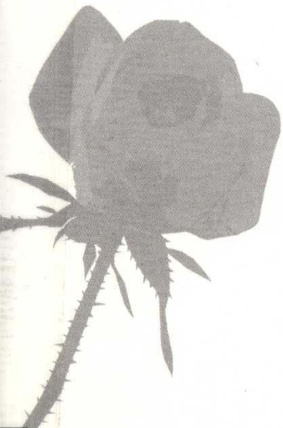

棘手又迷人的数学

数学，
棘手但很迷人

柳柏濂 著

密码，构图，机器证明……
令人在“寻寻觅觅”中感受到“不仅仅是游戏”的棘手，
然而，从有机化合物到红楼梦的族谱，
从“阿凡提巧拆金环”到“克隆”绵羊的伟业，
我们领略到数学的真谛，
惊叹它揭开面纱后的迷人……

科学出版社

棘手又迷人的数学

数学，
棘手但很迷人

科学出版社
北京

总　序

数学如一束玫瑰，棘手，但很迷人．

数学的美是迷人的．然而很多漂亮有趣的数学题，开始常常叫人产生无从下手之感，所以数学又常常是棘手的．其中组合数学的问题更是五花八门，几乎每个题目都要有独特的思路，使你在解题的思考过程中得以充分享受“从山重水复走向柳暗花明”的乐趣，体验在百思不解后豁然开朗的快乐．

擅长组合数学的柳柏濂先生，从他多年研究成果和数学教学的思考中撷取精华，写成十几篇数学小品与读者共同分享，其书名取为《数学，棘手但很迷人》，是非常贴切的．

这本书是本丛书的第一册，丛书其他分册内容形式多有不同而各具特色．编者用《棘手又迷人的数学》作为丛书的书名，想来主要是希望读者从多个角度领略数学的迷人和棘手之处.

柳先生的这些短文，引领我们走进一个颇有深度的数学世界．他不满足于浮光掠影或眼前一亮，而是与读者一同思考和探索．在脍炙人口的“阿凡提传奇”中，他选取了一个巧拆金环的故事，让我们在惊叹中，欣赏数论的完备分析和有关的新结果. 接着，作者带领我们从动物园的栏栅前和每天上下往返的楼梯中，走向组合数学的前沿观光；又从法国著名数学家傅里叶的经典提问，谈到中国古代的数学泰斗祖暅的数学原

理；从生命科学“克隆”羊的伟大成就谈起，把现代图论的知识和思维奉献给读者．其他如从有机化合物谈到红楼梦的族谱，再引出信息科学技术中的密码、树结构和有相当难度的机器证明；从宋代词人的名句将我们引向他的研究专题“组合矩阵论”中寻寻觅觅；又在绞肉机旁，把函数的迭代引向“混沌”的动力系统理论；在眼花缭乱的应用中，我们领会了数学模型的真谛，尝到了数学的美味……“棘手但很迷人”，也就成为作者与读者的共同体验了．作者用几乎是文学而不是数学的笔触，给我们娓娓道出现代数学的“故事”．这不是东采西摘的材料堆砌，而是一个二十多年来承担国家自然科学基金任务的教授在研究之余的思想札记．

“棘手但很迷人”，这是数学学习甘苦的内心独白，也是数学探索“无限风光在险峰”的壮志豪言．

古老的幻方，是棘手但却迷人的数学主题之一．吴鹤龄先生为《好玩的数学》丛书写了一本《幻方及其他——娱乐数学经典名题》（第二版），引得许多读者对幻方入迷而且跃跃欲试，詹森先生就是其中之一．詹先生玩幻方玩得熟能生巧，玩出了创新，把“棘手”玩成了顺手．于是他为本丛书写了一本《你亦可以造幻方》，与读者分享成功的快乐．书中提供了构造奇数阶的幻方、完美幻方、对称幻方、对称完美幻方、奇偶数分开的对称幻方等多种构造幻方的方法．构造一个这样的幻方，只需两步或三步，这两三步小学生都可以做到．即使你还没有完全理解其中的道理，也能造出许多个有各种特色的幻方．

具有不确定性的事件叫随机事件．随机事件的数学问题常常是迷人而棘手的．在《好玩的数学》丛书中《趣味随机问

题》一书的作者孙荣恒教授，这次又为我们带来了一串新的故事．他的新作《概率统计拾遗》，从平凡中发掘惊奇，给读者一个又一个意外．比如打麻将要掷骰子定庄的问题．有人认为自己掷骰子对自己坐庄有利，想自己坐庄者常抢着掷；有的人认为谁掷都一样，4 家坐庄机会均等，都是 1/4. 两种看法哪一种正确？意外的答案是都错了．由此引出的纸上作业法，有各种各样的应用．又如由鞋子配对引出的 S 矩阵给出四同、五同等问题的简单计算法．孙先生通过简单、严谨的分析计算，得出的结论令人口服心服，其方法平凡而又有启发性．像这样来自生活的看似平凡其实暗藏玄机的问题书中不少，有的例子涉及考生的成绩，有的例子涉及法官的判决，要想真正想明白，真是要有不怕棘手的精神．

如果在棘手的辛劳之余想轻松一下，就翻翻本丛书中的另一本《邮票王国中的迷人数学》吧．作者之一是大家熟悉的易南轩老师，他的《数学美拾趣》（第二版）深受读者欢迎，也是《好玩的数学》丛书中的一册．另一位作者王芝平老师也是作品颇丰的数学教育专家．两位先生花费了三年多的光阴和心血，收集整理了 1300 多枚与数学有关的邮票，按图索骥，向我们一一道来．邮票的轮廓联系着各种几何形体，邮票的主题或涉及数学史上的事件，或纪念数学家的丰功伟绩，或展示数学的应用，琳琅满目，美不胜收．联系着这上千余枚邮票，作者纵横畅叙，笔墨酣畅，谈古论今，说天看海，大至卫星飞船，小至象棋游戏，都和数学的美妙关联起来．不论是数学爱好者、集邮爱好者或一般的读者，都能在阅读此书时享受人类文明之雅趣．不过这并不棘手，棘手的工作作者已经代我们辛劳了．

本丛书的读者可能有男女老少，可能术业各有专攻，对数学的理解和鉴赏的角度与能力各不相同．有人认为棘手的问题，也有人能够驾 轻就熟地手到擒来．但编者希望并且相信，每位翻阅过丛书的朋友都能从中看到几点迷人的星光；果真如此，那将是作者和编者最大的快乐.

2011 年 11 月 9 日

前　言

当我把15年来断断续续发表的15篇数学小品编辑成册时，浏览这些科研、教学间隙中的副产品，不由得思绪万千．近年来，虽然我既是中国数学会和美国数学会的会员，又有幸“挤进”广东省作家协会．然而，面对科普数学作品的创作，我无法做到才思敏捷．拿起笔来，我感到撰写数学小品比科研论文有更多的艰辛，因为后者，只需要埋头于科学性，而前者，不仅要关注科学性，还要挖空心思，兼顾普及性和可读性．

一篇数学故事，对于作者，“迷人，但很棘手”．而对于读者，也许是“棘手，但很迷人”．

解读一篇数学小品，肯定不如翻阅一篇文学作品来得轻松．它需要你的思考、智慧和灵感．但是，一旦你越过了那座“山峰”，你会尝到别样的甘甜．你就会理解，当年阿基米德为什么赤身裸体地冲出澡堂，高叫“我找到了！”

一切对数学感兴趣的朋友，与其千军万马在“奥数”热浪下煎熬，不如找一篇数学故事静静品尝，看看众多前辈数学家的灵感能否点燃你思想中的那点点智慧的火花……

15篇小品，一束带刺的花．其中渗透了我若干科研心得，敝帚自珍，聊当引玉之砖．感谢张景中院士为丛书作序，并对我说了那么多鼓励的话．感谢《数学传播》杂志(网址为http://www.math.si nica.edu.tw)，它曾给我的拙作的发表提供

了篇幅. 我参观过胡适先生纪念馆, 还记得胡先生那几句动人的诗:“醉过才知酒浓, 爱过才知情重, 你不会作我的诗, 我不会做你的梦.”——以此, 献给多年来给我默默支持的妻子莫慧女士.

数学, 真是棘手, “众里寻他千百度”, 但是, 却很迷人, “蓦然回首, 那人却在, 灯火阑珊处”.

柳柏濂

2011年8月于华南师范大学

目　录

1　阿凡提巧拆金环与完备分拆

1.1　阿凡提的故事

阿凡提是维吾尔族传说中的聪明人,在民间中流传着不少关于他机灵智巧的故事.一次,阿凡提给巴依打短工,商定的时间是10天.3天以后,贪婪的巴依想出一个坏点子赖账.他拿出一串光灿灿的金链,当着大家的面对阿凡提打赌道:"这是7个环连成的金链,如果从今天起,你能够第一天取1个环,第二天取2个环,第三天取3个环……第七天取7个环,而你只准许砍断一个环.那么,这串金链就归你所有.要是你办不到的话,别说金链,甚至工钱也休想拿走,10天的工作也算是白干了."阿凡提默然应允.他把金链的第三个环砍断,7个环的链就被分成1个,2个,4个环的小链(图1.1).

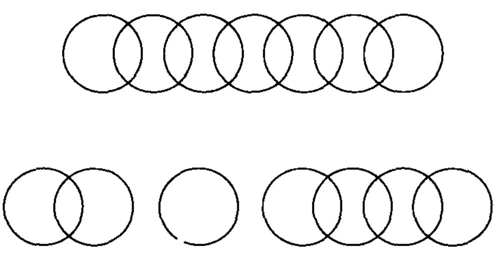

图 1.1

第一天,阿凡提拿走1个环.

第二天，他把 1 个环放回去拿走 2 个环.

第三天，他把 1 个与 2 个环一起拿走.

第四天，放回 3 个环拿走 4 个环.

第五天，把 1 个与 4 个环一起拿走.

第六天，放回 1 个换走 2 个，即共拿走 6 个环.

第七天，把整条金链拿走.

愚蠢的巴依捶胸顿足地哀叹："跟有学问的人是不能随便开玩笑的."

1.2 并非用在打赌上

诚然，我们讲的仅仅是一个杜撰的故事. 巴依再愚蠢，也不至于到第七天才顿悟到自己已经输定了. 文献中没有记载过阿凡提是否学过代数或组合数学. 然而，他确实用到了"数分拆"的道理. 尽管，今后我们无须企望再遇见第二个如此愚蠢的巴依，然而，深入思考和探索故事中的数学，也决非只能用在打赌上.

我们考察下面的问题，要解决它仍然需要阿凡提式的机智.

问题 1.1 有一堆质量为整数克的零件，其质量范围是 1 克至 n 克均齐备. 现要用天平在一边放砝码的方法称量它们，如何选取一组砝码，使每个零件可用唯一的一种方法称出来.

问题 1.2 找一组电阻，使它可用唯一的方法配成 1 到 n 个单位齐备的电阻箱.

这类问题，在数学上称为完备分拆（perfect partition）问题.

让我们还是从阿凡提的故事，领悟一下什么是完备分拆.

众所周知，7 这个正整数可以写成若干个正整数之和. 例如，

$$7=3+4=1+2+4=1+1+2+3=1+1+1+1+1+1+1,$$

这里的每一个和式（尚未全部列出），称为 7 的一个分拆（partition). 如果和式中有 r 项,称为 r 分拆. 例如,上述从左至右的式子可分别称为 7 的 1 分拆,2 分拆,3 分拆,4 分拆,7 分拆. 在分拆中,我们并不考虑各部分的次序.

因此,上述各分拆可分别记为 3,4;1,2,4;1^2,2,3; 1^7. 我们考察 1,2,4,它正是阿凡提的杰作. 它的特别之处在于:仅用 3 部分 1,2,4 可以唯一地表示一切不大于 7 的正整数的分拆(当然,故事中没有要求唯一性).

易见

$$6=2+4,\quad 5=1+4,\quad 4=4,\quad 3=1+2,\quad 2=2,\quad 1=1,$$

分拆 1,2,4 称为 7 的完备分拆.

作为严格的数学定义,我们有

定义 1.1(分拆和完备分拆) 把正整数 n 表成若干个正整数之和,叫做 n 的分拆. 分拆中所分成的正整数的个数称为分拆的部分数. 若一个分拆包含不大于 n 的所有正整数的一个唯一分拆,则这个分拆称为 n 的完备分拆.

容易知道:一个正整数 n 的完备分拆是必定存在的. 谁都能够立即看出来的一个完备分拆是 1^n,称之为平凡完备分拆. 那么,自然而来的问题是:我们能否把 n 的所有完备分拆都找出来呢?

回答是肯定的.

1.3 一一对应找出完备分拆

我们先注意到一个明显的事实:一个完备分拆必须含有一个部分是 1,否则,它就不能包含 1 这个正整数的分拆.

设分拆中有 q_1-1 个 1($q_1>1$),则所有小于 q_1 的数都必可唯一地(用 1)表成分拆. 但是,要把数 q_1 表成分拆,必须有另一部分 q_1. 若分拆的下一部分是 $q_1{}^{q_2-1}$,则所有小于 q_1q_2 的数都可用

$1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}$唯一地表成分拆，但数 q_1q_2 表成分拆，必须要增加一部分 q_1q_2. 若分拆的下一部分是$(q_1q_2)^{q_3-1}(q_3>1)$，则所有小于 $q_1q_2q_3$ 的数可用 $1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}$唯一地表成分拆. 但要把数 $q_1q_2q_3$ 表成分拆，必须增加另一部分 $q_1q_2q_3$.

如此继续，得

$$1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}(q_1q_2q_3)^{q_4-1}\cdots(q_1q_2\cdots q_{k-1})^{q_k-1}, \qquad (1.1)$$

它能把 $[1,n]$ 中的所有整数唯一地表成分拆.

这里，

$$\begin{aligned} n &= 1\cdot(q_1-1)+q_1(q_2-1)+q_1q_2(q_3-1) \\ &\quad +q_1q_2q_3(q_4-1)+\cdots+q_1q_2\cdots q_{k-1}(q_k-1) \\ &= q_1q_2\cdots q_k-1 \quad (q_i>1, i=1,2,\cdots,k), \end{aligned}$$

于是

$$n+1=q_1q_2\cdots q_k. \qquad (1.2)$$

上述分析表明：n 的每一个形如式(1.1)的完备分拆一一对应于 $n+1$ 的一个形如式(1.2)的有序分解（请注意：式(1.2)的 q_1, $q_2,\cdots,q_k$ 是有序的）. 于是，要找出 n 的所有完备分拆（1.1），只需作出 $n+1$ 的所有有序分解（1.2）.

归纳上述结论，得到

定理 1.1（Riordan[1]） 正整数 n 的完备分拆的个数与 $n+1$ 的无单位 1 的正因子的有序分解的个数相等. 若

$$n+1=q_1q_2\cdots q_k \qquad (q_i>1, i=1,2,\cdots,k),$$

则 n 的完备分拆是 $1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}(q_1q_2q_3)^{q_4-1}\cdots(q_1q_2\cdots q_{k-1})^{q_k-1}$（或简称为 $n\sim1^{q_1-1}q_1^{q_2-1}(q_1q_2)^{q_3-1}(q_1q_2q_3)^{q_4-1}\cdots(q_1q_2\cdots q_{k-1})^{q_k-1}$）.

例如，求 7 的所有完备分拆.

解 先把 $7+1=8$ 作有序分解，得

$$8,\quad 4\times 2,\quad 2\times 4,\quad 2\times 2\times 2.$$

由定理1.1,对应的完备分拆是

$$1^{8-1}=1^7;\ 1^3,4\ ;\ 1,2^3;\ 1,2,4.$$

由定理1.1可以看到,只要作出了 n 的一个有序分解,无须作出完备分拆,就能知道它的部分数 Q,因为

$$\begin{aligned} Q &= (q_1-1)+(q_2-1)+\cdots+(q_k-1)\\ &=(q_1+q_2+\cdots+q_k)-k. \end{aligned}\tag{1.3}$$

运用式(1.3),我们可以直接对上述7的完备分拆作出验证.

1.4 数学比阿凡提更聪明

阿凡提不愧为聪明人. 他的机灵之处不仅在于找出了7的完备分拆,而且按照巴依只准断开一个环的限制,准确地选择了7的一个部分数最小的完备分拆1,2,4.

对于不大的数7,阿凡提当然能凭他机智的直觉. 然而,对于任意一个 n,如何能够做到,无须把所有完备分拆罗列出来,就直接找出具有最小的部分的一个呢?

这必须依靠比阿凡提更聪明的数学了.

注意到式(1.3),用数学的语言表达,我们的问题是:在约束条件 $q_1q_2\cdots q_k=n+1, q_i\geqslant 2$ 下,求目标函数(1.3)的最小值.

乍看起来,这似乎是一个熟知的极值问题:在 k 个正数积为定值时,求它们和的极小值. 然而,注意到目标函数 Q 右边的 k 仍是一个变量,我们就不能用惯常的手法去求解.

为此,先证明下列引理:

引理1.1 设 $m=q_1q_2\cdots q_l, q_i\geqslant 2, i=1,2,\cdots,l$ 且 $\sigma(m)=q_1+q_2+\cdots+q_l$,则 $\sigma(m)\leqslant m$.

证明 因 $q_i\geqslant 2, i=1,2,\cdots,l$,故