高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

2013

考研数学
复习教程
（高等数学分册）

● 主编　王　莉

凭书后增值服务卡
享超值服务

→ 公共课在线测试题

→ 名师答疑服务

→ 在线课程试听

→ 优惠订手机报及课程

→ 最新权威图书资讯

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

考研数学
复习教程
（高等数学分册）

2013

● 主编 王 莉

KAOYAN SHUXUE
FUXI JIAOCHENG (GAODENG SHUXUE FENCE)

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

考研数学复习教程. 高等数学分册 / 王莉主编. – 北京: 高等教育出版社，2012. 4

ISBN 978 – 7 – 04 – 033281 – 0

Ⅰ. ①考…　Ⅱ. ①王…　Ⅲ. ①高等数学 – 研究生 – 入学考试 – 自学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 042882 号

策划编辑　刘　佳　　责任编辑　张耀明　　封面设计　王凌波　　版式设计　范晓红
责任校对　王　雨　　责任印制　韩　刚

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100120
印　　刷　天津新华二印刷有限公司
开　　本　787mm × 1092mm　1/16
印　　张　14. 25
字　　数　460 千字
购书热线　010-58581118

咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　2012 年 4 月第 1 版
印　　次　2012 年 4 月第 1 次印刷
定　　价　28. 00 元

物 料 号　33281-00

前　言

为了帮助有志于报考硕士学位研究生的广大同学全面、系统、深入、高效地复习数学课程，提高考研应试能力，并为今后研究生学业奠定坚实的数学基础，作者根据教育部考试中心最新颁布的《数学考试大纲》，结合作者多年在全国各地辅导班的授课经验，以作者的考研辅导讲义为蓝本，切实考虑到考研学子的不同需求，编写了**《考研数学复习教程》(包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计等分册)**、**《考研数学基础过关 500 题》**、**《考研数学大纲配套 1000 题》**、**《考研数学 10 年真题解析》**以及**《考研数学全真模拟 10 套卷》**等系列丛书。其中**《考研数学基础过关 1000 题》**适宜于复习前期配合教材使用——夯实基础；**《考研数学复习教程》**与**《考研数学大纲配套 1000 题》**适宜于复习中期攻坚阶段使用——强化解题定式训练，培养解题能力；**《考研数学 10 年真题解析》**与**《考研数学全真模拟 10 套卷》**适宜于后期使用——模拟演练、巩固提高。考生可根据自己的具体情况选用。

本书**《考研数学复习教程(高等数学分册)》**的结构及特点如下：

一、考核内容要点——本部分对《数学考试大纲》所要求的内容进行了全面、透彻的讲解，不是“定义”、“定理”的简单罗列，注重对基本概念、基本理论和基本方法的解读。在体系上也不同于一般教材，注重各部分内容的有机联系，普遍采用表格将相近的内容列在一起，便于读者类比把握。

二、补充公式与结论——本部分对一般教材中没有的、但对知识理解和解题有益的公式和结论进行了较为全面的补充，并对难于理解的公式和结论给出了证明或举例说明。

三、典型问题与方法技巧——本部分是本书的精华也是本书最大的特色：在对历年试题研读的基础上，详细归纳总结了每部分考过的以及可能考到的各类问题，抛开其表面形式，剖析出其本质特征，给出了每类问题的快捷有效的处理方法，并注重每类问题的各种变式，使读者能够见到题目就知从哪入手，并快速准确求解。

四、强化训练——本部分按照考研试卷“选择题”、“填空题”、“解答题”的题型顺序精选编排了适量的经典习题，其中一部分是作者亲自命制的。这些题目几乎涵盖了考研数学所涉及的所有问题，难易程度十分贴近考研真题，有的略高于真题，而且考查的知识点尽量不重复，望读者完成。

本书适用于考研数学的各个卷种，包括数学一、数学二、数学三以及农学门类联考数学等，其内容上的差异，书中有详细标注，请读者阅读时注意。

在编写本书过程中，作者参考了许多教材和有关著作，引用了其中的一些例子，恕不一一列出，在此谨向有关作者致谢。别外，吴振奎先生百忙之中审阅了书稿，刘舒强先生也提出了一些建设性意见，在此一并致谢！

鉴于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请同行专家和读者批评指正。

作者

2012 年 3 月 30 日于北京

数学不仅在各级教育中举足轻重,它也是各类统考中主要科目之一。

考研数学问题有其自身特点,它与通常在校学习数学时所遇的问题不尽相同,乍看熟悉但又陌生,这些问题往往是概括、总结、凝练了数学的精华,巧妙而不繁琐,深刻而不艰涩,处处蕴含凝聚着拟题专家的劳动和汗水。

倘若没有扎实的数学功底,没有经过恰当的训练,往往较难应付——有些题目你会觉得无从下手(正如数学竞赛,即便是小学竞赛问题,往往也会难住不少"大家")。由此看来,参加考前训练是必须的,也是重要的。

现实告诉人们:老一辈考研专家已渐失魅力,这也是自然规律,历史的必然。当然这也是希望与未来所在,人们也期待新人的出现与成才。

王莉教授是全国年轻的数学考研辅导的希望,也是领军人物之一,颇受考研学子的爱戴。他的讲课更有特点:首先适应潮流,与考研试题更贴近,与年轻人鲜有"代沟";再者是思路清晰、讲解细微、推理流畅,做到有分析、有过程、有总结、有练习。

本书正是他多年授课经验的积累与汇聚,也是他呕心沥血之所创、匠心立意之所在。

不同风格、不同思路、不同写法考研辅导书籍的出版,无疑给考研学子提供了更多的选择。

与传统"大家"的此类书籍不同,他的书中无哗众取宠的章节,例题乃至字句、内容更为贴近当下学生的水平,又不拘于此,读起来亲切、生动、易懂。更不似某些考研书十几年不修,始终一副老面孔。

本书的出版为考研图书市场吹来一股暖暖的春风,对广大考研学子来讲实乃一大幸事。

吴振奎
2012年3月于天津

目　录

第一章　函数、极限与连续

§1.1　函　　数

一、考核内容要点

1. 函数的概念及其表示法

设数集 $D\subset R$，则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数，记为 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域.

函数的表示法有公式法、列表法、图像法等.

2. 函数的几种特性

单调性	设区间 $I\subset D$，若对 $\forall x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）.
奇偶性	设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.
周期性	若 $\exists l>0$，使对 $\forall x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的周期函数，其周期为最小正周期.
有界性	若存在常数 $M>0$，使得 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$ 对 $\forall x\in I(I\subset D)$ 成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界；否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

注 1）对上述函数的几种特性要从几何直观上理解把握. 如奇（偶）函数的图形关于原点（y 轴）对称；周期函数的图形在自变量 x 间隔整数倍周期的区间上相同，等等.

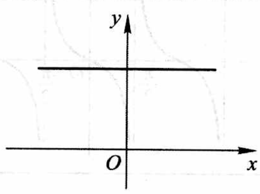
2）了解常见的周期函数. 如，$\sin x$，$\cos x$ 的周期为 2π；$\lvert\sin x\rvert$，$\lvert\cos x\rvert$，$\sin 2x$，$\cos 2x$，$\tan x$，$\cot x$，$\lvert\tan x\rvert$，$\lvert\cot x\rvert$ 的周期为 π，等等.

3）了解常见的有界函数. 注意，函数的有界性是针对某个区间而言的. 如，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，有 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$，$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$，$\lvert\arctan x\rvert<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\operatorname{arccot} x<\pi$，等等.

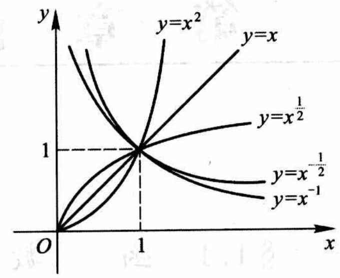
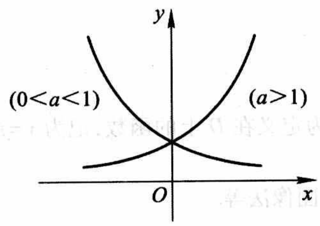
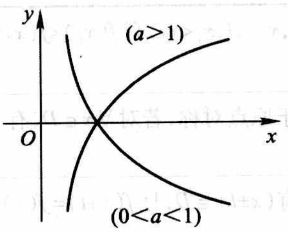
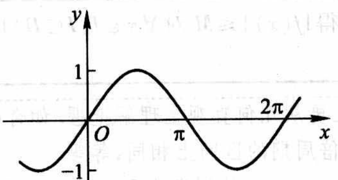
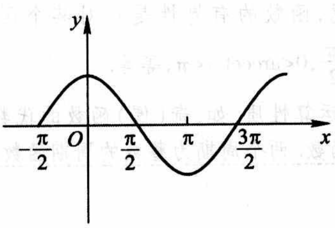
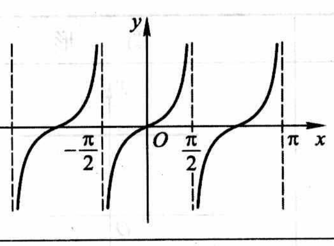
4）了解奇偶性、周期性的基本运算性质. 如，奇（偶）函数的代数和仍是奇（偶）函数；偶函数之积为偶函数；一个奇函数与偶函数之积为奇函数. 两个周期为整数的周期函数的代数和仍是周期函数，等等.

3. 常见函数类型

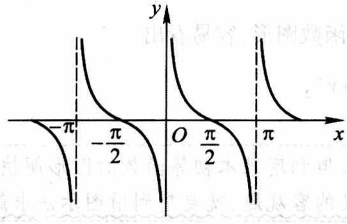
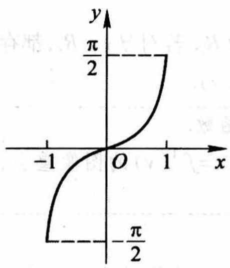
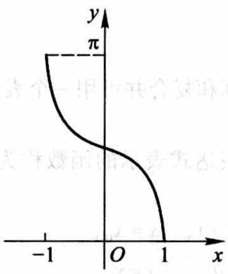
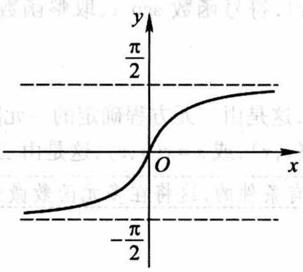
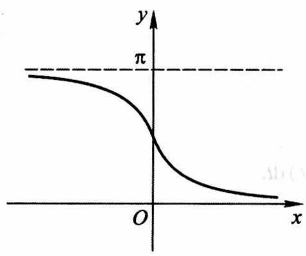
（1）基本初等函数

名称	表达式	定义域	图　　形	特　　性
常数函数	$y=C$	$(-\infty,+\infty)$		

续表

名称	表达式	定义域	图　形	特　性
幂函数	$y=x^{\mu}$ $(\mu\neq0)$	随 μ 不同而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义.		经过点(1,1). 在第一象限内，当 $\mu>0$ 时，x^{μ} 为增函数；$\mu<0$ 时，x^{μ} 为减函数. 值域依赖于 μ.
指数函数	$y=a^{x}$ $(a>0,a\neq1)$	$(-\infty,+\infty)$		经过点(0,1). 图像在 x 轴上方. 当 $0<a<1$ 时，a^{x} 是减函数；当 $a>1$ 时，a^{x} 是增函数. 值域：$y\in(0,+\infty)$.
对数函数	$y=\log_{a}x$ $(a>0,a\neq1)$	$(0,+\infty)$		经过点(1,0). 图像在 y 轴右侧. 当 $0<a<1$ 时，$\log_{a}x$ 是减函数；$a>1$ 时，$\log_{a}x$ 是增函数. 值域：$y\in(-\infty,+\infty)$.
正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期的奇函数. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界 $\lvert\sin x\rvert\leqslant1$. 值域：$y\in[-1,1]$.
余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期的偶函数. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界 $\lvert\cos x\rvert\leqslant1$. 值域：$y\in[-1,1]$.
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$		以 π 为周期的奇函数，在 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数. 值域：$y\in(-\infty,+\infty)$.

续表

名称	表达式	定义域	图形	特性
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$		以 π 为周期的奇函数，在 $(0,\pi)$ 内是减函数. 值域：$y\in(-\infty,+\infty)$.
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加的奇函数. 值域：$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少. 值域：$y\in[0,\pi]$.
反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调增加的奇函数. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界 $\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$. 值域：$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		单调减少. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界 $0<\operatorname{arccot} x<\pi$. 值域：$y\in(0,\pi)$.

注 对上述基本初等函数，一定要从表达式、定义域、值域、图形以及各种特性等方面牢牢把握. 这样很多题目不必动笔，便一目了然.

例 1.1.1 设 $I=\iint\limits_D\cos(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$, $J=\iint\limits_D\sin(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$, $K=\iint\limits_D\cot(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $x+y=\frac{\pi}{4}$ 与

x 轴、y 轴围成的三角形区域，则必有

(A) $I<J<K$. (B) $I<K<J$. (C) $J<I<K$. (D) $K<J<I$.

解 本题考查二重积分性质中的比较性质. 由于积分区域相同，故只需比较被积函数大小. 显然在区域 D 上，有 $0\leqslant x+y\leqslant\frac{\pi}{4}$，由上述基本初等函数图形，容易看出

$$\sin(x+y)<\cos(x+y)<\cot(x+y),$$

故应选(C).

注 本题虽然是二重积分问题，但利用基本初等函数的图形便快速找到了答案，而不必通过计算再比较. 一般地，见到题设条件中有几何意义的客观题，就要想到用图示法求解，通过几何直观"看出"结果.

(2) 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_f. 若对 $\forall y\in R_f$，都存在唯一的 $x\in D$，使得 $y=f(x)$，即有 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数，一般表示为 $y=f^{-1}(x)$.

注 1) 严格单调的函数必存在反函数.

2) 函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合，但与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

3) $f^{-1}[f(x)]=x, f[f^{-1}(x)]=x$.

(3) 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，$u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ. 若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 构成的复合函数，u 为中间变量.

(4) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合并可用一个表达式表示的函数称为初等函数.

(5) 分段函数

在自变量的不同变化范围内用不同表达式表示的函数称为分段函数. 注意，分段函数不是多个函数，其一般形式为

$$y=\begin{cases}f_1(x), & x\in I_1,\\ f_2(x), & x\in I_2,\end{cases}\quad 或\quad y=\begin{cases}f(x), & x\neq x_0,\\ a, & x=x_0.\end{cases}$$

常见的分段函数有绝对值函数 $|x|$，符号函数 $\operatorname{sgn} x$、取整函数 $[f(x)]$、$\max\{f_1(x),f_2(x)\}$ 及 $\min\{f_1(x),f_2(x)\}$，等等.

(6) 方程确定的隐函数

$F(x,y)=0\to y=y(x)$，或 $x=x(y)$，这是由二元方程确定的一元隐函数.

$F(x,y,z)=0\to z=z(x,y)$，或 $y=y(z,x)$，或 $x=x(y,z)$，这是由三元方程确定的二元隐函数.

注 上述方程确定的隐函数是有条件的，这将在多元函数微分学中介绍.

(7) 参数方程确定的函数

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\alpha\leqslant t\leqslant\beta\to y=y(x).$$

(8) 幂指函数

$$y=f(x)^{g(x)}，其中 f(x)>0.$$

(9) 变限积分确定的函数

$$y=\int_a^x f(t)\,dt，或 y=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt.$$

(10) 由极限式确定的函数

$$y=\lim_{n\to\infty}f_n(x)，或 y=\lim_{t\to x}f(t,x).$$

注 在求解由极限式确定的函数的问题时，一般要先求出极限，再作相应的运算.

以上十类函数几乎包括了考研数学所有可能考到的函数类型，对这些函数的各种运算，诸如求极限，确定无穷小的阶，求导数，求单调区间与极值等问题后面将一一介绍.

二、补充公式与结论

1. 设$f(x)$在区间$(-l,l)$内有定义,则$f(x)+f(-x)$为偶函数,$f(x)-f(-x)$为奇函数.

2. 设$f(x)$可导,若$f(x)$为偶函数(或奇函数),则$f'(x)$为奇函数(或偶函数);若$f(x)$为周期函数,则$f'(x)$为同周期的周期函数,即$f'(x+T)=f'(x)$,其中T为$f(x)$的周期.

3. 设$f(x)$连续,$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$($C$为任意常数),即$F(x)$是$f(x)$的全体原函数,则$f(x)$为奇函数$\Leftrightarrow F(x)$为偶函数;若$f(x)$为偶函数,则$F(x)$中只有$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是奇函数. 如$f(x)=x^2$是偶函数,$F(x)=\frac{1}{3}x^3+C$只有当$C=0$时才是奇函数.

注 周期函数的原函数不一定是周期函数. 如$f(x)=\cos x+1$的周期为2π,但$F(x)=\sin x+x$不是周期函数.

4. 单调函数的导数和原函数都不一定是单调函数. 请读者自行举例验证.

5. 表达式中含x^n因子的一般不是周期函数;含绝对值符号的一般不是单调函数.

三、典型问题与方法技巧

函数是高等数学研究的主要对象,但单独以本节内容命题的试题并不多,主要有以下两个方面.

1. 考查函数各种特性问题

方法提示

考查函数$f(x)$的各种特性,即单调性、奇偶性、周期性、有界性等. 对于单调性,可利用$f'(x)$的符号判定(利用定义判定函数单调性的题目,考研一般不会考). 对于奇偶性和周期性,一般用定义或运算性质及相关的结论进行判定. 对于有界性,简单情形可将函数取绝对值,然后进行放缩;一般是利用函数的连续性和求区间端点处的极限来判定. 当然,若能求出$f(x)$在区间I上的最大(小)值,也可知$f(x)$在I上有上(下)界.

例 1.1.2 函数$f(x)=x\cos x\mathrm{e}^{-|\sin x|}$是

(A) 奇函数. (B) 有界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.

解 因表达式中含有x因子和绝对值符号,可排除(C),(D). 又$x\to\infty$时,函数表达式中含有“∞”因子而无“0”因子,故此函数必无界,但不一定是无穷大.

对于选项(A),由函数奇偶性定义,

$$f(-x)=-x\cos(-x)\mathrm{e}^{-|\sin(-x)|}=-x\cos x\mathrm{e}^{-|\sin x|}=-f(x),$$

故$f(x)$是奇函数,应选(A).

例 1.1.3 函数$f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$的有界区间是

(A) $(-1,0)$. (B) $(0,1)$. (C) $(1,2)$. (D) $(2,3)$.

分析 考查函数$f(x)$在开区间(a,b)内是否有界,只要考查$f(x)$在(a,b)内是否连续,且$f(x)$在区间端点处的极限是否存在即可.

解 因$x\neq0,1,2$时,$f(x)$连续. 而

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=-\frac{\sin 3}{18},\lim_{x\to0^-}f(x)=-\frac{\sin 2}{4},\lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\infty,\lim_{x\to2}f(x)=\infty,$$

故$f(x)$在$(-1,0)$内有界,应选(A).

注 由连续函数性质可知,若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上有界;若$f(x)$在开区间(a,b)内连续,且极限$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$都存在,则$f(x)$在$(a,b)$内有界.

例 1.1.4 设函数$f(x)$连续,则下列函数中必为偶函数的是

(A) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$. (B) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$.

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$. (D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$.

分析 本题若从函数奇偶性定义出发，则需要用定积分的换元积分法，比较繁琐. 若想到“补充公式与结论”的第2条，则只要把四个选项中的函数逐一求导，看哪个是奇函数即可.

解 将四个选项中的函数分别对 x 求导，得

(A) $f(x^2)$. (B) $f^2(x)$. (C) $x[f(x)-f(-x)]$. (D) $x[f(x)+f(-x)]$.

显然应选(D).

注 由于题设中有抽象函数 $f(x)$，本题也可用赋值法排除. 取 $f(u)=1$，显然满足题设条件. 经简单计算可知(A)，(B)都是奇函数. 再取 $f(u)=u$，选项(C)结果为 $\int_0^x u[u-(-u)]\mathrm{d}u=\frac{2}{3}x^3$，仍是奇函数；选项(D)结果为0，是偶函数，应选(D). 请读者注意，见到题设条件中有抽象元素(如函数 $f(x)$，矩阵 $\boldsymbol{A}$，等等)的客观题，就要想到用赋值法求解. 一定要注意，选取的“特殊值”必须要符合题设条件，而且越简单越好.

2. 函数复合问题

方法提示

函数复合包括初等函数复合与分段函数复合，其一般方法是借助变量代换的思想，按部就班，逐步代入替换即可.

例1.1.5 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$______.

分析 本题是分段函数的复合问题. 按上述方法，逐步代入替换即可.

解 先将 $g(x)$ 中的所有自变量 x 都用 $f(x)$ 替换，得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0, & ①\\ f(x)+2, & f(x)>0, & ②\end{cases}$$

再把 $f(x)$ 的表达式分别代入①，②中，得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-x^2, & x^2\leqslant 0, & x<0, & ③\\ 2-(-x), & -x\leqslant 0, & x\geqslant 0, & ④\\ x^2+2, & x^2>0, & x<0, & ⑤\\ -x+2, & -x>0 & x\geqslant 0 & ⑥\end{cases}$$

分别求解③，④，⑤，⑥中的不等式组(把无解的③，⑥去掉)，得

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

注 上述是求分段函数复合的一般方法.

例1.1.6 设 $f(x+1)=\ln\frac{x-1}{x+1}$，且 $f[\varphi(x)]=2\ln x$，则 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=$______.

分析 本题关键是要先求出 $\varphi(x)$，这是初等函数复合问题，作相应的变量代换即可.

解 令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，故有

$$f(t)=\ln\frac{t-1-1}{t}=\ln\frac{t-2}{t},\quad f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)-2}{\varphi(x)}.$$

再由题设条件，得 $\ln\frac{\varphi(x)-2}{\varphi(x)}=2\ln x=\ln x^2$，

即 $$\frac{\varphi(x)-2}{\varphi(x)}=x^2,\quad \varphi(x)=\frac{2}{1-x^2}.$$

于是 $$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln|1+x|-\ln|1-x|+C=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

§1.2 极　限

一、考核内容要点

1. 极限的概念、性质及运算法则

(1) 极限的概念

极限包括数列极限和函数极限，其定义见下表.

数列极限	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\|x_n-A\|<\varepsilon$.
函数极限	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当 $\|x\|>X$ 时，有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$. 类似可定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.
	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$. 类似可定义 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

注 1) 所有定义的条件都是充分必要的.

2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(2) 极限的基本性质

唯一性	设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$，则 $A=B$.
局部有界性	设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在 $\delta>0$ 和 $M>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $\|f(x)\|\leqslant M$. 特别地，若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界，即 $\|x_n\|\leqslant M$.
局部保号性	设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 <0)，则 $\exists\delta>0$，使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 <0). 反之，若 $f(x)>0$(或 <0)，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在，则 $A\geqslant0$(或 $\leqslant0$). 例如，$\dfrac{1}{x^2+1}>0$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=0$.

注 1) 其他极限过程如 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 也有相同的性质.

2) 数列的极限也满足上述性质.

(3) 极限的运算法则

四则运算法则	设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则 $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；$\lim[f(x)g(x)]=AB$； $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$；$\lim f(x)^{g(x)}=A^B(A>0)$.
复合函数运算法则	设 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，且在 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq u_0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

注　1）应用时一定不要忽视上述法则的前提条件.

2）若$\lim f(x)$与$\lim g(x)$一个存在，一个不存在，则$\lim[f(x)\pm g(x)]$必不存在. 若$\lim f(x)$与$\lim[f(x)\pm g(x)]$都存在，则$\lim g(x)$必存在. 若$\lim f(x)$与$\lim g(x)$都不存在，则$\lim[f(x)\pm g(x)]$可能存在，也可能不存在.

3）若$\lim f(x)$与$\lim g(x)$一个存在，一个不存在；或者都不存在，则极限$\lim[f(x)g(x)]$可能存在，也可能不存在.

4）设$\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=B$，则$\lim[f(x)\pm g(x)]=\infty$；当$B\neq 0$时，$\lim[f(x)g(x)]=\infty$，$\lim\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$.

2. 极限定理

定理 1.2.1（函数极限存在与无穷小关系定理）

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha\text{，其中}\lim_{x\to x_0}\alpha=0.$$

$x\to\infty$情形类似.

定理 1.2.2（单调有界准则）　单调有界数列必有极限. 对于函数情形，在$(a,+\infty)$（或$(-\infty,b)$）上，若$f(x)$单调增加（或减小）且有上（下）界，则极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$（或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$）存在.

定理 1.2.3（夹逼定理）　设在x_0的某去心邻域内有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

$x\to\infty$以及数列的情形类似.

定理 1.2.4（洛必达法则）

法则 I$\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$　设函数$f(x)$，$g(x)$满足

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

② 在x_0的某去心邻域内，$f'(x)$与$g'(x)$都存在，且$g'(x)\neq 0$；

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或为无穷大），

则
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

法则 II$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$　设函数$f(x)$，$g(x)$满足

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；

② 在x_0的某去心邻域内，$f'(x)$与$g'(x)$都存在，且$g'(x)\neq 0$；

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在（或为无穷大），

则
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

注　1）上述结论对自变量其他变化情形，如$x\to\infty$等也成立.

2）洛必达法则是求解未定式极限的有力工具. 在使用洛必达法则前必须先检验，若是$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式，可以直接用，但分子、分母求导前要先利用等价无穷小代换等手段简化所求极限. 若是$\infty-\infty$，$\infty\cdot 0$，1^∞，∞^0，0^0型未定式，则要先将其恒等变形成$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型（后面将详细介绍），再用洛必达法则.

3）洛必达法则的条件是充分非必要的，即若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在（但不是无穷大），则不能推断极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在.

例如，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$. 右端极限显然不存在，但

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\sin x\right)=1.$$

所以正确运用洛必达法则除了要检验所求极限是否为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$未定式外，还应看$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$是否存在（或为无穷大），但解题时一般不去验证.

3. 两个重要极限及其一般形式

标准形式	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，或$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.
一般形式	设$\lim\alpha(x)=0$，则$\lim\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$；$\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=\mathrm{e}$.

注 要抓住两个重要极限的本质，不能只看形式. 如$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

4. 无穷小量和无穷大量

(1) 无穷小量和无穷大量的概念

无穷小量	若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$），则称函数$f(x)$是当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小量，简称无穷小.
无穷大量	若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$），则称函数$f(x)$是当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷大量，简称无穷大.

注 1）无穷小和无穷大必须针对自变量的某变化过程而言.

2）在自变量同一变化过程中，若$f(x)$是无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷小；反之，若$f(x)$是无穷小，且$f(x)\neq0$，则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大.

3）无穷大量在某区间内必无界，但无界函数不一定是无穷大量. 如$\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$在区间$(0,1)$内无界，但不是无穷大.

(2) 无穷小量 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 的阶

$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=$	0	$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小，记为$\alpha(x)=o[\beta(x)]$.
	∞	$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小.
	$C\neq0$	$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶的无穷小.
	1	$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价的无穷小，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$.
$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C\neq0$ $(k>0)$		$\alpha(x)$是$\beta(x)$的k阶无穷小.

注 由上述可见，比较两个无穷小阶的基本方法是求“$\frac{0}{0}$”型极限.

例 1.2.1 当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是 x^3 的

(A) 低阶无穷小. (B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小. (D) 同阶但非等价无穷小.

解 由上述定义，只要求出极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ 即可. 因

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6},$$

故 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 与 x^3 是同阶但非等价的无穷小，应选(D).

(3) 无穷小的运算性质

性质 1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小，有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 2 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 3(等价无穷小代换定理) 设在自变量同一变化过程中 $\alpha(x)$，$\beta(x)$，$\alpha_1(x)$，$\beta_1(x)$ 都是无穷小，且 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，则

$$\lim\alpha(x)f(x)=\lim\alpha_1(x)f(x),\ \lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}f(x)=\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}f(x).$$

注 对于乘积、商的情形，可用等价无穷小代换其中的因子，但对于和、差的情形则不能随便用.

性质 4 设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 是自变量同一变化过程中的无穷小，则

$$\alpha(x)\pm\beta(x)\sim\max\{\alpha(x),\beta(x)\},$$

其中 $\max\{\alpha(x),\beta(x)\}$ 表示 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 中的低阶的无穷小部分. 如 $x\to 0$ 时，$x-\sin x^2\sim x$.

(4) 常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，有

$$\sin x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arctan x\sim x,\ e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a,$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},\ (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\ \ln(1+x)\sim x,\ \log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}.$$

二、补充公式与结论

1. 常用皮亚诺(Peano)型余项泰勒(Taylor)公式

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$.

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$.

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$.

(4) $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

(5) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$.

(6) $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\cdots-\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$.

(7) $\arctan x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$.

(8) $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$. (注意，此公式后面的项无此规律)

(9) $\arcsin x=x+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$. (注意，此公式后面的项无此规律)

注 1) 上述公式在求解 $\dfrac{0}{0}$、$\infty\cdot 0$ 等型未定式极限和确定无穷小阶的问题中发挥着十分重要的作用，尤其当洛必达法则失效时更是如此，所以请务必牢记.