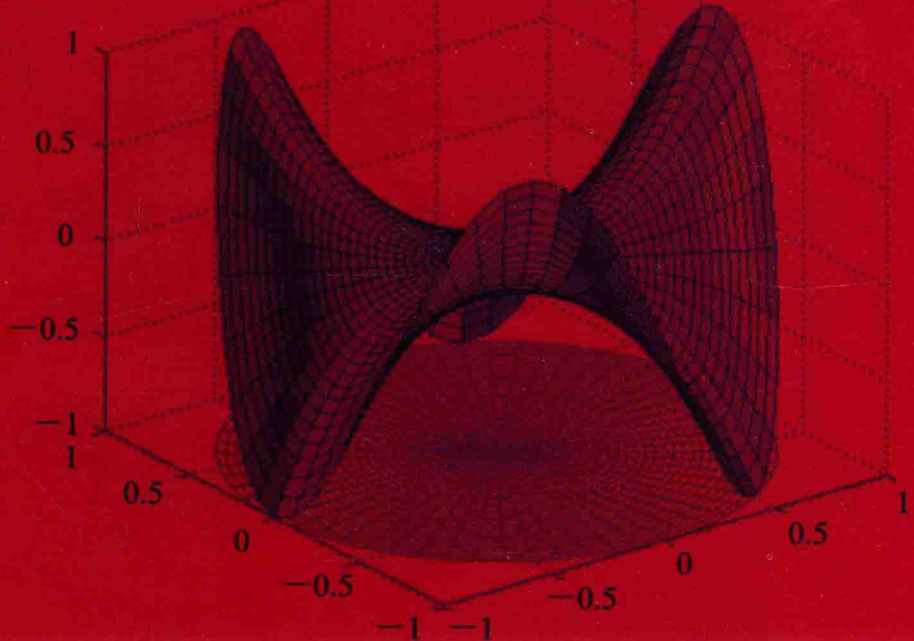
高等学校数学教材系列丛书




# 《复变函数与场论简明教程》习题指导

邓小莺 初萍 王娜 主编
深圳大学复变函数与场论教研组 编

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

# 《复变函数与场论简明教程》习题指导

邓小莺　初萍　王娜　主编

深圳大学复变函数与场论教研组　编



西安电子科技大学出版社

# 内容简介

本书是深圳大学复变函数与场论教研组编写的《复变函数与场论简明教程》一书的配套学习指导书。

本书是在深圳大学“复变函数与场论”课程建设的需求下编写的，内容主要以优秀教材《复变函数与场论简明教程》的课后习题及解答为主，给出了习题的详细解答过程、解题思路、依据和结果，以备学生参考。全书共分为6章，章节顺序及内容编排与教材一致。

本书可作为复变函数与场论课程的教学与学习指导参考书，供工科或理科院校师生参考使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

**《复变函数与场论简明教程》习题指导**/邓小莺，初萍，王娜主编. —西安：西安电子科技大学出版社，2016.3
(高等学校数学教材系列丛书)
ISBN 978-7-5606-3985-7

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①邓… ②初… ③王… Ⅲ. ①复变函数—高等学校—教学参考资料 ②场论—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O174.5 ②O412.3

**中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第025425号**

策划编辑 马晓娟
责任编辑 马晓娟
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话 (029)88242885 88201467　　邮　　编 710071
网　　址 www.xduph.com　　电子邮箱 xdupfxb001@163.com
经　　销 新华书店
印刷单位 陕西天意印务有限责任公司
版　　次 2016年3月第1版 2016年3月第1次印刷
开　　本 787毫米×960毫米 1/16 印张 5.5
字　　数 125千字
印　　数 1～3000册
定　　价 12.00元
ISBN 978-7-5606-3985-7/O

**XDUP 4277001-1**

# 前　言

本书是深圳大学复变函数与场论教研组编写的《复变函数与场论简明教程》(西安电子科技大学出版社，2012.11)一书的配套书，主要以教材为蓝本，内容同步、知识配套，旨在帮助读者理清思路，明晰概念，提高解题能力。

本书的编写得到了深圳大学信息工程学院复变函数与场论教研组老师和 2012 级、2013 级本科生的大力支持，在此表示感谢。本书的编写还得到了西安电子科技大学出版社马晓娟老师的热情支持，在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，错误与不妥之处敬请广大读者批评指教。

编　者

2015 年 11 月

# 目　　录

# 第一章　复数与复变函数

**1.** 求下列复数的实部、虚部、模、辐角及共轭复数。

(1) $2+2i$；

(2) $i+\frac{1-i}{1+i}$；

(3) $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}$；

(4) $i^{10}-4i^{15}+i$。

**分析**　为了求复数的实部、虚部、模、辐角及共轭复数，应先将复数化成 $x+iy$ 的形式（其中 $x$，$y$ 为实数）。

**解**　(1) $z=2+2i\Rightarrow \mathrm{Re}(z)=2$，$\mathrm{Im}(z)=2$

$$|z|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

$$\arg(z)=\arctan\frac{2}{2}+2k\pi=\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$$

$$\bar{z}=2-2i$$

(2) $z=i+\frac{1-i}{1+i}=i+\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=i+\frac{-2i}{2}=0$

$$\mathrm{Re}(z)=0,\ \mathrm{Im}(z)=0$$

$|z|=\sqrt{0^2+0^2}=0$，$\arg(z)$不确定。

$$\bar{z}=0$$

(3) 因为

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

所以

$$z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}=e^{\frac{100\pi}{3}i}+e^{\frac{-100\pi}{3}i}=2\cos\frac{100\pi}{3}=-1$$

$$\mathrm{Re}(z)=-1,\ \mathrm{Im}(z)=0$$

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$$

$$\arg(z)=\pi+2k\pi\quad(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$$

$$\overline{z}=-1$$

(4) $z=\mathrm{i}^{10}-4\mathrm{i}^{15}+\mathrm{i}=-1+5\mathrm{i}$

$$\mathrm{Re}(z)=-1,\ \mathrm{Im}(z)=5$$

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$$

$$\arg(z)=\pi-\arctan 5+2k\pi\quad(k=0,\ \pm1,\ \cdots)$$

$$\overline{z}=-1-5\mathrm{i}$$

**2.** 把下列复数化为三角表示式及指数表示式。

(1) $-6-4\mathrm{i}$;

(2) $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$;

(3) $1+\mathrm{i}\tan\theta$;

(4) $-1$;

(5) $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$;

(6) $(1+\mathrm{i})\left(\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin^2\theta\ (0<\theta<2\pi)$;

(7) $\dfrac{(\cos3\varphi+\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}{(\cos2\varphi-\mathrm{i}\sin2\varphi)^{10}}$。

**解** (1) 由于

$$r=|-6-4\mathrm{i}|=2\sqrt{13}$$

$$\theta=\arctan\frac{2}{3}-\pi$$

因此三角表示式为

$$-6-4\mathrm{i}=2\sqrt{13}\left[\cos\left(\arctan\frac{2}{3}-\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{2}{3}-\pi\right)\right]$$

指数表示式为

$$-6-4\mathrm{i}=2\sqrt{13}\mathrm{e}^{\left(\arctan\frac{2}{3}-\pi\right)\mathrm{i}}$$

(2) 由于

$$r=\left|-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right|=2$$

$$\theta=\pi-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{5\pi}{6}$$

因此三角表示式为

$$-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left[\cos\frac{5\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right]$$

指数表示式为

$$-\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$$

(3) 由于

$$r=|1+\mathrm{i}\tan\theta|=\left|\frac{1}{\cos\theta}\right|=|\sec\theta|$$

$$\arg(1+\mathrm{i}\tan\theta)=\begin{cases}\theta-\pi & \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)\\ \theta & \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \pi+\theta & \left(-\pi<\theta<-\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

因此三角表示式为

$$1+\mathrm{i}\tan\theta=|\sec\theta|[\cos(\theta-\pi)+\mathrm{i}\sin(\theta-\pi)]\quad\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$$

$$1+\mathrm{i}\tan\theta=|\sec\theta|[\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta]\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$1+\mathrm{i}\tan\theta=|\sec\theta|[\cos(\theta+\pi)+\mathrm{i}\sin(\theta+\pi)]\quad\left(-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}\right)$$

指数表示式为

$$1+\mathrm{i}\tan\theta=|\sec\theta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}\quad\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$$

$$1+\mathrm{i}\tan\theta=|\sec\theta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$1+\mathrm{i}\tan\theta=|\sec\theta|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}\quad\left(-\pi<\theta<-\frac{\pi}{2}\right)$$

(4) 由于

$$r=1$$

$$\theta=\arctan 0+\pi=\pi$$

因此三角表示式为

$$-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$$

指数表示式为

$$-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$$

(5) 由于

$$1-\cos\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

$$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

所以

$$\begin{aligned}1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi &= 2\sin^2\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\\ &= 2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\end{aligned}$$

根据三角诱导公式，三角表示式为

$$1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)$$

指数表示式为

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi-\varphi}{2}\mathrm{i}}$$

(6) 由于原式可以化简成：

$$2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\theta=1-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

所以求解同(5)的求解过程。

(7) 由于

$$\cos3\varphi+\mathrm{i}\sin3\varphi=\mathrm{e}^{3\varphi\mathrm{i}}$$
$$\cos2\varphi-\mathrm{i}\sin2\varphi=\mathrm{e}^{-2\varphi\mathrm{i}}$$

所以指数表示式为

$$\begin{aligned}\frac{(\cos3\varphi+\mathrm{i}\sin3\varphi)^3}{(\cos2\varphi-\mathrm{i}\sin2\varphi)^{10}} &= \frac{(\mathrm{e}^{3\varphi\mathrm{i}})^3}{(\mathrm{e}^{-2\varphi\mathrm{i}})^{10}}=\frac{\mathrm{e}^{9\varphi\mathrm{i}}}{\mathrm{e}^{-20\varphi\mathrm{i}}}=\mathrm{e}^{29\varphi\mathrm{i}}\\ &=\cos29\varphi-\mathrm{i}\sin29\varphi\end{aligned}$$

三角表示式为$\frac{(\cos3\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^3}{(\cos2\varphi-\mathrm{i}\sin2\varphi)^{10}}$。

**3.** 指出复数 $z$ 与复数 $\mathrm{i}z$ 的关系。

**解**　令 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\mathrm{i}z=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}\cdot r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r\mathrm{e}^{(\theta+\frac{\pi}{2})\mathrm{i}}$$

因此复数 $z$ 与 $\mathrm{i}z$ 为模相等，辐角主值相差$\frac{\pi}{2}$的两个复数。

**4.** 求下列各式的值。

(1) $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^8$；

(2) $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^4$；

(3) $\sqrt[6]{-1}$；

(4) $(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$。

**解** (1)
$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^8=\left(\frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\right)^8=\left(\frac{2\mathrm{i}}{2}\right)^8=1$$

(2)
$$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^4=(2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\mathrm{i}})^4=16\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$$

(3) 因为

$$\sqrt[6]{-1}=\sqrt[6]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\quad(k=0,1,\cdots,5)$$

所以其值为

$$w_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i},\ w_1=\mathrm{i}$$

$$w_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$w_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$w_4=-\mathrm{i}$$

$$w_5=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

(4) 因为

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

所以

$$(1-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\quad(k=0,1,2)$$

故其值为

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

**5.** 当$|z|\leqslant 1$时，求$|z^n+a|$的最大值，其中$n$为正整数，$a$为复数。

**解**　因为

$$|z^n| = |z|^n$$

所以

$$|z^n+a|\leqslant|z^n|+|a|=|z|^n+|a|\leqslant 1+|a|$$

当且仅当$z^n$与$a$同向且$|z|=1$时等号成立，故$|z^n+a|$的最大值为$1+|a|$。

**6.** 将下列坐标变换公式写成复数形式。

(1) 平移公式$\begin{cases}x=x_1+a_1\\ y=y_1+b_1\end{cases}$；

(2) 旋转公式$\begin{cases}x=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha\\ y=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha\end{cases}$。

**解**　(1) 设$z=x+\mathrm{i}y$，$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$a=a_1+\mathrm{i}b_1$，则平移公式$\begin{cases}x=x_1+a_1\\ y=y_1+b_1\end{cases}$的复数形式为$z=z_1+a$。

(2) 设$z=x+\mathrm{i}y$，则

$$\begin{aligned}z=x+\mathrm{i}y&=(x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha)+\mathrm{i}(x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha)\\&=(x_1+\mathrm{i}y_1)\cos\alpha+\mathrm{i}(x_1+\mathrm{i}y_1)\sin\alpha\\&=(x_1+\mathrm{i}y_1)(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)\\&=(x_1+\mathrm{i}y_1)\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}}\end{aligned}$$

令$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，即旋转公式的复数形式为$z=z_1\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{i}}$。

**7.** 试利用$1+z+z^2+\cdots+z^n=\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}(z\neq 1)$推导：

(1) $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$；

(2) $\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta=\dfrac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$。

**证明**　因为

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\ (z\neq 1)$$

所以设定 $z=e^{i\theta}$，$\theta\neq 0$，把 $z$ 代入已知等式，得到：

$$1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+e^{i3\theta}+\cdots+e^{in\theta}=\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

等式左边为

$$1+\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cdots+\cos n\theta+i[\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta+\cdots+\sin n\theta]$$

等式右边为

$$\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}=\frac{1-\cos[(n+1)\theta]-i\sin[(n+1)\theta]}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$$

$$=\frac{2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\left[\sin\frac{(n+1)\theta}{2}-i\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\right]}{2\sin\frac{\theta}{2}\left[\sin\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\right]}$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}e^{i\frac{(n+1)\theta-\pi}{2}}}{\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta-\pi}{2}}}$$

$$=\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right]$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta+\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}+i\,\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

所以原题中(1)和(2)得证。

**8.** 设 $n$ 为自然数，且 $x_n+iy_n=(1+i\sqrt{3})^n$，其中 $x_n$，$y_n$为实数。证明：

$$x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}=4^{n-1}\sqrt{3}$$

**证明** 因为

$$x_n+iy_n=(1+i\sqrt{3})^n=\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]^n=2^n\cdot e^{\frac{n\pi}{3}i}$$

所以

$$x_{n-1}+iy_{n-1}=2^{n-1}\cdot e^{\frac{(n-1)\pi}{3}i}$$

$$\overline{x_{n-1}+iy_{n-1}}=x_{n-1}-iy_{n-1}=2^{n-1}\cdot e^{\frac{-(n-1)\pi}{3}i}$$

又因为

$$
\begin{aligned}
(x_n+\mathrm{i}y_n)(x_{n-1}-\mathrm{i}y_{n-1}) &= x_nx_{n-1}+y_ny_{n-1}+\mathrm{i}(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}) \\
&= 2^n \cdot \mathrm{e}^{\frac{n\pi}{3}\mathrm{i}} \cdot 2^{n-1} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(n-1)\pi}{3}\mathrm{i}} \\
&= 2^{2n-1} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1} &= \mathrm{Im}(2^{2n-1} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}) \\
&= \mathrm{Im}\left[2^{2n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \\
&= 2^{2n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= 4^{n-1}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

命题得证。

**9.** 设 $z_1z_2z_3$ 三点适合条件 $z_1+z_2+z_3=0$，$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$。证明：$z_1z_2z_3$ 是内接于单位圆 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点。

**证法 1**　因为

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$$

即 $z_1$，$z_2$，$z_3$ 在半径为 1 的圆上，所以，只需证 $\triangle z_1z_2z_3$ 为正三角形，即 $|z_2-z_1|=|z_3-z_2|=|z_1-z_3|=\sqrt{3}$ 即可。

因为

$$z_1+z_2+z_3=0$$

所以

$$|z_1+z_2|^2=|-z_3|^2=1$$

又因为

$$
\begin{aligned}
|z_2+z_1|^2 &= (z_2+z_1)\overline{(z_2+z_1)} \\
&= (z_2+z_1)(\overline{z_2}+\overline{z_1}) \\
&= z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2} \\
&= |z_2|^2+|z_1|^2+(z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}) \\
&= 2+(z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

所以

$$(z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2})=-1$$

因为

$$\begin{aligned}|z_2-z_1|^2&=(z_2-z_1)\overline{(z_2-z_1)}=(z_2-z_1)(\overline{z_2}-\overline{z_1})\\&=z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}-z_2\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}\\&=|z_2|^2+|z_1|^2-(z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2})\\&=2-(z_2\overline{z_1}+z_1\overline{z_2})\\&=2-(-1)\\&=3\end{aligned}$$

同理可证得

$$|z_3-z_2|^2=|z_1-z_3|^2=3$$

故

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_2|=|z_1-z_3|=\sqrt{3}$$

命题得证。

**证法 2** 因为

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$$

即 $z_1$，$z_2$，$z_3$ 在半径为 1 的圆上，所以只需证 $\triangle z_1z_2z_3$ 为正三角形，即任一夹角为 60°即可。

因为

$$z_1+z_2+z_3=0$$

所以

$$|z_1-(-z_2)|=|-z_3|=|z_2|=|z_1|=1$$

即以点 $z_1$，$-z_2$ 及原点 $O$ 为顶点的三角形为等边三角形。

同理，以点 $-z_2$，$z_3$ 及原点 $O$ 为顶点的三角形也为等边三角形，如图 1-1 所示。

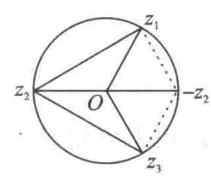


图 1-1

所以

$$\angle z_3Oz_1=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\angle z_1z_2z_3=\frac{1}{2}\angle z_3Oz_1=\frac{\pi}{3}$$

命题得证。

**10.** 证明三个复数 $z_1$，$z_2$，$z_3$ 成为等边三角形顶点的充要条件是它们适合等式：

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$$

**证明** (1) 证明其充分性。

因为

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1\Leftrightarrow\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

所以

$$|z_3-z_1|^2=|z_1-z_2||z_2-z_3| \quad ①$$

又因为

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}-1=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-1\Rightarrow\frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}$$

所以

$$|z_2-z_3|^2=|z_1-z_2||z_3-z_1| \quad ②$$

①式与②式相除，得

$$|z_3-z_1|^3=|z_2-z_3|^3$$

即

$$|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$$

代回①式可得

$$|z_2-z_3|=|z_1-z_2|$$

所以三边相等，即$\triangle z_1z_2z_3$为等边三角形，得证。

(2) 证明其必要性。

若$\triangle z_1z_2z_3$为等边三角形，则任一边可通过旋转$\frac{\pi}{3}$得到另一边。以$z_1z_2$为基边，假设绕$z_1$旋转$\frac{\pi}{3}$得到$z_1z_3$，则

$$(z_2-z_1)e^{\frac{\pi}{3}i}=z_3-z_1$$

所以

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=e^{\frac{\pi}{3}i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

两边平方化简可得

$$z_1{}^2+z_2{}^2+z_3{}^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$$

命题得证。

**11.** 设$\omega$是1的$n$次方根，但$\omega\neq1$，证明$\omega$满足方程$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$。

**解** 依题意$\omega^n=1$，所以$1-\omega^n=0$。因为

$$1-\omega^n=(1-\omega)\cdot(1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1})=0 \text{ 且 } \omega\neq1$$

所以

$$1-\omega\neq0$$

即

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$$

命题得证。

**12.** 试证：如果复数 $a+ib$ 是实系数方程 $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$ 的根，那么 $a-ib$ 也是它的根。

**解** 设 $z=a+\mathrm{i}b$，$f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$，则 $f(z)=0$。

因为 $f(z)$是实系数多项式，根据共轭复数的第Ⅴ条性质（见课本 p11），得$\overline{f(z)}=f(\overline{z})$。

又因为 $f(z)=0$，故

$$\overline{f(z)}=0$$

$$f(z)=\overline{f(z)}=f(\overline{z})=0$$

所以

$$f(a+b\mathrm{i})=f(\overline{a+b\mathrm{i}})=f(a-b\mathrm{i})=0$$

得证 $a-ib$ 也是方程的根。

**13.** 试证：

(1) $a+\mathrm{i}b$、0 和$\dfrac{1}{-a+\mathrm{i}b}$三点共线；

(2) $a+\mathrm{i}b$、$\dfrac{1}{-a+\mathrm{i}b}$、$-1$、1 四点共圆周($b\neq 0$)。

**证明** (1) 设

$$z_1=0,\ z_2=a+\mathrm{i}b$$

$$z_3=\frac{1}{-a+\mathrm{i}b}=\frac{a+\mathrm{i}b}{(-a+\mathrm{i}b)(a+\mathrm{i}b)}=-\frac{a+\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$$

则

$$\overrightarrow{z_1z_2}=a+\mathrm{i}b,\ \overrightarrow{z_1z_3}=-\frac{a+\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$$

所以

$$\overrightarrow{z_1z_3}=-\frac{1}{a^2+b^2}\cdot\overrightarrow{z_1z_2}$$

即 $a+\mathrm{i}b$、0 和$\dfrac{1}{-a+\mathrm{i}b}$三点共线。

(2) 设

$$z_1=0,\ z_2=a+\mathrm{i}b$$

$$z_3=\frac{1}{-a+\mathrm{i}b}=\frac{a+\mathrm{i}b}{(-a+\mathrm{i}b)(a+\mathrm{i}b)}=-\frac{a+\mathrm{i}b}{a^2+b^2}$$

$$z_4=-1,\ z_5=1$$

在复平面中，线段 $z_4z_5$ 过原点(0，0)。由(1)可知，线段 $z_2z_3$ 也过原点，故线段 $z_2z_3$ 与线段 $z_4z_5$ 相交于原点。有

$$|z_1z_4|=1,\ |z_1z_5|=1,\ |z_1z_2|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$|z_1z_3|=\sqrt{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

所以 $|z_1z_4|\cdot|z_1z_5|=|z_1z_2|\cdot|z_1z_3|$。根据相交弦定理的逆定理，命题得证。

**14.** 求下列方程所表示的曲线(其中 $t$ 为实参数)。

(1) $z=(1+\mathrm{i})t$；

(2) $z=t+\frac{1}{t}\mathrm{i}\ (t\neq0)$；

(3) $z=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t\ (a>0,\ b>0$，且 $a$、$b$ 为实常数)；

(4) $z=a+re^{\mathrm{i}t}$($r>0$ 为实常数，$a$ 为复数)。

**解** (1) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$x+\mathrm{i}y=t+\mathrm{i}t$$

即

$$x=t,\ y=t$$

所以其表示的曲线为 $y=x$。

(2) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$x+\mathrm{i}y=t+\frac{1}{t}\mathrm{i}$$

即

$$x=t,\ y=\frac{1}{t}$$

所以其表示的曲线为 $y=\frac{1}{x}$，$x\neq0$。

(3) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$x+\mathrm{i}y=a\cos t+\mathrm{i}b\sin t$$

即

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t$$

所以其表示的曲线为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$。

(4) 设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$x+\mathrm{i}y=a+r(\cos t+\mathrm{i}\sin t)$$