

全国高中数学联赛 试题详解

中国数学会普及工作委员会 编

1981—1994

裴宗沪 主编

开明出版社

全国高中数学联赛试题详解

(1981—1994)

主编 裘宗沪 · 杜锡录
编者 夏兴国 周春荔
吴建平

开明出版社

(京)新登字 104 号

全国高中数学联赛试题详解

(1981—1994)

裘宗沪 主编

开明出版社出版发行

(北京市海淀区车道沟八号)

中央党校印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

开本:787×1092 1/32 印张:7.25 字数:160千字

1995年4月北京第1版 1995年4月北京第1次印刷

印数:00,001—10,000

ISBN 7-80077-755-3/G·524 定价:5.50元

内 容 提 要

本书辑录了 1981—1994 年全国高中数学联赛试题,解答部分由中国数学会普及工作委员会主任裘宗沪先生,副主任[杜锡录]先生、夏兴国先生等在每届主办省、市、自治区数学会精心作出的试题解答的基础上执笔完成,某些试题附有精辟解答及其背景分析和评注。这是中国数学会首次公开高中联赛的试题和解答。

本书可供中学数学教师、高中学生及各类高中数学竞赛参加者使用与参考。

前 言

早在五十年代，以华罗庚教授为代表的我国老一辈著名数学家就十分重视培养青少年优秀人才，倡导并组织了多次数学竞赛活动，吸引了大批数学爱好者，对我国科技人才的成长和科学研究的开展作出了卓越的贡献。

由于种种客观因素，我国数学竞赛活动几经波折。到1978年才又重新开展起来。1981年中国数学会开始举办“全国高中数学联赛”，这一群众性的数学竞赛活动得到了全国广大中学师生欢迎，也得到了教育行政部门、各级科学技术协会以及社会各阶层人士的肯定和支持。“试题所涉及的知识范围不超出现行教学大纲”这一命题原则，也得到了广泛的理解和拥护。

所谓“联赛”，就是各省、市、自治区联合承办，轮流做东，大家提供试题。因此“联赛”充满着协作精神。从1981年至1994年的试题，凝聚着全国许许多多数学工作者的心血，特别是各届承办单位更是认真负责、不辞辛劳，借此机会我代表中国数学会普及工作委员会向所有为“全国高中数学联赛”作出努力和给予支持的同志致以崇高敬礼。

中国数学会所主办的全国高中数学联赛、全国初中数学联赛、全国小学数学奥林匹克都是群众性的数学课外活动，是大众化、普及型的数学竞赛。高中联赛与全国中学生数学冬令营衔接，有“选拔”的作用。

在每届承办省、市、自治区数学会精心作出的试题解答的基础上，由中国数学会普及工作委员会组织有关同志执笔整理出了这本试题集。这是中国数学会首次公开全国高中数学联赛的试题和解答，供广大中学师生、数学爱好者参考。

裘宗沪

1995年1月20日

中国数学会普及工作委员会

简 介

中国数学会是受中国科学技术协会领导的全国性学术团体，中国数学会普及工作委员会是其下属机构，成立于1980年，该委员会把开展群众性数学竞赛作为它的一项主要工作，目前由它主办的全国性中小学数学竞赛包括：“全国小学数学奥林匹克”（创办于1991年），它是一个“普及型、大众化”的活动，分为初赛（每年3月）、决赛（每年4月）和总决赛（即夏令营 每年暑期）。

“全国初中数学联赛”（创办于1984年），采用“轮流做东”的形式由各省、市、自治区数学竞赛组织机构具体承办；每年4月举行，分为一试和二试。

“全国高中数学联赛”（创办于1981年），承办方式与初中联赛相同，每年10月举行，分为一试和二试，在这项竞赛中取得优异成绩的全国约90名学生有资格参加中国数学会主办的“中国数学奥林匹克（CMO）即全国中学生数学冬令营”（每年元月）。

此外该委员会还配合中国数学奥林匹克委员会组织冬令营活动，选拔与培训国家集训队和代表队，为近年来我国在国际数学奥林匹克（IMO）中取得优异成绩作出了贡献。

为了使各种类型、各个层次的数学普及读物以及中小学课内外教材的策划、编写形成规模与系列，中国数学会普及工作委员会与开明出版社共同创办了“数学编辑室”。

本书主编裘宗沪是中国数学会普及工作委员会主任、中国数学奥林匹克委员会副主席。1993年被国家数学竞赛世界联盟(WFJMC)授予“爱尔特希(Erdős)国家奖”，这是第一位获此殊荣的亚洲数学家。

目 录

试题部分

一九八一年.....	(3)
一九八二年.....	(7)
一九八三年.....	(11)
一九八四年.....	(15)
一九八五年.....	(20)
一九八六年.....	(24)
一九八七年.....	(28)
一九八八年.....	(32)
一九八九年.....	(36)
一九九〇年.....	(40)
一九九一年.....	(45)
一九九二年.....	(49)
一九九三年.....	(54)
一九九四年.....	(59)

解答部分

一九八一年.....	(64)
一九八二年.....	(76)
一九八三年.....	(88)
一九八四年.....	⑩04

一九八五年	(117)
一九八六年	(126)
一九八七年	(134)
一九八八年	(144)
一九八九年	(151)
一九九〇年	(158)
一九九一年	(170)
一九九二年	(180)
一九九三年	(193)
一九九四年	(205)
附录 高中数学竞赛大纲	(218)

试题部分

一九八一年

一、选择题

下面 7 个题目各提出四个答案，将你认为正确的答案的英文字母代号填写在题后的括号内。

1. 条件甲：两个三角形的面积和二条边对应相等。

条件乙：两个三角形全等。

(A) 甲是乙的充分必要条件；

(B) 甲是乙的必要条件；

(C) 甲是乙的充分条件；

(D) 甲不是乙的必要条件，也不是充分条件。

答 ()

2. 条件甲： $\sqrt{1+\sin\theta}=a$ 。

条件乙： $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}=a$ 。

(A) 甲是乙的充分必要条件；(B) 甲是乙的必要条件；

(C) 甲是乙的充分条件；

(D) 甲不是乙的必要条件，也不是充分条件。

答 ()

3. 设 $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。

$$T = \frac{\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$$

(A) T 取负值；

(B) T 取非负值；

(C) T 取正值;

(D) T 取值可正可负.

答 ()

4. 下面四个图形中, 哪一个面积最大?

(A) $\triangle ABC$: $\angle A=60^\circ$, $\angle B=45^\circ$, $AC=\sqrt{2}$;

(B) 梯形: 两对角线长度分别为 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$, 夹角为 75° ;

(C) 圆: 半径为 1;

(D) 正方形: 对角线的长度为 2.5.

答 ()

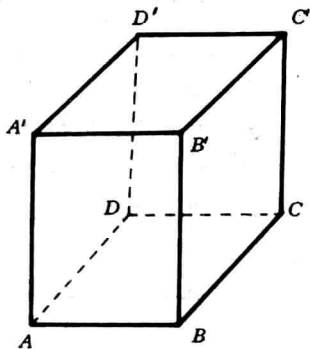
5. 给出长方体 $ABCD-A'B'C'D'$, 下列十二条直线: AB' , BA' , CD' , DC' , AD' , DA' , BC' , CB' , AC , BD , $A'C'$, $B'D'$ 中有多少对异面直线?

(A) 30 对;

(B) 60 对;

(C) 24 对;

(D) 48 对.



答 ()

6. 在坐标平面上有两个区域 M 和 N . M 是由 $y \geq 0$ 、 $y \leq x$ 和 $y \leq 2-x$ 这三个不等式确定的. N 是随 t 变化的区域, 它由不等式 $t \leq x \leq t+1$ 所确定的, t 的取值范围是 $0 \leq t \leq 1$. M 和 N 的公共面积是函数 $f(t)$, 则 $f(t)$ 为:

(A) $-t^2 + t + \frac{1}{2}$;

(B) $-2t^2 + 2t$;

(C) $1 - \frac{1}{2}t^2$;

(D) $\frac{1}{2}(t-2)^2$.

答 ()

7. 对方程 $x|x|+px+q=0$ 进行讨论, 下面的结论中, 哪一个错误的?

- (A) 至多有三个实根; (B) 至少有一个实根;
 (C) 仅当 $p^2-4q \geq 0$ 时才有实根;
 (D) 当 $p < 0$ 和 $q > 0$ 时, 有三个实根.

答 ()

二、下列表中的对数值有两个是错误的, 请予纠正.

x	0. 021	0. 27	1. 5	2. 8	3	5
$\lg x$	$2a+b+c-3$	$6a-3b-2$	$3a-b+c$	$1-2a+2b-c$	$2a-b$	$a+c$
x	6	7	8	9	14	
$\lg x$	$1+a-b-c$	$2(b+c)$	$3-3a-3c$	$4a-2b$	$1-c+2b$	

三、在圆 O 内, 弦 CD 平行于弦 EF . 且与直径 AB 交成 45° 角. 若 CD 与 EF 分别交直径 AB 于 P 和 Q , 且圆 O 的半径长为 1. 求证:

$$PC \cdot QE + PD \cdot QF < 2.$$

四、组装甲、乙、丙三种产品, 需用 A, B, C 三种零件. 每件甲需用 A, B 各 2 个; 每件乙需用 B, C 各 1 个; 每件丙需用 2 个 A 和 1 个 C . 用库存的 A, B, C 三种零件, 如组装成 p 件甲产品、 q 件乙产品和 r 件丙产品, 则剩下 2 个 A 和 1 个 B . 但 C 恰好用完. 试证: 无论怎样改变产品甲、乙、丙的件数, 也不能把库存的 A, B, C 三种零件都恰好用完.

五、一张台球桌形状是正六边形 $ABCDEF$. 一个球从 AB 的中点 P 击出, 击中 BC 边上的某点 Q , 并且依次碰击 CD, DE, EF, FA 各边, 最后击中 AB 边上的某一点, 设

$\angle BPQ = \theta$, 求 θ 的取值范围.

提示: 利用入射角等于反射角的原理.

