能从定性上分析，而且还能作出定量分析与设计。这一切都加快了结构可靠性研究的步伐。

结构可靠性分析与设计在结构安全性的评定中能够大显身手，这是因为结构可靠性理论能合理地处理结构工程设计中的不确定性，而其它方法则不能做到这一点。这些不确定性则正是工程结构安全性评定的难点。现实世界中几乎所有设计变量都带有一定的随机性，在结构可靠性分析中，可按其来源将它们分为三类：

1. 物理性不确定性　在结构强度分析中，有很多物理量，如载荷、材料性能、几何尺寸等均存在着分散性，通常称这类与物理量直接相关的不确定性为物理性不确定性。大多数物理性不确定性与时间有关。

2. 统计性不确定性　对变量的分布特征的分析与分布函数的确定离不开统计和推断。但是任何一个统计与推断均是以变量的样本作为依据进行的，而任意一个样本的容量均不可能是无穷大，所以任何一种参数统计方法都带有不确定性，这种由于样本容量有限而产生的不确定性叫统计性不确定性。

3. 模型性不确定性　结构设计与分析首先要建立输入量与输出量之间关系的模型，这一模型通常是按力学原理或经验建立的，同一实际问题可以建立不同的模型。模型可能是确定性的，也可能是随机性的。由于现实世界十分复杂，通常数学模型不可能是现实世界的完完全全的再现，对模型所作的假设和对复杂边界条件所作的简化都会使模型包含有不确定性。在很多情况下，模型不确定性对结构可靠性有很大的影响，是不容忽略的。

上述三类不确定性中，大多数物理性不确定性属客观不确定性，它们是客观存在的，如：材料机械性能（σ_b，E 等）、大气环境（突风分布等）、构件尺寸公差，等等。其余属主观不确定性，它们只能根据经验积累和主观判断来确定，是与知识、资料等缺乏有关的不确定性，如：结构强度分布假设、环境条件和载荷的近似、模型的真实程度、结构分析的精度、样本容量的限制等。人们在认识世界和改造世界的实践中，不断地加深对客观不确定性的认识和理解，给出了越来越精确完整的描述；同时又通过知识的积累和认识的提高，通过制定出种种规范、标准等，以减少主观不确定性。

1.2.2 结构可靠性研究的主要内容

可靠性研究的内容极其丰富，贯穿于产品的预研、分析、设计、制造、装配、试验、使用和管理等整个过程和一切方面。从学科角度去分类，可大致分为下述三个方面：

1. 可靠性数学　主要研究可靠性的定量描述方法。概率论、数理统计、随机过程等是它的重要基础。

2. 可靠性物理　研究元件、系统失效的机理、物理原因和物理模型。不同研究对象的失效机理是不同的，因此不同学科领域内可靠性物理研究的方法和理论基础也不同。

3. 可靠性工程　它包含了可靠性分析、预测与评估、可靠性设计、可靠性管理、可靠性生产、可靠性维修、可靠性试验、可靠性数据的收集、处理和交换等。从产品的设计到产品的退役的整个过程中，每一步都可包含于可靠性工程之中。

结构可靠性设计只是可靠性工程的一个重要环节，它主要包含了结构可靠性分析、结构可靠性设计和结构可靠性试验三大部分。这三大部分也正是本书的主要内容。实际使用经验表明：尽管实际工程结构的失效原因很多，但在重复载荷作用下的结构疲劳破坏是影响结构安全且与结构设计直接相关的主要因素，因此尽管目前结构疲劳可靠性的研究还很不深入，本书对结构在疲劳载荷作用下的可靠性分析和设计还是给予了特别的重视。

结构可靠性分析方法很多，但从分析理论着眼可分为三种水平：①半经验半概率法，也称第Ⅰ水平法，它对影响结构可靠度的某些参数作统计分析，然后结合经验给出一系列的局部安全因子，对结构可靠度作出半定量的估计；②近似概率法，也称第Ⅱ水平法，它对失效域作理想化的处理，然后采用近似概率计算方法，对结构可靠度作出近似的定量估计；③全概率法，也称第Ⅲ水平法，它对各变量作全概率的描述，用联合概率密度函数求解结构可靠度。第Ⅰ水平法太粗糙，不能对结构可靠度作出较好的描述，第Ⅲ水平法需要大量的统计资料，计算方法又十分复杂，因此很少直接使用，而第Ⅱ水平法是目前实际结构可靠性分析中应用最多的方法。

1.3 有关的可靠性术语

1.3.1 失效概率 $F(t)$

结构的失效概率 $F(t)$ 也称作破坏概率，它是结构在时刻 t 之前破坏的概率，即 $F(t)$ 是结构寿命 T 不超过 t 的概率。

$$F(t) = \mathrm{P}\{T \leqslant t\} \tag{1-1}$$

结构失效的概率密度函数为 $f(t)$：

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-2}$$

1.3.2 可靠度 $R(t)$

可靠度 $R(t)$ 也称作存活率。按定义 $R(t)$ 表示产品在规定的使用条件下，在规定的时间内，完成规定功能的概率。

$$R(t) = \mathrm{P}\{T > t\} \tag{1-3}$$

显然，可靠度的对立事件是失效概率 $F(t)$，即有：

$$F(t) + R(t) = 1 \tag{1-4}$$

1.3.3 失效率 $\lambda(t)$

失效率 $\lambda(t)$ 亦称作故障率。$\lambda(t)$ 定义为：产品在 t 时刻以前未发生破坏的条件下，在 t 时刻的条件破坏概率密度。

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \tag{1-5}$$

(1) $\lambda(t)$与$R(t)$、$f(t)$、$F(t)$的关系

$$\because \quad F(t) = 1 - R(t)$$

$$\therefore \quad f(t) = -\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$$

代入(1-5)式，得：

$$\lambda(t) = -\frac{1}{R(t)}\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$$

则：

$$-\lambda(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}R(t)}{R(t)}$$

对上式积分，并注意到 $R(0)=1$，$\ln[R(0)]=0$，得到：

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)\mathrm{d}t} \tag{1-6}$$

由(1-4)式得：

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(t)\mathrm{d}t} \tag{1-7}$$

由(1-2)式得：

$$f(t) = \lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(t)\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

(2) $\lambda(t)$的估计

产品的失效率 $\lambda(t)$可以根据使用中的实际统计资料去估计。$\lambda(t)$定义的另一个概率解释为：让 N 个同批同型的产品同时独立地工作，记 $n(t)$为产品在$(0,t)$时间内发生故障的个数，$\lambda(t)$为产品在下阶段 Δt 单位时间内发生故障的条件概率：

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t\to 0}} \frac{n(t+\Delta t) - n(t)}{[N - n(t)]\Delta t} \\
&= \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta t\to 0}} \frac{\dfrac{n(t+\Delta t)}{N} - \dfrac{n(t)}{N}}{\left(1 - \dfrac{n(t)}{N}\right)\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{[1 - F(t)]\Delta t} \\
&= \frac{1}{R(t)}\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{f(t)}{R(t)}
\end{aligned} \tag{1-9}$$

在实践中，只要记下产品在不同时刻的失效数 $n(t)$，就可由(1-9)式求出失效率 $\lambda(t)$。

(3) 典型的失效率曲线

通过大量产品（主要是电子产品）的失效率统计结果，发现典型的失效率曲线呈“浴盆状”，故称之为“浴盆曲线”，见图 1-2。

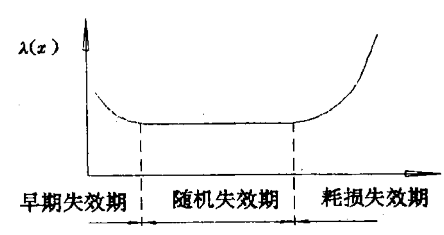

图 1-2　典型的失效率曲线

早期失效期：特点是处于产品使用初期，失效率先高后低，原因源于设计缺点、材料缺

陷、工艺不良、检查差错等。防止早期失效率高的办法是在产品投入使用前通过可靠性筛选。

随机失效期：特点是失效率基本上是常数，原因源于偶然因素。提高产品可靠性的办法是改造产品的设计，使之更适合于产品的使用环境。

耗损失效期：特点是失效率逐渐上升，原因源于零部件的老化、疲劳、磨损等。延缓第三阶段寿命的办法是提高零部件的寿命和及时维修。

(4) 平均失效率 $\bar{\lambda}$

当 $\lambda(t)$ 变化不大时，可以用平均失效率 $\bar{\lambda}$ 来表示 $\lambda(t)$：

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\mathrm{d}t \tag{1-10}$$

(5) 失效率的单位

失效率 $\lambda(t)$ 的单位通常采用 1/小时或 FIT (Failure unIT)，$1\text{FIT} = 10^{-9}/\text{h}$。

1.3.4 可靠性寿命的尺度

(1) 平均寿命 MTTF 和 MTBF

对发生故障就不能修理的零部件或系统而言，MTTF(Mean Time To Failure)指从开始使用到发生故障的工作时间的期望值，即为**平均无故障时间**。

$$\begin{aligned} \text{MTTF} &= \int_0^{\infty} tf(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} R(t)\mathrm{d}(t) \end{aligned} \tag{1-11}$$

对可修复产品而言，平均寿命 MTBF(Mean Time Betweem Failures)指两次故障之间产品工作时间的期望值。

(2) 可靠寿命、中位寿命、特征寿命

可靠寿命 t_r：使可靠度等于给定值 r 时的寿命，r 叫可靠水平。

$$R(t_r) = r \tag{1-12}$$

若知道可靠度函数 $R(t)$，解此方程即可得到 $t_r = R^{-1}(r)$。

中位寿命 $t_{0.5}$：可靠水平 $r = 0.5$ 时的可靠寿命，即 $R(t_{0.5}) = 0.5$。

特征寿命 $t_{e^{-1}}$：可靠水平 $r = e^{-1}$ 时的可靠寿命，即 $R(t_{e^{-1}}) = e^{-1}$。

1.3.5 维修度 $M(t)$ 与有效度 $A(t)$

维修度 $M(t)$：指可维修产品在规定的条件下和规定的时间内完成维修的概率。提高维修度 $M(t)$ 有下述三个途径：①维护性设计，即设计产品时要考虑到产品的故障，使产品易查、易修；②提高维修人员的素质；③选择适当的高水平的设备。

有效度 $A(t)$：对可维修产品，指在某时刻 t 之前维持其功能的概率；对不可修复产品，有效度 $A(t)$ 即为可靠度 $R(t)$。

1.3.6 可靠性指标之间的关系

各可靠性指标不是相互独立的，图 1-3 总结了各可靠性指标之间的关系。

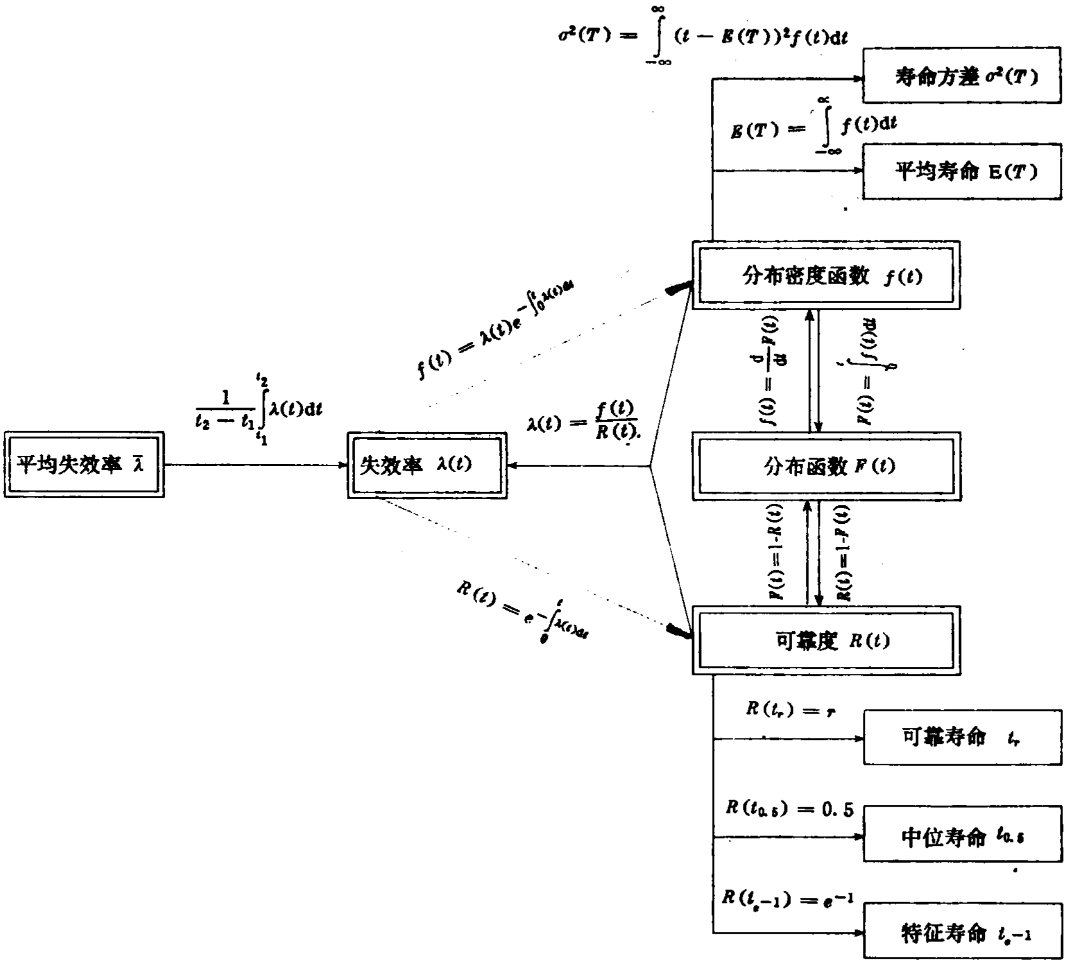

图 1-3 可靠性指标之间的关系

例 1-1 设某产品的失效概率密度函数为指数分布

$$f(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ re^{-rt} & t>0\end{cases}$$

试求其可靠性指标。

解：

失效分布函数： $F(t)=\int_0^t f(t)\mathrm{d}t=1-e^{-rt}$

可靠度： $R(t)=1-F(t)=e^{-rt}$

失效率函数： $\lambda(t)=\dfrac{f(t)}{R(t)}=r$

平均寿命： $\mathrm{MTTF}=\int_0^{\infty}tf(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{r}$

中位寿命： $t_{0.5}=\dfrac{1}{r}\ln 2$

特征寿命：　$t_{e^{-1}} = \frac{1}{r}$

1.4 飞机结构抗疲劳断裂设计思想的发展

在飞机发展的最初阶段，飞机设计师们就对飞机结构的静强度给予了注意。随后，逐步建立了结构静强度分析、设计与试验验证的整套成熟方法。结构疲劳问题暴露以后，人们逐渐认识到，对飞机结构仅仅进行静强度设计是不够的。为了保证飞机结构在规定使用期内的安全性和经济性，人们先后发展了安全寿命设计、经济寿命/损伤容限设计，并正在研究发展结构可靠性分析与设计理论方法。

1.4.1 结构疲劳断裂破坏过程

不同的研究目的对结构疲劳断裂破坏过程有不同的分法，对结构可靠性分析和设计而言，结构疲劳断裂破坏过程可分为裂纹形成、小裂纹扩展和大裂纹扩展三个阶段，见图 1-4。

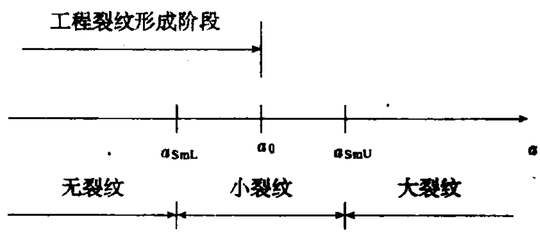

图 1-4　结构疲劳断裂破坏过程

实验资料表明：小裂纹扩展行为与大裂纹有很大不同，且小裂纹扩展寿命占相当的比例，所以将裂纹扩展分为三个阶段是有意义的，其划分的关键是分界点 a_{SmL} 和 a_{SmU} 的确定。小裂纹下界 a_{SmL} 可定义为：当裂纹长度 a 小于等于 a_{SmL} 时，含有此裂纹的试件或结构与相应的无裂纹试件或结构具有相同的疲劳强度；小裂纹上界 a_{SmU} 可定义为：当裂纹长度 $a \geqslant a_{SmU}$ 时，此裂纹便和大裂纹一样没有小裂纹的奇异行为(如：da/dN 与 ΔK 的关系和大裂纹一样，$\Delta K_{th} = \text{const.}$，等等)；$a_{min}$ 为对应于 ΔK_{th} 和最大应力幅值的裂纹长度；a_0 为工程裂纹长度。a_0 的大小与结构、材料、环境等多种因素有关，a_0 可能 $> a_{SmU}$，也可能 $< a_{SmU}$ 。

在结构可靠性分析和设计中，裂纹形成阶段采用概率疲劳分析方法，裂纹扩展阶段采用概率断裂力学分析方法。

1.4.2 安全寿命设计

为了防止飞机结构在使用期内发生疲劳破坏，人们发展了安全寿命设计思想，即：飞机结构除了满足静强度、动强度以外，还必须注意安全寿命问题。这种设计思想的要点是：飞机结构的安全使用寿命是以试验、使用和分析得到的结构疲劳寿命数据为基础来确定的，其设计准则为：

$$N_D \geqslant N_S = \frac{N_{Ex}}{n_f} \tag{1-13}$$

式中：N_D—— 飞机结构的设计寿命；

N_S—— 安全寿命或使用寿命；

N_{Ex}—— 疲劳试验寿命，实际上是根据试验、使用或分析得到的结构平均寿命；

n_f ——分散系数。

在安全寿命设计中，合理选取分散系数 n_f 的数值是一个重要的问题。n_f 应反映试验条件与真实使用条件的差异和试验疲劳寿命的分散特性。通常取 $n_f = 4$ 。

为了提高飞机结构的安全寿命，应在结构设计中采用抗疲劳设计方法，如：按疲劳的观点选材；注重细节设计，改善结构的疲劳品质；采用局部强化工艺；等等。

1.4.3 经济寿命/损伤容限设计

安全寿命设计思想以结构投入使用前完整为前提，以疲劳力学为基础，以确定无裂纹(通常取裂纹尺寸不大于 0.5mm 为无裂纹)寿命(即安全寿命)为目标。但实践表明，安全寿命设计思想的前提难以实现。在发生了一系列空难事件后，人们发展了经济寿命/损伤容限的设计思想。它以结构中存在较小的初始缺陷为前提，以断裂力学为其理论基础，以确定经济寿命为目标。其设计准则为：

$$N_D \geqslant N_{EC} = \frac{N_{Ex}}{n} \tag{1-14}$$

式中：N_D—— 飞机结构的设计寿命；

N_{EC}—— 飞机结构的经济寿命；

N_{Ex}—— 耐久性试验寿命；

n ——分散系数，通常取为 2。

经济寿命/损伤容限设计思想要求含损伤结构在损伤达到一定限度之内仍保持足够的剩余强度。在结构设计中要特别注意采用多路传力结构。

1.4.4 可靠性设计

现实世界中几乎所有的变量都是随机变量，而影响飞机结构经济性和安全性的一些主要因素具有明显的随机性，所以应该用随机设计变量代替原来的定值设计变量，由此形成了可靠性设计的思想。其设计准则为：

$$R_S \geqslant R_S^* \tag{1-15}$$

式中：R_S ——结构体系的可靠度值，它可对应于静强度、动强度、疲劳强度等条件下的结构体系可靠度值；

R_S^* ——结构的可靠性指标。

实施结构可靠性设计首先需要建立可靠性设计的原始数据库，目前这一工作刚刚开始。可靠性设计的理论有待进一步完善，但作为一种设计思想，在现阶段的结构设计中就可有所体现。

第 2 章　概率统计基础

2.1　随机变量及其分布

2.1.1　随机变量及其分布

定义：设 E 是事件，它的样本空间是 $S=\{e\}$，如果对于 $e\in S$ 有一个实数 $X(e)$ 与之对应，则可得到一个定义在 S 上的实值单值函数 $X(e)$，称 $X(e)$ 为**随机变量**，对于随机变量 X，它的取值不超过实数 x 的事件的概率 $P(X\leqslant x)$ 是 x 的函数，称之为**概率分布函数**，简称分布函数，记为 $F_X(x)$，即：

$$F_X(x)=P(X\leqslant x)\qquad(-\infty<x<\infty)\tag{2-1}$$

分布函数有如下基本性质：

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}F_X(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}F_X(x)=1$；
2. 广义单调性，即：若 $x_1<x_2$，则 $F_X(x_1)\leqslant F_X(x_2)$，结合 1. 有 $0\leqslant F_X(x)\leqslant 1$；
3. 右连续性，即 $F_X(x+0)=F_X(x)$；
4. $P(a<x\leqslant b)=F_X(b)-F_X(a)$；
5. $P(x=a)=F_X(a)-F_X(a-0)$。

随机变量分离散型和连续型两类。

离散型随机变量　若随机变量 X 只能取有限个或可列无限个数值 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，则称 X 为离散型随机变量。若 X 取 x_k 的概率已知，且记为：

$$P(X=x_k)=p_k\qquad(k=1,2,\cdots,n\cdots)\tag{2-2}$$

则称(2-2)式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律。

p_k 有以下性质：

1. $p_k\geqslant 0$；
2. $\sum\limits_k p_k=1$；
3. X 的分布函数 $F_X(x)=\sum\limits_{x_k\leqslant x}p_k$ 是在 x_k 处跳跃 p_k 的阶梯函数。

连续型随机变量　如果对于随机变量 X 的分布函数 $F_X(x)$，存在非负函数 $f_X(x)$，使对于任意实数 x 有：

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)\mathrm{d}t\tag{2-3}$$

则称 X 为连续型随机变量，$f_X(x)$ 称为随机变量 X 的概率密度函数或分布密度函数。

$f_X(x)$ 有如下性质：

1. $f_X(x)\geqslant 0$；

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$；

3. $\mathrm{P}(x_1 < X \leqslant x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\mathrm{d}x$；

4. 若 $f_X(x)$ 在点 x 处连续，则有 $F'_X(x) = f_X(x)$。

2.1.2 条件概率

设 E_1 和 E_2 为两个事件，且 $\mathrm{P}(E_1)>0$，则称

$$\mathrm{P}(E_2|E_1) = \frac{\mathrm{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathrm{P}(E_1)} \tag{2-4}$$

为事件 E_1 发生的条件下事件 E_2 发生的概率。如果 $\mathrm{P}(E_1)=0$，则规定 $\mathrm{P}(E_2|E_1)=0$。由此可得**乘法公式**：

$$\mathrm{P}(E_1 \cap E_2) = \mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}(E_2|E_1) = \mathrm{P}(E_2)|\mathrm{P}(E_1|E_2) \tag{2-5a}$$

推广到有限个事件，有

$$\mathrm{P}(E_1E_2\cdots E_n) = \mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}(E_2|E_1)\mathrm{P}(E_3|E_1E_2)\cdots\mathrm{P}(E_n|E_1E_2\cdots E_{n-1}) \tag{2-5b}$$

设有一事件组 $E_i(i=1,2,\cdots)$ 构成了一个样本空间的划分，即满足

$$E_i \cap E_j = 0 \qquad (i \neq j)$$

$$\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 1$$

则对于任意一个事件 A 有

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}(A|E_i)\mathrm{P}(E_i) \tag{2-6}$$

称(2-6)为**全概率公式**。

例 2-1　图 2-1 所示桁架，在力 F 的作用下，杆 a、b、c 的破坏概率分别为 0.05、0.04 和 0.03。任何一杆的破坏都会导致桁架的破坏，求此桁架的破坏概率。

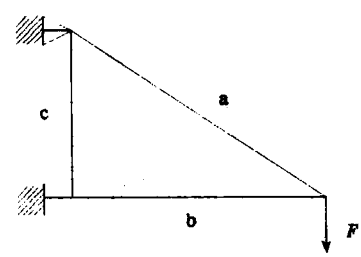

图 2-1　简单桁架

解：假设各个杆件的破坏都是统计上独立的，则两个或两个以上杆件破坏的概率就等于各杆件破坏概率的乘积，下面计算该桁架的破坏概率。

用 A、B 和 C 分别表示三个杆件各自的破坏事件，则有

$$\mathrm{P}(A) = 0.05,\quad \mathrm{P}(B) = 0.04,\quad \mathrm{P}(C) = 0.03$$

由统计上独立的假设，有

$$\mathrm{P}(AB) = 0.05 \times 0.04 = 0.002$$

$$\mathrm{P}(AC) = 0.05 \times 0.03 = 0.001\,5$$

$$\mathrm{P}(BC) = 0.04 \times 0.03 = 0.001\,2$$

$$\mathrm{P}(ABC) = 0.05 \times 0.04 \times 0.03 = 0.000\,06$$

最后，桁架的破坏概率就是杆件 a、b 和 c 的破坏事件之和。所以

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A \cup B \cup C) &= 0.05 + 0.04 + 0.03 - 0.002 - 0.001\,5 - 0.001\,2 + 0.000\,06 \\ &= 0.115\,36\end{aligned}$$

2.1.3 Bayes 定理

如果事件组 $E_i(i=1,2,\cdots)$ 构成某样本空间 S 的一个划分，则对任意一事件 $A(\mathrm{P}(A)>0)$，有

$$\mathrm{P}(E_i|A)=\frac{\mathrm{P}(E_i)\mathrm{P}(A|E_i)}{\sum\mathrm{P}(E_i)\mathrm{P}(A|E_i)} \tag{2-7}$$

例 2-2 假定一根钢梁在使用前必须要通过某一指定的试验。还由经验假定 95%的梁能通过试验，但假定试验只有 90%可靠，因此，这种试验的结果的错误概率是 0.1。现在的问题是完好的梁通过试验的概率是多少？

解：设 E 是梁为完好的事件，A 是它通过试验的事件。则

$$\mathrm{P}(E|A)=0.90$$

而 $\quad \mathrm{P}(\overline{E}|\overline{A})=0.90$

所以 $\quad \mathrm{P}(E|\overline{A})=1-0.90=0.10$

由经验有 $\mathrm{P}(A)=0.95$。问题是要求出 $\mathrm{P}(A|E)$。事件 A 和 $\overline{A}$ 是互不相容的，所以根据(2-6)式有

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(E|A)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(E|\overline{A})\mathrm{P}(\overline{A})\\&=0.90\times0.95+0.10\times0.05\\&=0.86\end{aligned}$$

最终得到 $\quad \mathrm{P}(A|E)=\dfrac{\mathrm{P}(E|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(E)}=\dfrac{0.90\times0.95}{0.86}=0.994$

2.2 随机向量及其分布

2.2.1 随机向量及其分布

定义：若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个随机变量，由其组成一个数组 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，叫做($n$维)**随机向量**，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 叫做 $\mathbf{X}$ 的分量。

若存在有限个或可列个 n 维数组(向量)$a_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$，$a_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$，…，有

$$\mathrm{P}\{\mathbf{X}=a_i\}=\mathrm{P}\{X_1=a_{i1},\cdots,X_n=a_{in}\}=p_i \tag{2-8}$$

且满足 $\sum\limits_i p_i=1$，则称 $\mathbf{X}$ 为**离散型随机向量**，其密度矩阵为：

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots\\ p_1 & p_2 & \cdots\end{bmatrix} \tag{2-9}$$

若存在一个非负函数 $f(\mathbf{X})=f(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，对一切 $-\infty<a_i\leqslant b_i<\infty(i=1,2,\cdots,n)$，均有：

$$\mathrm{P}\{a_1\leqslant X_1\leqslant b_1,\cdots,a_n\leqslant X_n\leqslant b_n\}=\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \tag{2-10}$$

则称 X 为**连续型随机向量**，称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\mathbf{X}$ 的分布密度函数。

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\mathrm{P}\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\} \tag{2-11}$$

被称为随机向量 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的**分布函数**。

分布函数有如下基本性质：

1. 对每个 i，F 是 X_i 的广义单调增右连续函数；

2. $F(-\infty, x_2, \cdots, x_n) = F(x_1, -\infty, \cdots, x_n) = \cdots = F(x_1, x_2, \cdots, -\infty) = 0$；

3. $F(\infty, \infty, \cdots, \infty) = 1$。

2.2.2 边缘分布

设 $X^{(1)} = (X_1, X_2, \cdots, X_m)(m \leqslant n)$，是随机向量 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一个子随机向量，则称 $X^{(1)}$ 的分布是 X 的**边缘分布**。若 X 的分布函数是 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 $X^{(1)}$ 的分布函数为：

$$F_1(X_1, X_2, \cdots, X_m) = F(X_1, X_2, \cdots, X_m, +\infty, \cdots, +\infty) \tag{2-12}$$

若 X 的分布密度函数是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则 $X^{(1)}$ 的分布密度函数为：

$$f_1(x_1, \cdots, x_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_{m+1} \cdots \mathrm{d}x_n \tag{2-13}$$

由此可见：$X^{(1)}$ 的分布完全由 X 的分布函数决定，但同一个 $X^{(1)}$ 的分布可以是不同分布函数的边缘分布。

例 2-3　设二维随机向量 (X, Y) 服从正态分布，其概率密度为：

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\}$$

其中：μ_1、μ_2、$\sigma_1 > 0$、$\sigma_2 > 0$、$-1 < \rho < 1$ 是常数，求边缘分布 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$。

解：$\because$

$$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2} = \left(\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} - \rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right)^2$$

$$f(x, y) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} - \rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right)^2\right]$$

令

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} - \rho\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right)$$

则

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}\right] \end{aligned}$$

同理可得 $\quad f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\dfrac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2{}^2}\right]$

即二维正态分布随机向量的边缘分布为一维正态分布。

2.2.3 条件分布

设 (X, Y) 是二维离散型随机向量，其分布律为：

$$\mathrm{P}\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots)$$