全国高职高专教育“十一五”规划教材

实用工程数学

主编 盛光进

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国高职高专教育"十一五"规划教材

实用工程数学

Shiyong Gongcheng Shuxue

主　编　盛光进

副主编　李代绪　汤　燕　邢建平　周　密

编　委　余健伟　廖仲春　王　涛　李占光

阳永生　戴新建　陈　珊　杨　芳

余剑春　张仲珍　舒　华

高等教育出版社·北京

HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书根据教育部制定的“高职高专教育数学课程教学基本要求”和高职数学教学改革的最新精神，在研究总结全国数十所学校的优秀教学成果的基础上，结合作者多年的教学实践，编写了本书。

本书分成三篇：线性代数、概率统计、离散数学，共七章。主要内容有，行列式与矩阵，线性方程组，概率论与数理统计，集合关系、数理逻辑和图论。书后附有习题参考答案及常用数理统计表。

本书既体现了内容经典、语言精练、结构合理、逻辑清晰、叙述流畅、论述清楚、理论联系实际、便于自学等特点，又注重在简明性、实用性、够用性、模型性、工具性、多重性、新颖性等方面下工夫。力求体现出高职数学教育“够用、实用”的特色，方便师生教学。

本书可作为高职高专院校理工类专业或其他工程类专业的数学教材使用，也可供成人高校及其他职业学校的相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

实用工程数学/盛光进主编. —北京：高等教育出版社，2011.1

ISBN 978-7-04-031612-4

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①盛… Ⅲ. ①工程数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ. ①TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 001679 号

策划编辑 王玲玲 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 李卫青
版式设计 范晓红 **责任校对** 王 雨 **责任印制** 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京铭传印刷有限公司
开 本 787×1092 1/16
印 张 12.5
字 数 300 000

购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育 http://www.widedu.com

版 次 2011 年 1 月第 1 版
印 次 2011 年 1 月第 1 次印刷
定 价 21.80 元

物料号 31612-00

前　言

本书由全国首批高职示范院校之一——长沙民政职业技术学院组编。根据教育部制定的“高职高专教育数学课程教学基本要求”和高职数学教学改革的最新精神，在研究总结全国数十所高校的优秀教学成果的基础上，结合作者多年的教学实践，精心编写了本书。本书紧扣“够用、实用”的教学原则，既体现了内容经典、语言精练、结构合理、逻辑清晰、叙述流畅、论述清楚、理论联系实际、便于自学等特点，又注重内容的简明性、实用性、够用性、模型性、工具性、多重性、新颖性。本书的特色主要体现在以下几方面：

简明性。本书中数学概念、定理的叙述，简单明白、流畅自然。淡化运算技巧，避免繁杂运算、证明。重视数学结论的直观解释与应用。定理、公式的直观、简明、实用的解释，方便了记忆与应用，提高了教材内容的可理解性和可应用性。

实用性。本书内容的选取，结合社会实践和现实生活，突出应用。对数学知识产生、定理的证明过程尽可能弱化，注重数学知识的应用以及如何利用相关知识解决实际问题。选用社会实践、现实生活中的简单实际问题作为例题和习题。每章“应用与实践”部分，是综合运用本章数学知识解决一些贴近现实生活的问题的综合案例，是引导学生进行数学应用的实践训练的好素材。让学生体会数学的应用价值，提升学生的应用意识。

够用性。本书对离散数学内容进行加工、提炼、升华，只选取了基本的、重要的概念、定理、公式及数学方法等内容，大胆删去一些非本质、繁杂的、对社会实践作用不大，对后续学习影响不大的内容。比较多的选取一些学生在今后职业岗位与社会实践中，迫切需要的数学知识和实用的数学方法。强化定义、定理、公式、模型的形象化的理解与应用。

模型性。全书贯穿数学模型的思想，以数学模型的观点来阐述理论和分析解决问题。较多地介绍了现实问题中的数学模型。弱化模型的建立过程，强化模型的理解、应用。如齐王赛马策略模型、矩阵密码运行模型、交通网络流量模型、狼羊菜摆渡模型等，会给读者留下深刻的印象。

工具性。本书中的重要结论、应用案例和实用模型，简明好用，具有保存价值。当学生遇到现实中的有关实际问题时，可通过查阅本教材的应用案例和实用模型后直接解决或模仿解决。如可通过电路网络模型、资源分配模型（线性方程组模型）、商品正常需求模型、机器正常工作模型（概率统计模型）、七桥问题模型、一笔画模型（图论模型），非常方便学生解决现实问题，增强学生学习数学的自觉性和积极性。

多重性。针对离散数学中，概念抽象，难于巩固的特点，采取重要概念多处强调，重要问题多处深入。多次重复训练，既可突破难点，又可达到加深理解、巩固提高的目的。

新颖性。本书在体系结构和内容形式上进行了探索和改革。选取和编排教材内容时，尽量选取与现实紧密相关并且较新颖的教学内容，对于难掌握的教学内容将变化形式、变化问题角度，尽可能做到新奇，有趣。如在重要概念、定理等重要内容后面采用“**【注意】**，**【思考】**，…”等形式，强调学习中应注意的地方，突出重点，化解难点，加深印象，避免易犯的错误。

本书由长沙民政职业技术学院盛光进主编。由李代绪、汤燕、邢建平、周密任副主编。参加研讨、编写和审稿的人员有：佘健伟、廖仲春、王涛、李占光、阳永生、戴新建、陈珊、杨芳、余剑春、张仲珍、舒华。

在本书的编写过程中得到了长沙民政职业技术学院、湖南网络工程职业学院、长沙商贸旅游职业技术学院、湖南工业职业技术学院、湖南科技职业学院、湖南生物机电职业技术学院、湘西民族职业技术学院等院校的大力支持，高等教育出版社的编审人员为本书的出版提供了帮助，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平和时间有限，书中不妥之处在所难免，真诚的欢迎读者批评指正。所有意见和建议请寄往作者的邮箱：dongfang6928@163.com.cn，以便修订再版时修改完善。谨此致谢。

编者

2010 年 11 月

目　录

第一篇　线性代数

第二篇　概率论与数理统计

第三篇 离散数学

第一篇　线性代数

第一章 行列式与矩阵

行列式与矩阵是线性代数研究的主要对象和工具，是从许多实际问题中抽象出来的概念. 它们在数学科学、经济管理学和工程技术等领域中都具有广泛的应用. 本章将主要介绍行列式与矩阵的概念、性质及其相关的运算.

第一节 行列式的定义

一、二阶、三阶行列式

对于二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1}$$

用加减消元法求解，可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}. \end{cases}$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了研究上述方程组和方便记忆上述结果，下面引入二阶行列式的概念.

定义 1 用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示数值 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ **为二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式的**元素**. 横排称为**行**，竖排称为**列**.

二阶行列式的计算方法可按图 1-1 记忆，即二阶行列式的值等于实线连接的元素乘积减去虚线连接的元素乘积.

图 1-1

例 1 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times 4-2\times 3=-2.$

如果记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则对于二元一次线性方程组(1)，当方程组的系数组成的行列式 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一解，它的解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

类似的，讨论含有三个未知数的线性方程组的求解问题时，可引入三阶行列式的概念.

定义 2 用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{vmatrix}$ 表示数值

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ **为三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式表示 6 项的代数和，每一项都是取不同行不同列的 3 个元素的乘积. 三阶行列式的计算方法可按图 1－2 记忆，即三阶行列式的值等于实线连接的元素乘积之和减去虚线连接的元素乘积之和.

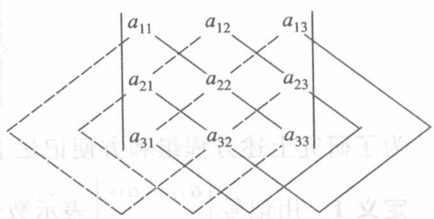

图 1－2

【思考】 图 1－2 中，实线之间有什么关系？虚线之间的关系又如何？

例 2 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-(3\times5\times7+2\times4\times9+1\times6\times8)=0.$

例 3 计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\times4\times0+5\times(-1)\times0+0\times2\times(-2)-$

$$0\times4\times0-5\times2\times0-1\times(-1)\times(-2)=-2.$$

由二、三阶行列式的定义类似的可得 n 阶行列式的定义.

二、n 阶行列式

定义 3 由 n^2 个数组成的算式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 n **阶行列式**,它表示数值

$$D=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

n 阶行列式是由 n^2 个元素排成 n 行 n 列构成的,它表示 $n!$ 项的代数和,其中正、负项各一半,每一项都是取不同行不同列的 n 个元素的乘积.其中元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的**主对角线**.

当 $n=1$ 时,规定 $D=|a_{11}|=a_{11}$.

按此定义的二阶、三阶行列式,与前面定义的二阶、三阶行列式,显然是一致的.

在行列式中,若主对角线以下的元素全为零,这样的行列式称为**上三角形行列式**;

在行列式中,若主对角线以上的元素全为零,这样的行列式称为**下三角形行列式**.

据 n 阶行列式的定义计算,可得上、下三角形行列式的值都等于其主对角线上元素的乘积.例如

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} b & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ b & c & d \end{vmatrix}=ab\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} c & 0 \\ c & d \end{vmatrix}=abcd.$$

习题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & 1 \\ -2 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{vmatrix}$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；　　(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$.

2. k 为何值时 $\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}=0$?

3. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么？

4. 证明：

(1) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a & ka \\ b & kb \end{vmatrix}=0$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

5. 解方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8, \\ x_1-2x_2=-3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+\ y=5, \\ x-3y=-1. \end{cases}$

第二节　行列式的计算

一、行列式的性质

定义 1　将行列式的行变为相应的列后得到新的行列式，称为行列式的**转置行列式**，记为 D^{T}. 即，若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式与它的转置行列式的值相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

这个性质说明，行列式中的行与列具有相同的地位. 这就是说，凡是对行列式的行成立的性质，对列也成立.

性质 2　交换行列式的两行(列)，行列式的值变号.

推论　若行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零.

性质 3　行列式的某一行(列)的公因子可以提到行列式记号的外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 如果行列式中某一行(列)的所有元素都是零,则此行列式的值为零.

性质 4 如果行列式中有两行(列)的元素对应成比例,则此行列式的值为零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的所有元素都是两元素之和,则此行列式等于两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 6 若将行列式的某一行(列)的所有元素都乘以同一个常数 k 后,加到另一行(列)的对应元素上,则行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

在行列式的计算中,为简明起见,用圆内的数字表示行(列)的位置,写在等号上面表示行变换,写在等号下面表示列变换.规定

(1) 记号"$k\times ⓘ$"表示第 i 行(列)提出公因子 k;

(2) 记号"$ⓘ\leftrightarrow ⓙ$"表示第 i 行(列)与第 j 行(列)互换;

(3) 记号"$ⓘ+ⓙ\times k$"表示第 j 行(列)乘以数 k 加到第 i 行(列)上.

例 1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解 行列式第一行有两个元素为零,为了使第一行有更多的元素为零,可将第 2 列加到第 4 列上,再根据行列式的定义,按第一行展开行列式,即可求得行列式的值.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \underset{④+②}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1\times\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{①\leftrightarrow②} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[③+①\times(-1)]{②+①\times 2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -1\times\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 31.$$

二、行列式的计算

前面介绍了行列式的定义和行列式的一些基本性质，下面将进一步讨论行列式的计算问题. 由于行列式计算方法较多，这里仅介绍两种主要方法.

1. 按行展开法

定义 2 在 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列划去后，余下的元素按原来顺序构成的 $n-1$ 的阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}. 记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

由 n 阶行列式的定义可知，n 阶行列式又可以表示为

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

称此式为 n 阶行列式按第一行元素展开.

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

解 行列式按第一行展开，得

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\times A_{11}+0\times A_{12}+0\times A_{13}+(-5)\times A_{14}$$

$$=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}+(-5)\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=3\times(-7-20-56)+5\times(40-21+12+112)=466.$$

有了代数余子式的概念，我们有下面的定理.

定理 1 行列式的值等于行列式的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和. 即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}.$$

这个定理叫做行列式按行(列)展开法则. 利用这个定理可以将一个 n 阶行列式按某一行(列)展开,即把 n 阶行列式的计算化成 n 个 $n-1$ 阶行列式的计算. 如此进行下去,经过有限次的展开运算,直到化成二阶或三阶行列式的计算,然后可求得所求 n 阶行列式的值.

有时为了简化计算,也可利用行列式的性质,先将行列式的某行(列)化成只有一个非零元素,然后再按这行(列)展开计算.

例 3 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&2&0&8\\4&-9&2&10\\-1&6&0&-7\\0&0&0&5\end{vmatrix}$.

解 因为第四行中有三个零元素,可按第四行展开,得

$$D=5\times(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}3&2&0\\4&-9&2\\-1&6&0\end{vmatrix}=5\times(-4-36)=-200.$$

【注意】 在行列式的计算过程中,选择零元素多的行(列)展开可大大简化行列式的计算,这是计算行列式的常用技巧之一.

2. 三角形化法

计算行列式时,利用行列式的性质,把行列式逐步化为上三角形行列式,再由前面的结论"三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积"求得结果. 这种计算方法称为"三角形化法".

例 4 计算 $D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}$.

解 $$\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}\xlongequal[④+①\times(-1)]{②+①\times(-1)}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&1&5&6\\0&0&3&3\end{vmatrix}\xlongequal{③+②\times(-1)}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&0&0&7\\0&0&3&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{③\leftrightarrow④}-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&0&3&3\\0&0&0&7\end{vmatrix}=-21.$$

例 5 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\a_1^2&a_2^2&a_3^2\end{vmatrix}$.