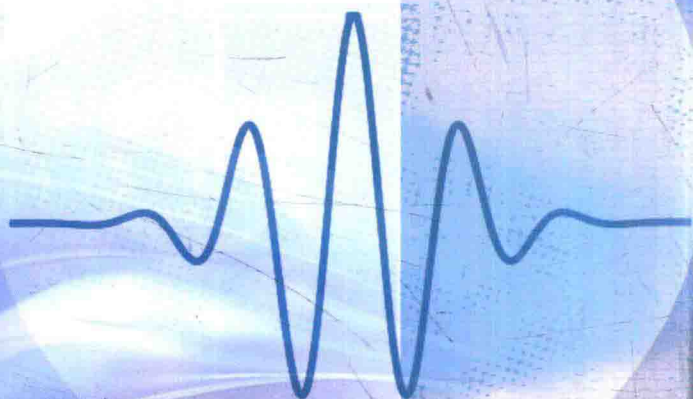


苏变玲 编著

小波变换 在电力系统中的应用



科学出版社

小波变换在电力系统中的应用

苏变玲 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书较全面地介绍小波变换在电力系统中的谐波检测、暂态故障信号定位及雷电干扰的识别的基本原理和方法。全书共8章,主要包括:小波变换理论及其在电力系统中的应用、暂态电能质量的检测分析方法、小波变换在暂态电能质量分析中的应用、具有带通滤波特性的小波的构造及其在电力谐波检测中的应用、正交双路光纤电流互感器暂态信号的处理、暂态行波理论及其仿真研究、基于暂态行波的超高压输电线路雷电干扰故障的识别、基于暂态行波的故障测距。

本书可作为电力类专业大学生的教学参考书,也可供大学生课程实践设计参考。

图书在版编目(CIP)数据

小波变换在电力系统中的应用/苏变玲编著. —北京:科学出版社,2016.6
ISBN 978-7-03-048874-9

I. ①小… II. ①苏… III. ①小波分析-应用-电力系统-分析 IV. ①TM71

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 136766 号

责任编辑:祝 洁 杨 丹 霍明亮 / 责任校对:刘亚琦

责任印制:徐晓晨 / 封面设计:迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2016 年 6 月第一次印刷 印张:10 1/8

字数:204 000

定价:75.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

小波变换是一种时域-频域分析,在时域-频域同时具有良好的局部化性质。它可以根据信号不同的频率成分,在时域和空间域自动调节取样的疏密程度。信号频率高,取样密;频率低,取样疏。小波变换的这些优良特性,使得其能随信号频率的变化自动调节时域-频域窗口,敏感信号的变化,以任意精度表示出信号,即可以观察函数、信号的任意细节,并加以分析。因此,在信号分析与重构、信号和噪声分离技术、特征提取等工程应用上,小波变换显示出一定的优越性。

本书作者曾主持陕西省教育厅资助的自然科学基金项目“基于 DSP 的电力系统暂态信号的分析研究”、“超高压输电线路雷电干扰行波信号的暂态分析与识别研究”和渭南市自然科学基金项目“基于暂态行波的超高压输电线路雷电干扰识别”。作者对小波变换在电力系统中的应用开展了长期的研究工作,取得了一些成果。鉴于此,作者将多年来研究所得汇总整理,旨在把小波变换这个强有力的工具引入到电力系统中,便于更多相关领域的技术人员和高校师生掌握这一技术,以期能更好地解决电力系统中存在的实际问题。

本书注重基本原理的阐述,除了简要介绍小波变换理论和行波检测理论外,还构造了具有带通特性的组合小波以实现谐波分析,实现了基于暂态行波的雷电干扰识别及其相关软件仿真,完成了电力系统的故障测距。

在本书的编写过程中,得到了李国强教授的详细审阅,提出了许多宝贵的意见,谨致以衷心的感谢。同时对学科组同仁及校内外师友提供的参考资料和无私帮助,在此一并致以谢意。

由于作者水平有限,书中疏漏之处在所难免,敬请读者与专家批评指正。

目 录

前言

第 1 章 小波变换理论及其在电力系统中的应用	1
1.1 傅里叶变换和短时傅里叶变换	1
1.1.1 傅里叶变换	1
1.1.2 短时傅里叶变换	3
1.2 小波变换	6
1.2.1 连续小波变换	7
1.2.2 离散小波变换	9
1.2.3 小波变换的特点	10
1.3 小波变换与傅里叶变换的比较	13
1.4 小波变换的多分辨率分析	14
1.5 小波的分类	16
1.5.1 经典类小波	16
1.5.2 正交小波	19
1.5.3 双正交小波	22
1.6 小波变换在电力系统中的应用	23
1.7 本章小结	27
第 2 章 暂态电能质量的检测分析方法	29
2.1 暂态电能质量的定义和分类	29
2.1.1 暂态电能质量定义	29
2.1.2 暂态电能质量问题的一般分类	31
2.2 暂态电能质量检测分析方法的比较	34
2.3 电能质量问题的国内外研究状况	35
2.3.1 国外研究现状	35
2.3.2 国内研究现状	36
2.4 基于小波变换的电力系统暂态信号的研究内容	37
2.5 本章小结	38
第 3 章 小波变换在暂态电能质量分析中的应用	39
3.1 暂态电能质量的检测与定位	39
3.1.1 小波变换与信号奇异性特征	39

3.1.2 模极大值原理	40
3.2 基于小波分解与重构的信号去噪	42
3.3 暂态电能质量信号的特征提取	42
3.4 仿真结果	43
3.4.1 模拟信号的仿真结果	43
3.4.2 带噪模拟信号的仿真结果	50
3.5 本章小结	52
第4章 小波在电力谐波检测中的应用	53
4.1 电力谐波的检测方法	53
4.1.1 电力系统谐波的危害	53
4.1.2 电力系统谐波测量方法简述	54
4.2 基于 FFT 的谐波检测法存在的问题	55
4.2.1 FFT 变换法	55
4.2.2 FFT 算法的特点	57
4.2.3 信号混叠	58
4.2.4 频谱泄漏与栅栏效应	58
4.3 基于小波的谐波检测法及其 MATLAB 仿真	59
4.3.1 谐波信号模型的建立	59
4.3.2 MATLAB 小波分析	64
4.3.3 仿真结论	68
4.4 组合小波的构造及其在谐波检测中的应用	69
4.4.1 小波变换的带通特性	70
4.4.2 组合小波的构造	70
4.4.3 电力信号的谐波分析	71
4.5 本章小结	75
第5章 正交双路光纤电流互感器暂态信号的处理	76
5.1 概述	76
5.2 普通 MOCT 系统的原理	76
5.3 正交双路 MOCT 系统实时提取电力电流信号的原理	78
5.4 光纤电流互感器暂态信号的处理	79
5.4.1 基于组合小波的滤波和利用多分辨率分析的暂态故障定位	80
5.4.2 基于小波的实时性	80
5.5 正交双路 MOCT 的信号处理结果	80
5.6 本章小结	81

第 6 章 暂态行波理论及其仿真研究	83
6.1 行波基本理论	83
6.1.1 行波的基本概念	83
6.1.2 波速度与波阻抗	84
6.1.3 行波的折射和反射	86
6.2 配电线路故障行波暂态特征分析	86
6.2.1 配电网中性点接地方式	86
6.2.2 故障初始行波模量分析	87
6.2.3 单相接地故障模量行波分析	88
6.2.4 两相短路故障模量行波分析	90
6.3 仿真分析	91
6.3.1 仿真软件的简介	91
6.3.2 仿真模型及其参数	92
6.3.3 单行接地故障仿真分析	93
6.3.4 两相短路故障仿真分析	97
6.3.5 两相接地故障仿真分析	101
6.3.6 三相接地故障仿真分析	106
6.4 本章小结	109
第 7 章 基于暂态行波的超高压输电线路雷电干扰故障的识别	110
7.1 高压输电线路中雷电干扰的识别方法	110
7.1.1 阈值比较	111
7.1.2 暂态波形识别	112
7.1.3 能量分析判据	114
7.1.4 结果与讨论	115
7.2 雷电电流波数学模型的分析	115
7.2.1 雷电流的解析表达式	116
7.2.2 雷电流波形的比较	119
7.2.3 雷电流的频谱分析	120
7.2.4 结果与讨论	123
7.3 基于暂态行波的超高压输电线路雷电干扰的识别	124
7.3.1 小波变换在雷电故障分析中的应用	124
7.3.2 输电线路感应雷和直击雷故障的具体分析	125
7.4 本章小结	129
第 8 章 基于暂态行波的故障测距	130
8.1 故障测距算法	130

8.1.1 行波测距法	130
8.1.2 故障分析法	131
8.1.3 智能化测距法	131
8.2 高压输电线路的行波测距方法	132
8.2.1 故障行波的产生	132
8.2.2 行波的传输特性	132
8.2.3 行波的反射和折射	133
8.2.4 行波测距法的基本原理	134
8.3 基于小波变换的输电线路行波测距	136
8.3.1 连续小波变换的基本概念	137
8.3.2 小波变换模极大值理论	137
8.4 基于 MATLAB 的行波故障测距仿真分析	138
8.4.1 仿真工具介绍	139
8.4.2 输电线路故障仿真模型	139
8.4.3 输电线路故障行波的提取	140
8.4.4 仿真及结果分析	141
8.4.5 输电线路单端行波测距和双端行波测距的比较	148
8.5 本章小结	148
参考文献	150

第 1 章 小波变换理论及其在电力系统中的应用

长期以来,傅里叶(Fourier)分析一直被认为是最完美的数学理论和最实用的分析方法之一。但是经典的傅里叶变换有其固有的缺点:只适用于确定性的平稳信号,在时域无任何定位性(或分辨率)。傅里叶变换在反映整个信号全部时间下的整体频域特征时,只能获得信号的整个频谱,它将频谱散布在整个频率轴上而难以获得信号的局部特性,特别是非平稳信号在时间轴上的任何突变。傅里叶分析对于突变信号和非平稳信号仍难以获得期望的结果。

为了克服经典傅里叶分析本身的弱点,人们持续探索和发展了信号的时频分析法。1946年 Gabor 提出的加窗傅里叶变换(windowed Fourier transform, WFT)就是其中一种,但是加窗傅里叶变换未能从根本上解决傅里叶分析的固有问题。小波变换是时间和频率的局部变换,它具有多分辨率分析的特点,是一种时间窗与频率窗都可以改变的时频局部化分析方法,即在低频部分具有较高的频率分辨率和较低的时间分辨率,在高频部分具有较高的时间分辨率和较低的频率分辨率。小波变换在时间域和频率域都可以达到较高的分辨率,称为“数学显微镜”^[1],因而能有效地从信号中提取信息,非常适合于对突变信号和非平稳信号的分析与检测。通过伸缩和平移等运算功能可对函数或信号进行多尺度的细化分析,解决了傅里叶变换无法解决的许多困难问题。小波变换是一个新的数学分支,它是泛函分析、傅里叶分析和样条分析的完美结合。

本章以尽量简短的篇幅阐述小波变换理论,在理解了小波变换理论的基础上,再举例说明小波变换在电力系统中的实际应用。

1.1 傅里叶变换和短时傅里叶变换

1.1.1 傅里叶变换

傅里叶变换(Fourier transform, FT)是众多科学领域(特别是信号处理和图像处理等)重要的应用工具之一。从实际的观点看,考虑傅里叶分析的时候,通常是指积分傅里叶变换。

定义 1.1 定义 $x(t)$ 的傅里叶变换^[2] $X(\omega)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.1)$$

$X(\omega)$ 的傅里叶逆变换 $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.2)$$

为了计算傅里叶变换,需要用数值积分,即取 $x(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的离散点上的值来计算这个积分。在实际应用中,通常希望在计算机上实现信号的频谱分析及其他方面的处理工作。对信号的要求为:在时域和频域是离散的,且都是有限长。

离散傅里叶变换(discrete Fourier transform, DFT)的定义如下:

定义 1.2 给定离散时间序列 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$, 假设该序列绝对可和,即满足 $\sum_{n=0}^{N-1} |x_n| < \infty$, 称

$$X(k) = F(x_n) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.3)$$

为序列的离散傅里叶变换,称

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi k}{N}n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.4)$$

为序列 $\{X(k)\}$ 的离散傅里叶逆变换(discrete inverse Fourier transform, DIFT)。

式(1.3)和式(1.4)中, n 相当于对时间域的离散化, k 相当于频率域的离散化,且它们都是以 N 点为周期的。离散傅里叶变换序列 $\{X(k)\}$ 是以 2π 为周期的,且具有共轭对称性。

傅里叶变换是时域到频域互相转化的工具,它架起了时间域和频率域之间的桥梁。图 1.1 给出了傅里叶变换的示意图。

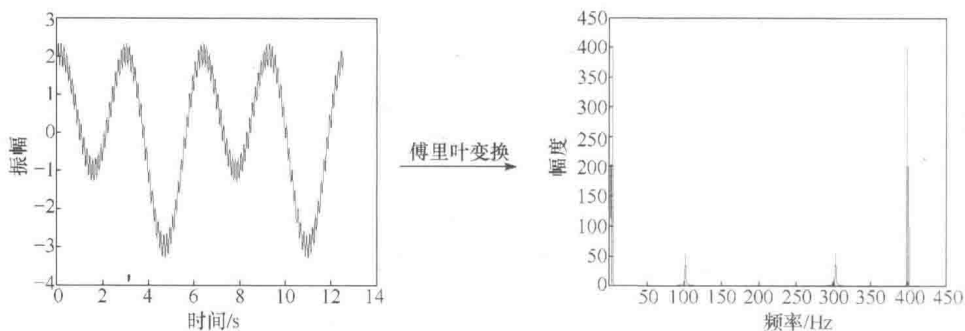


图 1.1 傅里叶变换示意图

从物理意义上讲,傅里叶变换的实质是把 $x(t)$ 这个波形分解成许多不同频率的正弦波的叠加和,这样就可以把对原函数 $x(t)$ 的研究转化为对其权系数,即傅里叶变换 $X(\omega)$ 的研究。从傅里叶变换中可以看出,这些标准基是由正弦波及其高次谐波组成的,因此在频域内是局部化的。

对很多信号来说,傅里叶分析非常有用,因为它能给出信号中包含的各种频率成分。但是,傅里叶变换也有着严重的缺点:变换之后会使信号失去时间信息,不能告诉研究者在某段时间里发生了什么变化。而很多信号都包含有研究者感兴趣的非稳态(或暂态)特性,如漂移、趋势项、突然变化以及信号的开始或结束,这些特性是信号的重要组成部分。因此,傅里叶变换不适合分析处理这类信号。

虽然傅里叶变换能够将信号的时域特征和频域特征联系起来,能分别从信号的时域和频域观察,但却不能把二者有机地结合起来,这是因为信号的时域波形中不包含任何频域信息。而傅里叶谱是信号的统计特性,从其表达式也可以看出,它是整个时间域内的积分,因而去掉了非平稳信号中的时变信息,没有局部化分析信号的功能,完全不具备时域信息,也就是说,对于傅里叶谱中的某一频率,不知道这个频率是在什么时候产生的。同时,傅里叶分析在时域的分辨率是不变的,因而不是以在任意小的范围内描述或确定频率。这样在信号分析中就面临一对最基本的矛盾:时域和频域的局部化矛盾。

在实际的信号处理过程中,尤其是对非平稳信号的处理中,信号在任一时刻附近的频率特征都很重要。如电压的暂态尖峰脉冲,就是一个瞬变信号,仅从时域和频域上来分析是不够的。这就促使研究者去寻找一种新方法,能将时域和频域结合起来去描述观察信号的时域联合特征,构成信号的时频谱,这就是所谓的时频分析法。

1.1.2 短时傅里叶变换

对于一些非平稳信号,如音乐信号、语音信号和图像信号等,它们的频域特性都是随时间变化的。对这一类信号用傅里叶变换进行分析,仅能知道信号所含有的频率信息,却无法知道这些频率信息究竟出现在什么时段上,为了研究这些信号的局部形态,需要对信号进行二维时-频分析。二维时-频分析实际上就是依赖于时间的频谱特性。

为了克服傅里叶变换的缺点,Gabor 于 1946 年提出了短时傅里叶变换(short-time Fourier transform, STFT),又称为盖博(Gabor)变换或者加窗傅里叶变换(WFT)。

盖博变换把一个时间信号变换为时间和频率的二维函数,从而能够提供信号在某个时间段和某个频率范围的一定信息。这些信息的精度依赖于时间窗的大小。盖博变换的缺点是对所有的频率成分,所取的时间窗的大小都相同。然而,很多信号为了获得更精确的时间或频率信息,需要可变的时间窗。图 1.2 给出了短时傅里叶变换的示意图。

短时傅里叶变换^[1,2]的基本思想是:把信号划分成许多小的时间间隔,用傅里叶变换分析每一个时间间隔,以便确定该时间间隔存在的频率。考虑一个信号

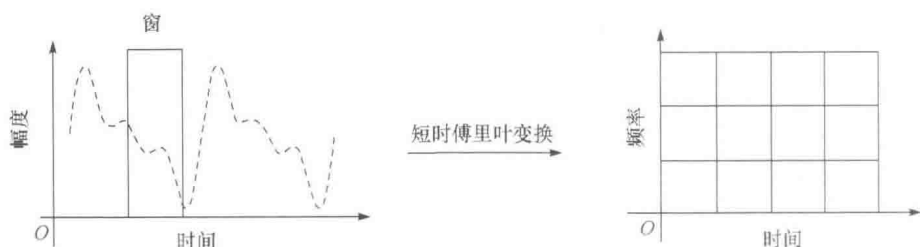


图 1.2 短时傅里叶变换示意图

$x(t)$, 集中在一个局部点 τ , 假定通过一个窗函数 $g(t)$ [$g(t)$ 是在有限的时间区间内定义的], 通过窗口的 $x(t) * g(t-\tau)$ 的傅里叶变换就是 STFT^[3]:

$$\text{STFT}_x(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g(t-\tau) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.5)$$

这就把一维信号 $x(t)$ 经 STFT 变换映射到二维的时-频平面 (τ, f) 上。STFT 非常强的依赖于窗函数 $g(t)$ 。STFT 的逆变换^[4]为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} \text{STFT}_x(\tau, f) g(t-\tau) e^{j2\pi ft} d\tau \quad (1.6)$$

式(1.5)可以从两方面进行解释^[5-7]。在二维时-频平面上, 如图 1.3 所示。

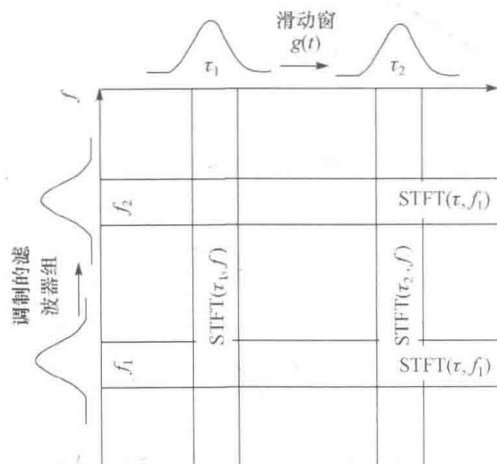


图 1.3 STFT 的时-频平面

一方面, 垂直方向上的竖条表示在 τ 时刻, 用窗函数 $g(t)$ 确定的窗口范围内所包含的所有频率分量; 另一方面, 从子带分析的角度来看, 水平方向的横条表示在给定频率 f 处, 用脉冲响应为 $g(t)$ 的带通滤波器对所有时间的信号进行滤波。 $g(t)$ 不但要求在时域是近似有限宽的, 而且在频域也要求是近似有限宽的, 如

图 1.4 所示。

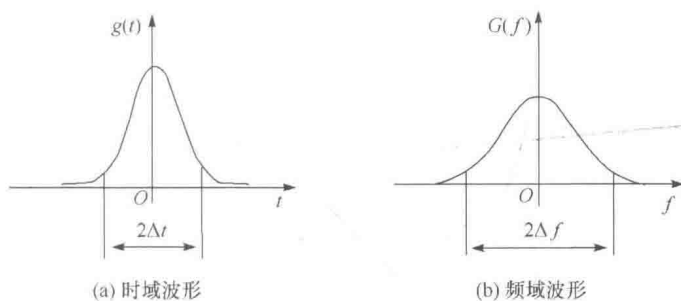


图 1.4 STFT 窗口函数的时、频域波形

STFT 中的窗函数 $g(t)$ 一旦确定,其时间窗大小和频率窗大小就确定了。时间窗大小和频率窗大小决定了 $g(t)$ 的时间分辨率和频率分辨率。根据文献[5],设 $g(t)$ 的傅里叶变换为 $G(f)$,定义滤波器 $g(t)$ 的带宽 Δf 为

$$\Delta f^2 = \frac{\int f^2 |G(f)|^2 df}{\int |G(f)|^2 df} \quad (1.7)$$

式中,分母表示 $g(t)$ 的能量。对于两个正弦信号,只有它们的频率差大于 Δf 时,通过滤波器 $g(t)$ 才能将它们区分出来,所以以 $g(t)$ 为窗口的 STFT 的频率分辨率由 Δf 决定。类似地,将时间的宽度 Δt 定义为

$$\Delta t^2 = \frac{\int t^2 |g(t)|^2 dt}{\int |g(t)|^2 dt} \quad (1.8)$$

式中,分母同样表示 $g(t)$ 的能量,对于两个脉冲信号只有它们在时间上相距大于 Δt 时,通过滤波器 $G(f)$ 才能将它们区分出来。在式(1.7)和式(1.8)中,都假定 $g(t)$ 和 $G(f)$ 的中心点在 $t=0$ 和 $f=0$ 处(图 1.4)。

在 STFT 中,由于 Δt 和 Δf 固定不变,整个时-频平面上只能采用相同的频率和时间分辨率,这是 STFT 的不足。因为对于非平稳信号,也许在某一小时间段上,是以高频信息为主,用小的时间窗进行分析,而对长时间段上的低频信号,期望采用大时间窗进行分析。因此,对于一个时变的非平稳信号,很难找到一个好的时间窗来适合于不同的时间段。

由此可见,短时傅里叶变换虽然在一定程度上克服了标准傅里叶变换不具有局部分析能力的缺陷,但也存在着自身不可克服的缺陷,即当窗函数 $g(t)$ 确定后,矩形窗口的形状就确定了, τ 和 ω 只能改变窗口在相平面的位置,而不能改变窗口

的形状。可以说短时傅里叶变换实质上是具有单一分辨率的分析,若要改变分辨率,则必须重新选择窗函数 $g(t)$ 。因此,短时傅里叶变换用来分析平稳信号还可以,但对非平稳信号,在信号波形变化剧烈的时段内(主频是高频),要求有较高的时间分辨率,在波形变化比较平缓的时段内(主频是低频),则要求有较高的频率分辨率,而短时傅里叶变换不能兼顾两者。因为短时傅里叶变换的时频窗口是固定不变的,所以这种方法对于含有多个频率分量和暂态过程不连续的信号并不是最适合的,难以从其频谱图中看出信号的时变特性。

图 1.5(a)为 STFT 下的绝对带宽恒定的滤波器组频谱。小波变换的引入弥补了 STFT 的不足。小波变换采用了可变带宽的窗函数(滤波器组),在低频端用窄带滤波器进行分析,在高频端用宽带滤波器进行分析,这就是相对带宽固定的滤波器组(即恒 Q 特性)^[6],如图 1.5(b)所示。

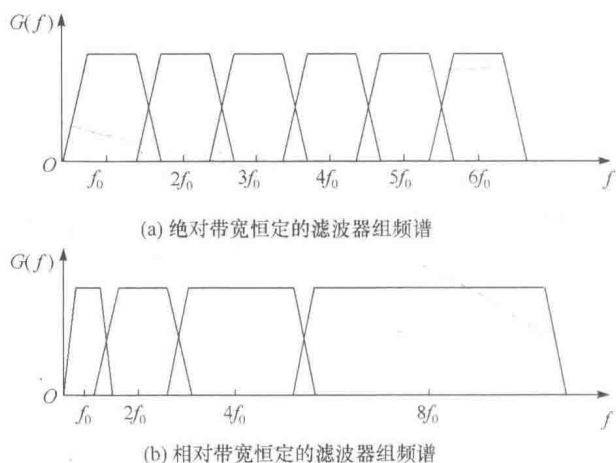


图 1.5 STFT 和小波变换滤波器组的频谱

1.2 小波变换

什么是小波? 小波就是最短最简单的振动,是一个衰减的波形,在有限的区域里存在(不为零),且其均值为零。小波分析的基本思想是用一簇函数去表示和逼近一个信号或函数,这一簇函数称为小波系,通过一个基本小波函数的不同尺度的平移和伸缩构成。小波函数系的特点是其时宽频宽乘积很小,且在时间和频率轴上都很集中。

小波变换(wavelet transform, WT)采用改变时间-频率窗口形状的方法,很好地解决了时间分辨率和频率分辨率的矛盾,在时间域和频率域里都具有很好的局部性质。对信号中的低频部分,采用宽的时间窗,得到高的频率分辨率;对信号中

的高频部分,采用窄的时间窗,得到低的频率分辨率。小波变换的这种自适应性,使其在工程技术和信号处理方面获得广泛的应用。

1.2.1 连续小波变换

定义 1.3 假设 $x(t)$ 是平方可积函数 $[x(t) \in L^2(\mathbf{R})]$, $\psi(t)$ 称为基本小波或者母小波(mother wavelet)的函数,则称

$$\text{WT}_x(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt = \langle x(t), \psi_{a,\tau}(t) \rangle \quad (1.9)$$

为 $x(t)$ 的连续小波变换^[3]。式(1.9)中, $(*)$ 代表共轭; $a(a>0)$ 是尺度因子; τ 表示位移,其值可正可负; $\psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-\tau}{a} \right)$ 是基本小波的位移与尺度伸缩。

尺度因子 a 的作用是将基本小波 $\psi(t)$ 作伸缩, a 越大, $\psi \left(\frac{t}{a} \right)$ 越宽。对于一个连续时间有限的小波, $\psi(t)$ 与 $\psi_{a,\tau}(t)$ 的关系如图 1.6 所示。

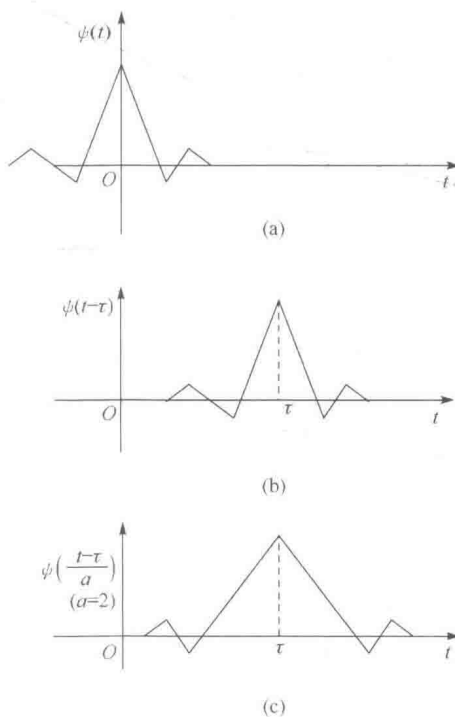
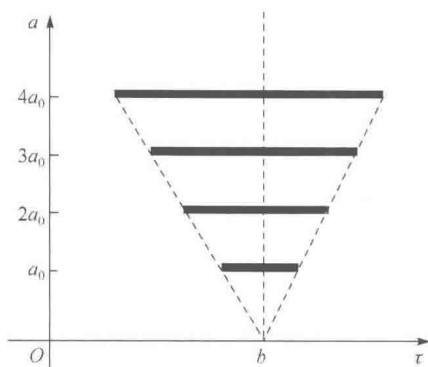


图 1.6 小波的位移与伸缩

在式(1.9)中, τ 的作用是确定对 $x(t)$ 分析的时间位置,也即时间中心。尺度

图 1.7 不同 a 值小波分析区间的变化

因子 a 的作用是把基本小波 $\psi(t)$ 作伸缩。由 $\psi(t)$ 变成 $\psi\left(\frac{t}{a}\right)$, 当 $a > 1$ 时, 若 a 越大, 则 $\psi\left(\frac{t}{a}\right)$ 的时域支撑范围(即时域宽度)较之 $\psi(t)$ 变得越大; 反之, 当 $a < 1$ 时, a 越小, 则 $\psi\left(\frac{t}{a}\right)$ 的宽度越窄。这样, a 和 τ 联合起来确定了对 $x(t)$ 分析的中心位置及分析的时间宽度, 如图 1.7 所示。

小波变换的逆变换如下:

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{a^2} da \int_0^\infty \text{WT}_x(a, \tau) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau \quad (1.10)$$

式中, $c_\psi = \int_0^\infty \frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$ 。

这样, 式(1.9)的 WT 可理解为用一族分析宽度不断变化的基函数对 $x(t)$ 作分析, 由下面 1.2.3 小节的讨论可知, 这一变化正好适应了信号分析时在不同频率范围所需要不同的分辨率这一基本要求。式中的因子 $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 是为了保证在不同的尺度 a 时, $\psi_{a,\tau}(t)$ 始终能和母函数 $\psi(t)$ 有着相同的能量, 即

$$\int |\psi_{a,\tau}(t)|^2 dt = \frac{1}{a} \int \left| \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \right|^2 dt \quad (1.11)$$

令 $\frac{t-\tau}{a} = t'$, 则 $dt = a dt'$, 这样, 式(1.11) 的积分等于 $\int |\psi(t')|^2 dt'$ 。

令 $x(t)$ 的傅里叶变换为 $X(\omega)$, $\psi(t)$ 的傅里叶变换为 $\Psi(\omega)$, 由傅里叶变换的性质, $\psi_{a,\tau}(t)$ 的傅里叶变换为

$$\psi_{a,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) \Leftrightarrow \Psi_{a,\tau}(\omega) = \sqrt{a} \Psi(a\omega) e^{-j\omega\tau} \quad (1.12)$$

由 Parseval 定理, 式(1.9)可重新表示为

$$\begin{aligned} \text{WT}_x(a, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \langle X(\omega), \Psi_{a,\tau}(\omega) \rangle \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \Psi^*(a\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \end{aligned} \quad (1.13)$$

式(1.13)即为小波变换的频域表达式。

由此可见, 如果 $\Psi(\omega)$ 是幅频特性比较集中的带通函数, 则小波变换具有表征

待分析信号 $X(\omega)$ 频域上局部性质的能力;采用不同 a 值作处理时,各 $\Psi(a\omega)$ 的中心频率和带宽都不一样。总之从频域上看,用不同尺度作小波变换大致相当于用一组带通滤波器对信号进行处理。带通的目的既可能是分解,也可能是检测。

小波变换在时-频平面上的基本分析单元具有图 1.8 所示的特点。当 a 值较小时,时轴上观察范围小,而在频域上相当于用较高频率做分辨较高的分析,即用高频小波作细致观察;当 a 值较大时,时轴上考察范围大,而在频域上相当于用低频小波作概貌观察。分析频率有高有低,这是很符合实际工作需要的特点,因为若要在时域上观察得越仔细,就越要压缩观察范围,并提高分析频率。

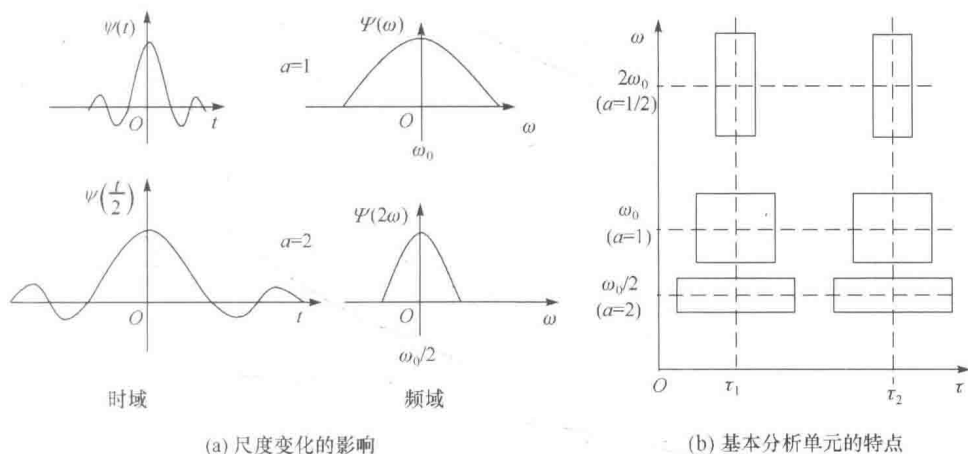


图 1.8 典型小波函数的分析特点

1.2.2 离散小波变换

在实际应用中,尤其是在计算机上实现的,连续小波必须加以离散化。因此有必要讨论连续小波 $\Psi_{a,\tau}(t)$ 和连续小波变换 $WT_x(a,\tau)$ 的离散化。这一离散化都是针对连续的尺度参数 a 和连续平移参数 τ 的,而不是针对时间变量 t 的,与之前的时间离散化不同。

通常,把连续小波变换中尺度参数 a 和平移参数 τ 的离散化公式分别取作 $a = a_0^j$, $b = ka_0^j b_0$, $j, k \in \mathbf{Z}$ 。所以对应的离散小波函数 $\psi_{j,k}(t)$ 可以写成

$$\psi_{j,k}(t) = a_0^{-j/2} \psi\left(\frac{t - ka_0^j b_0}{a_0^j}\right) = a_0^{-j/2} \psi(a_0^{-j} t - kb_0) \quad (1.14)$$

离散小波变换系数表示为^[7]

$$C_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi_{j,k}^*(t) dt = \langle x, \psi_{j,k} \rangle \quad (1.15)$$