高中数学新课程内容解析

张定强 吕世虎 主编

GAOZHONGSHUXUE
XINKECHENG
NEIRONGJIEXI

首都师范大学出版社

高中数学新课程内容解析

主　编　张定强　吕世虎
副主编　焦彩珍　李保臻

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学新课程内容解析/张宝强　吕世虎主编 .—北京：
首都师范大学出版社,2004.9

ISBN 7－81064－740－7/G·546

Ⅰ.高…　Ⅱ.①张…②吕…　Ⅲ.数学－教学研究－高中　Ⅳ.G632.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 063112 号

高中数学新课程内容解析

张宝强　吕世虎　主编

策划编辑　侯亮

首都师范大学出版社出版发行

地址　北京西三环北路 105 号

邮编　100037

电传　68418523(总编室)　68982468(发行部)

网址　www.cnup.cnu edu.cn

E－mail cnup @ mail.cnu.edu.cn

北京世图印刷厂　印刷

全国新华书店发行

版次　2004 年 9 月第 1 版

印次　2004 年 9 月第 1 次印刷

书号　ISBN 7－81064－740－7/G·546

开本　787×1092 毫米　1/16

印张　21.75

字数　315 千字

印数　0 001－2000 册

定价　25.00 元

前　　言

长期以来，初等数学研究（包括初等代数研究与初等几何研究）是高师院校数学教育专业的必修课程，也是体现师范特色的课程。按照原来的教学计划，初等代数研究与初等几何研究各72学时，开设一年。近年来，在高师院校的课程改革过程中，大部分院校调整了教学计划，将原来的初等代数研究与初等几何研究两门课程合并为初等数学研究一门课程，且将教学时数调整为54—72学时。为了适应这种改革，各高师院校在初等数学研究课程内容的设置方面都作了一些积极的探索。我们在初等数学研究课程的教学方面也作了一些探索和尝试。在此期间，恰逢基础教育课程改革，《普通高中数学课程标准》（实验稿）（以下简称《标准》）的颁布。《标准》在内容设置方面有很大变化，新增加了一些新的内容，对原有的传统内容也作了新的处理。在学习、研讨《标准》的过程中，我们根据《标准》的要求，编写了《高中数学新课程内容解析》讲义作为初等数学研究课程的教材使用。本书是在讲义的基础上形成的。书中重点对《标准》中新增加的、现行高师数学教育专业课程中涉及较少的一些内容作了介绍。希望为学生适应高中新数学课程改革提供必要的准备。

本书是西北师范大学数学与信息科学学院数学教育研究所的教师和数学课程与教学论专业的研究生集体完成的。参加本书编写的人员有数学教育研究所的教师：吕世虎、张定强、肖鸿民、焦彩珍、李保臻以及2003、2004、2005届的研究生：贾随军、温建红、康世刚、高维宗、刘海宁、王兴福、郑庆全、李兴东、谢海燕、李艳利、陈婷、王敏、刘燚。

本书由张定强、吕世虎担任主编，焦彩珍、李保臻担任副主编。本书的整体框架由吕世虎、张定强设计，张定强、吕世虎、焦彩珍、肖鸿民、李保臻对整个书稿作了统稿和修改。

本书只是我们对初等数学研究课程与教学改革方面所做的一个尝试，作为教材，从体例到内容还不够成熟，还有许多问题需要进一步探讨。由于我们的水平有限，书中难免挂一漏万，且一定有不少缺点和错误，恳请读者批评指正。

本书可作为高师院校数学教育专业课程的教材使用，也可作为高中数学新课程教师培训参考资料和高中数学教师在推进新课程过程中的进修参考资料。

我们在本书编写过程中，参考了大量的著作和研究论文，在此向著作和研究论文的作者表示衷心的感谢。

本书是西北师范大学继续教育科研项目《教师继续教育类函授专升本数学与应用数学专业课程模块建设研究》的成果之一，在编写过程中得到西北师范大学数学与信息科学学院领导的大力支持和帮助，特别是数学与信息科学学院院长刘仲奎教授、副院长李宝麟教授对本书的编写给予了指导、支持和帮助，在此表示感谢。

本书的出版得到首都师范大学出版社和侯亮先生的大力支持和帮助，我们一并表示感谢。

编　者

2004 年 6 月

目　　录

第一章　数系的扩充

数系的扩充是《高中数学课程标准》（以下简称《标准》）中的选修内容．《标准》在高中数学课程的选修系列1和2中设置了“数系的扩充与复数的引入”，教学时数为4课时．“数系的扩充与复数的引入”的目的是：让学生了解数系的扩充过程以及引入复数的必要性，掌握自然数、有理数、实数、复数的一些基本知识．

《标准》中数系的扩充与复数的引入的定位如下：

数系扩充的过程体现了数学的发现和创造过程，同时体现了数学发生、发展的客观需求，复数的引入是中学阶段数系的又一次扩充．在本模块中，学生将在问题情境中了解数系扩充的过程以及引入复数的必要性，学习复数的一些基本知识，体会人类理性思维在数系扩充中的作用．

《标准》中数系的扩充与复数的引入的内容与要求：

1. 在问题情境中了解数系的扩充过程，体会实际需求与数学内部的矛盾（数的运算规则、方程求根）在数系扩充过程中的作用，感受人类理性思维的作用以及数与现实世界的联系．
2. 理解复数的基本概念以及复数相等的充要条件．
3. 了解复数的代数表示法及其几何意义．
4. 能进行复数代数形式的四则运算，了解复数代数形式的加、减运算的几何意义．

《标准》中数系的扩充与复数的引入的说明与建议：

在复数概念与运算的教学中，应注意避免繁琐的计算与技巧训练．对于感兴趣的学生，可以安排一些引申的内容，如求 $x^3=1$ 的根、介绍代数学基本定理等．

本章将根据《标准》内容，讨论数系的扩充过程，包括自然数的产生、有理数的建立、实数的形成、复数的确立及超复数的引入等．

数是数学中最基本的概念，是现代数学的基本研究对象之一，也是生活或生产中应用最广泛的工具．数的概念的形成与扩展有一个漫长的历史过程，人类就是根据生活、生产发展的需要使数系不断扩展的．

第一节　自然数的产生

恩格斯指出："数学是从人的需要中产生的"．作为数学最基本概念之一的数也不例外，它是原始人类根据生活的直接需要，在长期的实践中逐步形成的．事实上，数（shù）的概念发源于数东西的数（shǔ）．在原始社会里，人类以狩猎、捕鱼和采果为生．因而，过着集群生活的人们，为了满足食物的需要，势必要顾及到人数、工具和收获物多少的问题．例如，要把已有的工具分配给猎人，就有一个够分不够分的问题．当时人们还不知道用数（shǔ）的办法进行比较，只是采取把工具一件一件地分给猎人来判断人和工具哪个多、哪个少．同样，打猎回来后，将猎获的野兽分给大家，又遇到了够不够分，即人和野兽哪个多、哪个少的问题等．人们就是在这样的无数次比较中，渐渐萌发了"多"和"少"的观念．但这时人们尚不知道"多"与"少"是具体事物集合的一种特征，还没有形成抽象的数的概念．

后来，在"屈指可数"的情况下，人们逐步学会以对应的方式，用人的手指来数（shǔ）某个事物集合中事物的多少．比如，一个事物用一个手指来对应，五个事物就用五个手指来对应．古人用"手"表示"五"，用"整个人"表示"二十"，就是把集合中事物数与一个人所有的手指、脚趾总数建立起对应关系，以说明事物数与若干个手指、脚趾的总和那样多．我国古代曾用"|、||、|||、||||、|||||"来表示"一、二、三、四、五"．也有些国家曾用罗马数字"Ⅰ"表示"一"，"Ⅴ"表示"五"，"Ⅹ"表示"十"．许多国家早已使用当时一直延续到今天的十进制的记数法．从这些事实中可看出人类最初用手指数数的历史印迹．人们能用手指这样一种具体事物来对应其他各种事物以表示多少，这比起最初人们只会用相互搭配的办法来比较两种事物的多少，是一个很大的进步．但是，这时人们还没有从具体事物中抽象出"数"这个概念．

经过长期的实践，人们逐渐认识到各种事物集合在量上具有共同的特征．比如，三头羊、三条鱼、三个梨、三朵花、三棵树，等等．虽然是一些不同的东西，但它们在量上都有着共同的特征，即都是"三"个东西．又比如，一头羊增加一头羊是两头羊，再增加一头羊是三头羊；同样，一条鱼增加一条鱼是两条鱼，再增加一条鱼就是三条鱼……它们在量上有一个特

征，即都是“一”个东西增加“一”个东西是“二”个东西，再增加“一”个东西就是“三”个东西．久而久之，人们便从各种不同的具体事物中抽象出量的共同特征，即舍弃事物的具体内容而得到抽象的数．后来，人们又引入了数字符号和十进位制记数法．于是，人们由一个东西增加一个东西得二个东西，再增加一个东西得三个东西，依此类推，可得一系列数：1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、……有了它，人们就可以利用它数（shǔ）出任何一个事物集合中元素的多少．这样，人类对数的认识便从感性认识上升到理性认识，发生了质的飞跃，从而抽象出了自然数的概念．正如恩格斯指出的那样：“数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的．人们曾用来学习计数，从而用来做第一次算术运算的十个指头，可以是任何别的东西，但是总不是悟性的自由创造物．为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其他一切特性而仅仅顾到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果．”

自然数是人类最早认识的数，我们研究初等数学就是从这最基本的对象开始的．自然数的理论严谨性问题，是在十九世纪中叶数学公理法发展的影响下提出来的．所谓公理法，就是以一些不加定义的基本关系与不加证明的公理为基础，借助于纯粹逻辑方法推演出一系列定理与命题，以建立起整个理论体系．

正是由于理论严谨性的要求，意大利数学家皮亚诺（G. Peano，1858—1932）在 1889 年提出自然数的公理，建立了自然数的序数理论．它不仅仅反映了自然数在数量上的意义，而且更好地揭示了自然数在顺序上的意义，还给出了自然数加、乘运算的具体方法．

这种理论是从自然数列抽象出来的．自然数列是排定了顺序的一串数，其中有一个最前面的数，没有两个相等的数，每一个数有且只有一个后继数．把“后继”作为不加定义的基本关系，用一组公理来刻划它，并用“后继”的概念，在 N 中定义了两种代数运算：加法和乘法．

定义 1　集合 N 的元素叫做自然数，如果 N 的元素间有一个基本关系“后继”（用“+”来表示），并满足下列公理：

Ⅰ　$0\in N$

Ⅱ　对任何 $a\in N$，有惟一的 $a^+\in N$；

Ⅲ　对任何 $a\in N$，a^+ 不是 0；

Ⅳ 对任何 a，$b\in N$，若 a^+ 与 b^+ 相同，则 a 等于 b（记为 $a=b$）；

Ⅴ （归纳公理）若 $M\subseteq N$，且

(1) $0\in M$；

(2) 对任意 $a\in M$，有 $a^+\in M$，则 $M=N$.

显而易见，自然数列满足定义 1，反之，由Ⅰ和Ⅲ，有自然数 0，它是最前面的一个数；由Ⅱ和Ⅳ，有惟一的 1，记为 0^+，它只后继于 0；同样有惟一的 2，记为 1^+，它只后继于 1；这样继续下去，可以得到

$$0,1,2,\cdots\cdots,n,\cdots\cdots.$$

定义 2 自然数的加法是指这样的对应，它使得任意一对自然数，存在惟一确定的自然数 $a+b$ 与之对应，并且

① $a+1=a^+$；

② $a+b^+=(a+b)^+$.

例 1 证明：$2+3=5$.

证明： $\because\ 2+1=2^+=3$,

$2+2=2+1^+=(2+1)^+=3^+=4$,

$\therefore\ 2+3=2+2^+=(2+2)^+=4^+=5$.

定义 3 自然数的乘法是指这样的对应，对于每一对自然数 a、b，存在惟一确定的自然数 $a\cdot b$ 与之对应，并且有以下性质：

① $a\times 1=a$；

② $a\times b^+=a\times b+a$.

例 2 证明：$2\times 3=6$.

证明： $\because\ 2\times 1=2$,

$2\times 2=2\times 1^+=2\times 1+2=4$,

$\therefore\ 2\times 3=2\times 2^+=2\times 2+2=4+2=6$.

自然数公理中的“后继”已经指出 a 与 a^+ 顺序，进而对任意两个自然数，可以从规定它们的顺序，使与两个相邻数已有的顺序一致.

定义 4 若 a，$b\in N$，且存在 $K\in N$ 得 $a=b+k$，则称 a 大于 b，记做 $a>b$，也说

b 小于 a，记为 $b<a$.

例 3　求证：若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$.

证明： 由 $a>b$，$b>c$，知存在 k_1、k_2，使得 $a=b+k_1$，$b=c+k_2$，从而 $a=(c+k_2)+k_1=c+(k_1+k_2)$，$\therefore\ a>c$.

关于自然数的减法、除法运算，可以利用逆运算来定义．这样自然数的存在理论就建立起来了．

根据自然数的大小规定，自然数从 0 开始一个接一个排成一列：0 是其中的最小数，自然数列中无最大数，除此之外，自然数还有其他一些性质：

1. 自然数列具有离散性．

定理 1　**在任意两个相继的自然数 a 与 a^+ 之间不存在自然数 b，使 $a<b<a^+$．**

证明： 若 $b>a$，则有 $k\in N$，使 $b=a+k$，又 $a+k\geqslant a+1$，于是 $b\geqslant a+1=a^+$. 可见 $b<a^+$ 不成立．

2. 自然数集具有阿基米德性质．

定理 2　**对任意 a、$b\in N$，若 $a<b$，则存在 $n\in N$，使 $na>b$.**

这就是说，自然数集具有 Archimedes（阿基米德）性质．

3. 自然数集是有序数集．

在自然数集理论中，定义了自然数的顺序关系，并且满足基本顺序律，从而自然数集是有序数集．

4. 自然数集是良序集．

如果一个有序集 A 的任意非空子集都有首元素，则称 A 为良序集．

定理 3　**自然数集 N 的任意一个非空子集中必有最小数．**

该定理称为最小数原理，它与归纳公理等价．

这表明自然数集是良序集．

第二节　有理数的建立

人们有了自然数的概念之后，可以解决生产和生活中的一些问题，但由于人类实践的发展、认识的深化，又感到只用自然数是不够用的．例如，人们在建筑房屋、制造工具和

丈量土地等实践中，遇到了大量的测量问题．而在测量中，又往往出现了事先规定的单位长度不能正好量完的情况．于是，只有自然数概念就显得不够用了，便产生了分数概念．

事实上，当人们用一个单位长（如一尺）去量某物体，结果量三次后还余一小部分（不够一尺）．起初，人们就大概地说三个单位（三尺）多一点．但后来生产要求精确度越来越高，上述的近似值就不适应了．这时，人们为了满足实际中精确度的要求，自然想到把单位再缩小一半，作为新单位再去量．若正好量完，问题就解决了若仍不能够正好量完，就再把单位缩小一半，作为更新的单位再去量……这样，便逐渐认识了1/2，1/4等形如$1/n$（$n>1$的自然数）的分数．据史料记载，古代巴比伦人已应用60、60^2、60^3为分母的分数，还编制了用60进位的分数来表示分子是1的分数表．古埃及人遇到像3/4这样的分数便束手无策，但是，他们却能对分子为1的分数进行简单运算．例如，把3/4写成1/2和1/4之和，并把分子不是1的分数统统化成分子是1的分数和，还列出了相应的表．后来，由于实际的需要，才出现了3/4、5/7等形如m/n（$n>1$的自然数，m为自然数）．我国古代数学名著《九章算术》中，不仅记载了分数概念，而且还系统地叙述了分数的算法，这在世界数学史上占有极其重要的地位．由上可见，所谓“分数概念来源于分”是不无道理的．

分数概念的形成，在实践中解决了不能正好量尽的矛盾．在数学上，解决了在自然数集合范围内，除法不能畅通无阻的矛盾．随着生产的发展，人们对数的认识又加深了，引入了“零”的概念．

“零”概念的产生，与采用十进制记数法有着密切的关系．在这种记数法中，每个数所代表的多少，一方面与数字本身有关，另一方面又与它在什么位置上有关．比如“2”在个位上表示“2”，在十位上则表示“20”，若在百位上则表示“200”……这就是所谓要知数之多寡“先识其位”的道理．使用这种记数法，当某一位上一个单位也没有时，由于不能用1、2、3、……、9等数字符号来表示，因而就出现了“空位”．为了表示这样的“空位”，古代人们想了许多办法．印度人大约在六世纪时，曾用“?”表示“空位”，到了九世纪，又将“?”改为“○”．我国早在北宋之后，当用算筹计数时，就用“□”来表示“空位”，以后又改用“0”．这样，“零”的概念便在实际计算的推动下开始形成．

把0做为自然数后，自然数和分数就是算术的基本概念，通称为**算术数**．

有了算术数，人们可以解决一些简单的实际问题．但随着生产和人们认识的发展，又发现，有些实际问题仅用算术数是解决不了的．比如，一些具有相反意义的量，像卖出与买入，盈利与亏损，上升与下降，增加与减少，向南与向北，前进与后退，等等，只有算术数是无法表示的．为了解决这些问题，人们又引进了负数的概念．

据史料记载，中国古代的《九章算术》中的"方程"章里，就引入了正负数的概念，如记有以卖出为正，买入为负；余款为正，欠款为负等．刘徽（约 225—295）在《九章算术注》中明确指出："今两算得失相反，要令正负以名之．"大约在西汉时期（公元前二世纪），就用赤筹表示正，用黑筹表示负；或用三角形截面的算筹表示正，矩形截面的算筹表示负．

负数概念的引入，并非一帆风顺．起初，在解方程中得到负根时，人们要么否认，要么回避．古希腊数学家丢番图（Diophantus，约 246—330）就曾把方程的负数解说成是"荒唐的东西"而加以舍弃．我国唐朝数学家王孝通（六至七世纪）的《缉古算经》，仅讨论正系数的方程，且只求出一个正根．十二世纪，印度数学家巴斯卡拉在解方程时求出负根，但以"不合宜"为由不予承认．十六世纪，法国数学家韦达（F. Viete，1540—1603）也不取负根．然而，在实践的推动下，负数作为正数的补充，解方程时出现负根的情况，逐渐得到人们的公认．

正整数、负整数、正分数、负分数和零，统称为**有理数**．这样，人们对数的认识便从自然数发展到了有理数．

有理数的顺序及其性质

我们规定：$Q^+=\left\{\frac{a}{b}\mid a,\ b\in N\right\}$为正有理数集．

因为在 $ab>0$，$ab=0$，$-ab>0$ 中有且只有一个成立，所以在

$$\frac{a}{b}\in Q^+,\frac{a}{b}=0,-\frac{a}{b}\in Q^+$$

中也有且只有一个成立．

这样可以把 Q 划分为三类：Q^+，$\{0\}$，以及所谓负有理数集 Q^-（Q^- 中任一个元素的负元都在 Q^+ 中）．

有理数的绝对值规定为：

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \begin{cases} \dfrac{a}{b}, & \dfrac{a}{b} \in Q^{+}; \\ 0, & \dfrac{a}{b} = 0; \\ -\dfrac{a}{b}, & \dfrac{a}{b} \in Q^{-} \end{cases}$$

定义 1　若$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$都是有理数，且$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$是正有理数，则称$\frac{a}{b}$大于$\frac{c}{d}$，记为$\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，也说$\frac{c}{d}$小于$\frac{a}{b}$，记为$\frac{c}{d}>\frac{a}{b}$.

由上述定义可知，负有理数小于零，零小于正有理数，负有理数小于正有理数．并且有理数域具有以下性质：

1. 有理数集具有阿基米德性质．

定理 1　若$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}\in Q^{+}$，则存在 $n\in N$，使 $n\cdot\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$.

2. 有理数集具有稠密性．

定理 2　若 α，$\beta\in Q$，$\alpha<\beta$，则有 $\gamma\in Q$，使得 $\alpha<\gamma<\beta$.

3. 有理数集是可列集．

有理数集与自然数集之间可以建立一一对应，所以，有理数集是可列集．

4. 有理数、分数与循环小数的一致性．

既约分数可以化为有限小数或循环小数，有限小数或循环小数都可化为分数．再把整数看成分母为 1 的分数，把整数与有限小数看作是以 0 为循环节的循环小数，那么有理数、分数与循环小数三者就完全一致了．

第三节　实数的形成

对四则运算来说，有理数域已经比较完美了．但是，仅用有理数是不足以精确度量连续量的，于是，在有理数的基础上，人们又引入了无理数．而有理数与无理数统称为**实数**，这样，数的概念便从有理数扩展到了实数．

那么，无理数是怎样引入的呢？

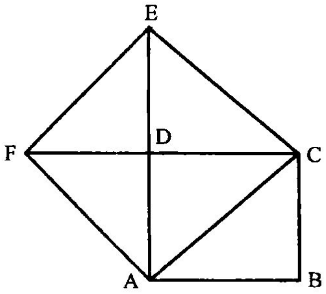
在实际度量中，原先人们认为，只要单位取得充分小，总可以把两个量（如线段长）

同时量尽，或令一个量为单位，则另一个量总可表示成两个正整数 m 与 n 之比：$\frac{m}{n}$. 在这方面，公元前500年左右希腊毕达哥拉斯（Pythagoras）学派曾经错误地认为度量任何量的结果都是两个自然数的比．可是，后来他们发现，像正方形的对角线的长与边长之间就找不到适当小的单位把它们同时量尽．或者说，若令正方形的边长为单位，那么，对角线的长度无法表示成$\frac{m}{n}$（m、n 均为正整数）的形式．实际上，根据勾股定理，正方形一对角线的长与其边长之比不是一个分数，而是$\sqrt{2}$. 亦即正方形边与对角线是两个不可公度线段．通过以下定理可反映出来．

定理　正方形的对角线与它的一条边不可公度．

证明：设正方形 $ABCD$ 的一条对角线为 AC，取 $|AB|=1$，假设把 AB 分为 n 等分，而存在正整数 m，使 AC 是 AB/n 的 m 倍，于是

$$|AC|=\frac{m}{n}(m,n\text{ 互素})$$



以 AC 为边作正方形 $ACEF$（如左图），由于 $\Delta ABC\cong\Delta ACD\cong\Delta ADF\cong\Delta DEF\cong\Delta CED$. 并且 $ABCD$ 的面积为1个面积单位，故 $ACEF$ 的面积为2个面积单位，这就有 $\left(\frac{m}{n}\right)^2=2$，即 $m^2=2n^2$. 由此可知，m 是偶数，设 $m=2k$，并代入上式，得 $n^2=2k^2$，于是 n 也是偶数，这与 m，n 互素矛盾．因此，AC 与 AB 不可公度，定理得证．

由上面的讨论可知，某量与另一被取做单位的量之比，如果用数来表示，其结果则会出现两种情况：第一，当它们是可公度时，其结果是整数或分数，而此分数可表示为有限小数或无限循环小数；第二，当它们是不可公度时，其结果既不是整数、有限小数，亦不是无限循环小数，而是无限不循环小数．可见，表示可公度线段的长度只要用有理数的概念就可以解决．但是，要表示不可公度线段的长度，用有理数的概念就行不通了．不可公度线段的发现，给数学的发展带来了新的问题．为了解决这个矛盾，人们就把整数、有限小数和无限循环小数称为“有理数”，而把无限不循环小数称为“无理数”．这样便引入了“无理数”的概念．无理数在英文中是“irrational number”，是从拉丁文和希腊文直译过