

柳婵娟
邹海林
钱旭
著

图像处理的 几何变分与多尺度方法

IMAGE PROCESSING
GEOMETRIC VARIATIONAL
AND MULTISCALE METHOD

清华大学出版社



柳婵娟
邹海林
钱旭
著

图像处理的 几何变分与多尺度方法

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书运用泛函分析、小波多尺度分析、几何变分法、偏微分方程和最优化方法等理论,结合图像几何结构特征和人的视觉系统特性,对图像去噪与复原、图像增强等问题进行分析和探讨。研究非线性扩散模型阈值参数和时间估计与优化问题;将基于梯度的图像频率概念引入全变分,研究基于图像梯度频率的全变分正则化图像去噪与复原问题;将张量理论与全变分正则化方法结合,提出基于张量投票与全变分正则化结合的纹理图像去噪与复原模型;将小波变换局部化特性引入图像扩散滤波,研究基于小波多尺度分析的图像非线性扩散滤波与增强问题。

本书适合作为高等院校电子信息类和计算机类专业高年级本科生、研究生的教学用书,同时,可作为相关专业领域人员学习数字图像处理的参考用书。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

图像处理的几何变分与多尺度方法/柳婵娟,邹海林,钱旭著. —北京:清华大学出版社,2016(2016.9重印)

ISBN 978-7-302-43319-4

I. ①图… II. ①柳… ②邹… ③钱… III. ①图像处理 IV. ①TP391.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 052624 号

责任编辑:白立军

封面设计:傅瑞学

责任校对:李建庄

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:虎彩印艺股份有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm

印 张:12.25

字 数:239 千字

版 次:2016 年 7 月第 1 版

印 次:2016 年 9 月第 2 次印刷

印 数:601~1100

定 价:49.00 元

产品编号:065906-01

前 言

图像是信息传递的主要媒介和人类视觉的基础。随着计算机科学技术的发展,图像处理已广泛应用于宇宙空间探测、地质勘探、遥感遥测、生物信息工程、工业检测与探伤、机器视觉、人工智能与模式识别、多媒体与虚拟现实技术及信息可视化等诸多领域,在国防建设、经济和社会发展中发挥着巨大而重要作用。

图像在获取和传输过程中,由于受到成像设备与外部环境等噪声的干扰,不可避免地产生图像降质(或称为图像退化),这给以后的图像分析和理解带来困难。底层图像处理的主要任务就是从这些退化图像中恢复出原始的真实图像,并提取出其中感兴趣的特征和信息。

图像处理的主要任务包括以下3个方面。

(1) 运用数学理论和其他技术手段,提高图像的视觉效果,例如,通过图像的亮度、彩色、对比度等一系列数学变换,去除图像中的噪声,突出所需要的某些特征信息。

(2) 提取图像中所包含的某些有用的特征,包括频率特征、灰度特征、颜色特征、边界与区域特征、纹理与几何形状特征等,为后续的图像理解、分析与应用以及机器视觉研究奠定基础。

(3) 利用信息论与通信理论技术,研究图像信息的编码、压缩、存储和传输。

本书主要介绍运用泛函分析、小波多尺度分析、几何变分和偏微分方程等理论和方法,研究图像去噪与复原、图像增强等问题。本书的主要内容如下。

(1) 分析和研究以P-M方程为代表的非线性扩散方程阈值参数选择和扩散自动终止时间的确定问题,构建P-M非线性扩散方程阈值参数和扩散时间尺度估计与优化方法。针对非线性扩散模型中存在的“阶梯效应”和容易模糊边缘、细节等问题,将小波多尺度分析引入非线性扩散方程,研究并提出一种基于小波多尺度和含有保真项的图像非线性扩散滤波模型,使该模型能结合图像的局部几何结构特征,实施异质扩散,实现去噪的同时很好地保护边缘和细节。

(2) 分析和研究全变分正则化去噪问题。着重探讨以全变分模型为代表的几种图像变分正则化去噪的基本原理、特点及存在的问题。针对传统变分模型存在模糊边缘和存

在块效应问题,研究并提出一种新的基于图像梯度频率的全变分正则化去噪与复原模型。通过与已有模型的数值实验结果比较分析表明,该模型比其他变分模型能够更准确、精细地刻画图像的平滑域和边缘,在去除图像噪声的同时,又能保护边缘,克服其他变分模型产生的阶梯效应和过平滑现象。

(3) 将张量理论与全变分正则化结合用于纹理图像去噪。图像的局部结构信息并不仅仅表现为图像的梯度,梯度不能精细地刻画纹理和角点,同时,在噪声干扰的情况下,由梯度算子所估计得到的方向信息是不准确的,因此过度依赖梯度扩散滤波,难免会模糊图像边缘和细节特征。基于此,本书把张量投票引入全变分模型,根据结构张量及其特征值,构造了一个图像结构显著性描述算子,以代替变分正则化模型中的拉格朗日乘子,使其能根据图像不同区域的结构特征,去调节变分模型中正则项和保真项的作用,建立一种基于频率的张量投票与全变分能量最小化结合的纹理图像去噪新方法,并通过实验验证该模型的优越性。

(4) 研究将小波多尺度分析与变分偏微方程结合应用于图像非线性扩散滤波和增强问题。在分析基于小波多尺度、变分和偏微分方程用于图像滤波和增强处理的基础上,结合小波变换的多分辨率特性,提出一个基于小波变换的图像非线性扩散增强模型,并从实验上证明该模型的稳健和有效。

研究生厉彩霞参与了算法设计及实现工作。

本书的相关内容研究和出版得到国家自然科学基金(No.61170161)的资助。

感谢清华大学出版社及责任编辑为此书出版付出的辛勤劳动。

对书中存在的不足,恳请读者提出批评指正。

作者邮箱: luckycj80@sina.com。

2016年5月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 数字图像处理技术概述	1
1.2 变分与偏微分方程理论在图像处理中的应用及研究现状	6
1.2.1 基于变分与偏微分方程的图像去噪	7
1.2.2 基于变分与偏微分方程的图像分割	11
1.2.3 基于变分与偏微分方程的图像修复	14
1.2.4 基于变分与偏微分方程的图像增强	17
1.2.5 基于变分与偏微分方程的图像放大	18
参考文献	19
第 2 章 图像处理的泛函及几何变分理论基础	27
2.1 实分析与泛函分析基础	27
2.2 最优化理论与凸分析	28
2.3 有界变差函数空间	31
2.4 反问题与正则化	34
2.4.1 问题适定性	34
2.4.2 反问题和病态	35
2.4.3 不适定问题	36
2.4.4 正则化	39
2.5 曲线与曲面几何	40
2.5.1 R^2 曲线的几何性质	40
2.5.2 R^3 曲面的几何性质	42
2.6 图像空间	46
2.7 变分法及其基本引理	47
2.7.1 变分法基本引理	47

2.7.2	偏微分方程	51
2.7.3	梯度下降流法	53
	参考文献	54
第 3 章	图像非线性扩散滤波	55
3.1	引言	55
3.2	图像中的噪声及特点	56
3.3	各向同性扩散	59
3.4	各向异性扩散	62
3.4.1	P-M 扩散模型	64
3.4.2	CLMC 模型	69
3.4.3	林石算子	69
3.4.4	MCM 模型	70
3.4.5	张量扩散模型	71
3.4.6	高阶偏微分方程模型	72
3.4.7	其他改进模型	73
3.5	P-M 方程参数的估计与优化	74
3.5.1	梯度阈值估计	75
3.5.2	扩散终止时间估计	79
3.5.3	数值实验及结果分析	81
3.6	基于小波变换的图像非线性扩散滤波	83
3.6.1	带有保真项的非线性小波扩散模型	83
3.6.2	数值实验与结果分析	84
3.7	本章小结	87
	参考文献	87
第 4 章	全变分正则化图像去噪与复原	90
4.1	引言	90
4.2	全变分正则化图像去噪与复原	91
4.2.1	TV- L^2 模型	92
4.2.2	ROF TV 模型	92

4.2.3	TV- L^p 模型	95
4.2.4	TV-G 模型	96
4.2.5	TV- L^1 模型	97
4.2.6	其他高阶 TV 模型	100
4.2.7	基于 TV 的乘性噪声去除	106
4.3	基于图像频率的全变分正则化去噪	107
4.3.1	基于梯度的图像频率	107
4.3.2	基于图像频率的全变分正则化去噪	108
4.3.3	模型数值计算	109
4.3.4	数值实验及结果分析	110
4.4	基于图像频率的变分正则化去噪模型的改进	114
4.5	小波域图像复原变分正则化方法	119
4.5.1	引言	119
4.5.2	小波模值及权重测度	120
4.5.3	基于小波域的图像复原模型	121
4.5.4	小波基的选择	122
4.5.5	实验结果分析	124
4.6	本章小结	129
	参考文献	130

第 5 章	基于结构张量的图像扩散滤波	135
5.1	引言	135
5.2	结构张量	136
5.3	扩散张量	138
5.3.1	边缘增强张量扩散	139
5.3.2	相干增强张量扩散	140
5.4	基于张量投票的纹理图像去噪与复原	141
5.4.1	图像局部结构特征相干性函数	141
5.4.2	张量投票与全变分正则化图像去噪与复原	142
5.4.3	数值仿真实验	143
5.5	本章小结	148

参考文献	149
第 6 章 基于变分偏微分方程的图像增强	152
6.1 引言	152
6.2 空间域增强	153
6.2.1 直方图均衡化	153
6.2.2 直方图规定化	156
6.3 频域增强	158
6.3.1 频域滤波	158
6.3.2 多尺度域增强	162
6.4 基于变分偏微分方程的图像增强	164
6.4.1 基于变分偏微分方程的直方图均衡化图像增强	164
6.4.2 基于变分框架的 Retinex 图像增强	165
6.4.3 梯度场图像增强	167
6.4.4 基于非线性扩散的图像增强	168
6.5 基于多尺度和变分的图像增强	170
6.5.1 图像局部结构小波能谱描述算子	170
6.5.2 数值实验及结果分析	171
6.5.3 小波域图像增强 WFAB 模型	174
6.5.4 数值实验及结果分析	175
6.6 本章小结	177
参考文献	177
第 7 章 总结与展望	181
7.1 研究工作总结	181
7.2 未来研究工作展望	183
附录 A 本书中使用的数学符号	185
附录 B 本书中使用的缩略词表	187

第1章 绪论

图像是信息传递的主要媒介和人类视觉的基础,图像信息处理技术是人们获取、传递视觉信息的必要技术手段。在人类社会发展的历史进程中,没有哪一个时代曾见证过图像信息处理技术对社会、经济、科学技术以及人们的工作、学习和生活所产生如此深远的影响。今天,随着计算机科学技术的发展,图像处理已广泛应用于空间探测、地质勘探、遥感遥测、生物医学、工业探伤、安全检测、视觉心理学、人工智能、模式识别与决策、多媒体与文化产业等诸多领域,在国防建设、经济和社会发展中发挥着巨大而重要的作用。可以说,作为信号处理的一个分支,图像处理与理解已经成为现代电子信息科学技术的主要技术领域之一,对现代经济和社会发展及人们的工作生活产生着重大而深刻的影响。

本章将从图像处理技术的发展应用及其研究现状入手,介绍现代数字图像处理技术的主要理论和技术方法。着重介绍几何变换与偏微分方程理论在图像复原、图像分割、图像修复、图像增强及图像放大等图像处理领域的应用以及研究进展。

1.1 数字图像处理技术概述

图像处理的起源可追溯至世界上的第一幅照片的诞生。根据历史资料记载,人类史上的第一幅照片(见图 1.1),是由法国发明家 Joseph Nicéphore Niépce 于 1826 年在其家乡 Le Gras 拍摄的。

数字图像处理(Digital Image Processing, DIP)起源于 20 世纪 20 年代,当时通过海底电缆从英国伦敦到美国纽约传输了一幅数字图像(见图 1.2)。采用的图像处理技术主要是压缩技术。按照当时的通信条件,如果不压缩,传输这样一幅图像要用一个星期时间,但经过压缩后图像传输只用了 3 个小时。



图 1.1 世界上的第一幅照片

1964年,美国的喷气推进实验室处理了由太空船“徘徊者七号”发回的月球照片(见图1.3),这标志着数字图像处理成为20世纪60年代随着计算机技术的发展以及傅里叶变换理论的建立而发展起来的一个新兴技术领域。



图 1.2 1921 年经编码压缩后用
电报打印机打印的图像

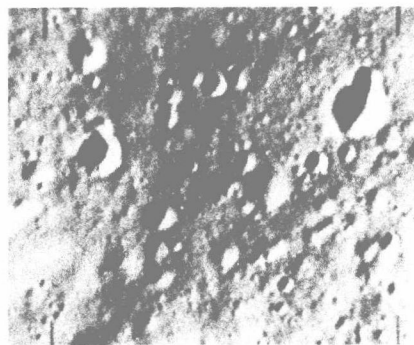


图 1.3 “徘徊者七号”发回的月球照片

数字图像处理是指利用计算机对经济建设、社会发展、人类生活及科学研究中可视化信息的数字化处理过程。目前已成为计算机科学、信息科学、生物、医学等领域各个学科之间学习和研究的对象,特别是在医学领域,许多技术已给人类带来了巨大的利益^[1]。站在应用的视角看,图像处理的主要目的大致包括3个方面。

(1) 运用数学理论和其他技术手段,增强图像的视觉效果。例如,通过对图像的亮度、彩色、对比度等一系列数学变换,抑制图像中的噪声干扰,突出所需要的某些特征信息,提高图像视觉质量。

(2) 提取图像中所包含的某些有用的特征信息,包括频率特征、灰度特征、颜色特征、边界与区域特征、纹理与几何形状特征等,为后续的图像理解、分析与应用以及机器视觉研究奠定基础。

(3) 利用信息论与通信技术,研究图像信息的编码、压缩、存储和传输的理论与方法,提高图像存储、传输的效率和安全性。

图像在获取和传输过程中,因受成像设备、外部环境及其他噪声的干扰,不可避免地会产生图像降级,也称为图像退化^[2],这给后续的图像分析、理解、识别和分类研究以及图像的应用带来困难。因此,对退化图像的复原研究就成为图像信息处理与分析的一个非常重要的基础性课题。导致图像退化的因素主要是在图像的获取及其存储、传输过程中产生的:在图像获取过程中,成像系统调焦不准,镜头与目标之间存在相对运动,曝光时

间不当,成像环境恶劣、大气湍流影响等,都是造成图像退化的主因。另外,在图像信号存储和传输过程中,会受到外界噪声污染,影响画质。根据噪声与图像信息的关系,噪声分为加性噪声与乘性噪声。图像处理的主要就是从这些退化图像中恢复出原始的真实图像,并提取出图像中所需要的特征和信息。

通常意义下,图像处理主要包括底层图像处理、图像分析和图像理解3个层次。底层图像处理是图像分析和理解的基础,主要是在图像的像素级进行处理,强调图像的变换及其之间的相互转换。广义上图像处理泛指各种图像技术,但狭义上主要是指对图像进行各种变换以改善图像的视觉效果,为其后的图像分析和理解奠定基础^[2]。图像处理主要包括图像滤波、图像复原、图像边缘检测、图像分割、图像增强、特征选择、目标运动检测与跟踪以及可视化技术。经过这些处理后,输出图像的质量得到提升,既改善了图像的视觉效果,又便于计算机对图像进行分析、处理和识别。图1.4是图像处理三层次模型及应用领域。

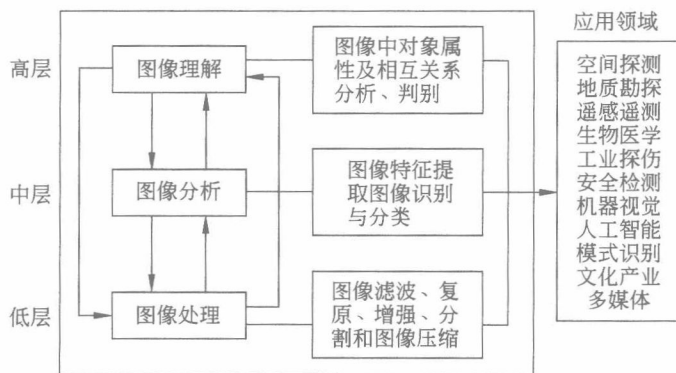


图 1.4 图像处理三层次模型及应用领域

传统的数字信号处理往往基于信号的平稳性或假设的高斯随机过程,因此,一般认为线性算法是最优的处理方法。然而,实际的数字信号和自然图像中往往存在一些非平稳的几何结构,如边缘、角点、纹理等,它们具有重要的视觉意义,并且很难利用简单的高斯过程来进行描述。有效的图像建模对于后期图像处理算法的设计及性能具有至关重要的作用。因此,数字图像处理逐渐由线性算法向非线性算法过渡。经过二十多年的发展,研究者从多个角度建立起现代数字图像处理的理论和方法。目前,底层图像处理方法,从运用的数学理论与方法看,可分为:基于概率和统计学的随机建模方法,以小波变换和多尺

度几何分析理论为代表的计算调和与分析方法,以非线性扩散、全变差、水平集为主要内容的偏微分方程方法三大类。关于上述三类方法的详细介绍可参阅文献[3]。

(1) 基于概率和统计学的随机建模方法。由于图像的成像和噪声的形成过程本身就是一个不确定的随机过程,基于概率和统计学的处理分析方法成为首选。另外,一幅二维图像域可看作一个随机场,依据随机场理论可以对图像域进行建模,通过把图像中各个像素点的灰度值看作是具有一定概率分布的随机变量,分析和研究图像中的像素与其相邻像素的条件分布,以建立起描述图像统计特征的模型。随机建模方法主要有马尔可夫随机场(Markov Random Field, MRF)、隐马尔可夫随机场(Hidden Markov Random Field, HMRF)、高斯混合(Gaussian Mixture)模型等^[4-9]。随机建模方法因其坚实的理论基础而得到广泛的应用,但其中参数的确定过程复杂,稳健性较差^[3,8],算法的计算量较大,并且随着图像容量的增大或噪声的增多而使算法的运算量进一步加大。

(2) 以小波变换和多尺度几何分析理论为代表的计算调和与分析方法。诞生于20世纪80年代的小波分析方法最初起源于信号处理,因其良好的时频局域性和多分辨率特性,以及对含点奇异分片光滑函数的最优逼近性,而得到深入研究和广泛应用。在图像恢复、图像分割、目标识别等领域都有小波分析成功应用的范例^[10-14]。然而还存在一些有待于研究探讨的问题:一是图像的底层和中层处理问题,比如降质图像的恢复,不同传感器图像的分割,复杂背景下小目标特征的抽取等;二是在高维情形下,由于函数的奇异性不仅仅是点奇异,更多地表现为线奇异、面奇异,因此,小波不再是最优的。为有效表征高维函数的非点奇异性,以脊波(ridgelet)、曲线波(curvelet)、轮廓波(contourlet)、波原子(wave atom)等为代表的多尺度几何分析理论(Multiscale Geometric Analysis, MGA)应运而生^[15-34],为图像处理开辟了一个重要研究路线。多尺度几何分析不仅能对信号进行最稀疏表达,而且能充分利用原函数的几何正则性。同时具有多尺度和多方向特性,能很好地处理高维信号的线奇异和面奇异特征。

与傅里叶变换和小波变换相比,尽管多尺度几何分析理论用于图像处理的效果有了明显的提高,但还存在一些需要进一步研究和探索的问题:例如,多尺度几何分析理论对于图像经过多尺度变换后,准确有效区分图像信息与噪声尚存在着一定的难度,如何构建更稳健、更适用、更便捷的多尺度几何分析模型与实现算法是多尺度图像处理面临的一个重要难点问题;图像噪声去除过程中阈值函数对去噪效果的影响很大,如何根据不同的应用目的和要求建立合适的阈值化函数显得尤为重要;多尺度几何分析方法对于图像局部信息描述和捕捉相对较好,但对于全局信息的刻画与获取尚存不足;图像处理所涉及的多尺度几何分析模型中的许多算法是非自适应的,需要经验干预。就目前图像处理领域看,

多尺度几何分析理论尚处于发展和完善阶段,有很多理论问题亟待进一步深究。

(3) 以非线性扩散、全变差、水平集为代表的偏微分方程方法。在计算机视觉和图像处理方面,起源于20世纪80年代末的基于几何变分法(calculus of variations)和偏微分方程(Partial Differential Equation, PDE)的图像处理技术,综合利用了泛函分析、变分计算和偏微分方程、微分几何、矢量与张量分析、计算流体力学、有界变分空间(bounded variation space)和粘性解(viscosity solution)理论等现代数学工具。它的基本思想是在一个偏微分方程模型中进化一幅图像、一条曲线或一个曲面,通过求解这个偏微分方程来得到期望的结果。因其局部自适应能力强,模型的灵活性和稳定性好,便于与其他理论结合及模型拓展方便等特点,在图像处理和视觉分析领域得到广泛应用。

对比其他的图像处理技术,基于变分法和偏微分方程的方法有许多优势。

(1) 变分偏微分方程方法具有较强的局域自适应性。在已有的频域处理方法中,傅里叶变换方法缺乏时频定位特性,因此它只适用于平稳信号处理。同样,小波变换虽然解决了时频分离的缺点,但是简单的尺度变化不能很好地适应图像处理精细化要求。变分偏微分方程方法给出了分析图像的连续模型,因而使得局部非线性分析易于实现^[10]。

(2) 基于变分偏微分方程的图像处理方法,可以将图像处理与物理过程紧密结合,给出更加直观的物理学描述。并且还可以直接处理表征图像几何结构的特征量,例如梯度、曲率、水平集等。

(3) 良好的数学分析理论基础是变分偏微分方程用于图像处理的前提条件。由于变分法和偏微分方程属于数学分析的一部分,因此,保障了该类方法在理论分析和数值计算上有一套完善的体系基础,从而为变分偏微分方程用于图像处理问题的理论证明、算法实现及实验提供了完备的依据^[35]。通过设定偏微分方程的初始条件以及扩散系数可以保证图像域内模型解的存在性、唯一性和稳定性。此外,在建立基于变分偏微分方程图像处理的模型之后,比较容易引进理论分析来验证模型的合理性,这同时也为新模型、新方法的提出提供了切入点。

(4) 变分偏微分方程算法具有高度灵活性。由于变分方法相对比较灵活,往往可以在此基础上引进其他的技术来提高图像处理效果,例如,统计分析、小波以及信息论的相关技术都可以适时地引入变分模型。同时,由于变分偏微分方程用于图像处理可以很好地保持边界和纹理等细节信息,解决了很多传统方法所无法解决的问题和困难。因此,越来越多的人开始关注并应用变分偏微分方程理论进行图像处理研究,与此同时,也推动了变分法和偏微分方程相关数学理论的发展。

用于图像处理的变分与偏微分方程方法主要包括^[10]如下。

(1) 各向异性非线性扩散滤波方法。通过设计和控制扩散系数,使其在不同的图像区域能选择不同的扩散机制及扩散方向,从而实现在图像不同特征区域实施不同扩散行为,在去除噪声的同时保持图像几何结构特征。

(2) 基于变分的能量泛函优化。根据特定图像处理问题的要求,建立相应的能量泛函,然后通过变分法得到相应的欧拉-拉格朗日偏微分方程,最后通过对偏微分方程的数值求解获得图像处理结果。

(3) 曲线与曲面的界面几何演化与描述方法。结合图像空间中曲线与曲面的演化问题,对其演化规律进行建模,然后将图像看作是水平集曲线的几何或高维空间中的曲面,最后通过控制曲线或曲面的演化过程实现图像处理。

近年来,变分法和偏微分方程方法被广泛应用于图像处理领域,经历了由各向同性扩散滤波到各向异性扩散滤波^[37-43]、整数阶扩散到分数阶扩散^[44]、局部扩散到非局部扩散^[45-50]等阶段的过渡,取得了一系列研究成果。

尽管变分与偏微分方程用于图像处理表现出诸多优良性能,但也存在明显的不足。

(1) 扩散模型构建过程复杂。

(2) 偏微分方程基于局部信息处理图像,因此对全局性、周期性信息的刻画不够充分,处理效果不理想。

(3) 方程基于局部几何特征扩散,易产生块状效应。

(4) 高阶偏微分方程中含有大量未定系数,且数值计算过程要使用复杂的差分格式,数据运算量大,复杂程度高,求解困难,无法满足实时性要求。

如前所述,多尺度几何分析理论和变分偏微分方程方法都有着各自的优势和不足,如何将这两大领域各自的优势结合起来,研究将多尺度几何分析和变分偏微分方程结合的图像处理方法,探讨变换域中变分模型的表示形式,建立与之相应的理论体系,设计高效快速鲁棒的数值算法,成为具有广阔前景的研究领域。

1.2 变分与偏微分方程理论在图像处理中的应用及研究现状

在数字图像处理的发展历史进程中,离不开现代数学理论的支撑作用。将偏微分方程引入到图像处理的应用最早由 Gabor^[51]于1965年以及 Jain^[52]于1977年发表的文献中所提出的。由于偏微分方程在图像处理领域所展现出的优良性能,而被广泛应用于图像恢复、图像分割、图像修复、图像放大、图像压缩等领域。针对不同的应用领域的需求和图像处理具体任务,科学家们提出了各种不同的偏微分处理方法。

变分法和偏微分方程理论用于图像处理与其他已有的图像处理方法的区别,是它所具有的基于图像不同区域特质和结构的各向异性扩散性能。一幅图像通常包含有不同的几何结构特征区域:平坦区域、边界、角点、纹理等。偏微分方程图像处理模型可以根据图像中某一像素点局部邻域信息判断该点的几何属性特征,然后自适应地选择合理的扩散机制与处理方式,以保证在平滑或重建图像同质信息区域时,保护图像的边缘、角点、纹理等重要特征信息不丢失。

基于变分和偏微分方程的图像处理方法的基本思想是首先按照图像处理的任务和要求,构建能够表示图像的连续数学模型,令图像遵循指定的偏微分方程进行演化,演化终止时得到的偏微分方程的解,就是希望得到的图像处理结果。基于偏微分方程的图像处理建模方法有两种。

(1) 根据图像处理任务和要求建立能量泛函,通过变分原理得到欧拉-拉格朗日方程便是所需要的偏微分方程。

(2) 将所期望实现的图像变化与某种物理过程进行类比,建立起对应的偏微分方程。数学模型建立之后,求解所得到的偏微分方程便是所需要的图像处理的结果。图像处理的偏微分方程的数值求解涉及解的稳定性、模型求解效率和精度等问题,同样是一个重要的具有挑战性的课题^[53]。

1.2.1 基于变分与偏微分方程的图像去噪

基于偏微分方程的图像去噪与复原(image denoising and restoration)主要体现在以下3个方面。

(1) 多尺度和偏微分方程方法^[54-66]。Koenderink^[67]和 Witkin^[68]引入了尺度空间的思想,把一幅图像映射到多个尺度空间进行描述。他们的研究工作构成了偏微分方程图像处理理论的基础。图像的多尺度空间表示形式是通过高斯平滑来获得的,即图像与高斯核函数进行卷积运算,它等价于利用热传导方程来演化图像得到一个各向同性的扩散流^[69]。由于这一扩散过程是各向同性的,因此很多图像的重要几何特征,如边缘、纹理、角点等细节信息在扩散(去噪)过程中被模糊掉了。

为解决去噪与复原图像的边缘、纹理、角点等细节模糊的问题,1990年 Perona 和 Malik 提出了各向异性扩散方程,即 P-M 方程^[54]。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u|) \nabla u) \\ u(x, y, t) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

式(1.1)中, u 表示演化中的图像; t 表示演化时间参数; u_0 表示原始的噪声图像。

$g(s)$ 是关于图像梯度的单调下降的正值扩散函数, $g(s)$ 有两种选择形式。

$$g(s) = 1/(1 + (s/k)^2) \quad \text{或} \quad g(s) = \exp(-(s/k)^2) \quad (1.2)$$

研究表明, P-M 非线性扩散方程在去除噪声和保持图像边缘方面具有人们所期望的良好性能。但从数学理论上, P-M 方程是病态的, 也就是说该方程存在不稳定性, 不适当的参数设置和不同的边界条件会导致方程产生完全不同的结果。

Alvarez 等人^[66] 则从几何观点出发, 研究并提出了具有确定的几何意义的平均曲率运动模型 (Mean Curvature Motion, MCM)。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla u_\sigma|) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (1.3)$$

MCM 模型在图像演化过程中, 能够抑制在图像边缘处的扩散以保持边缘结构。但存在的问题是: MCM 模型中沿图像边缘 (垂直于梯度) 方向的扩散速度与图像的局部曲率有关, 这容易造成图像中目标角点处演化速度比边缘处快, 如果迭代次数选取不当会造成图像边缘尖角钝化, 丢失目标角点等重要特征信息。这对提高图像处理的视觉效果是不利的。

针对 P-M 方程所存在的不适定问题, 有许多学者进行了探讨和研究。1991 年, 法国的 Catté、Lions、Morel、Coll 四位学者^[56] 对梯度模值进行了正则化处理, 将 P-M 方程改为下列形式的适定的扩散方程 (Catté-Lions-Morel-Coll, CLMC) 模型。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u_\sigma|) \nabla u) \quad (1.4)$$

其中, ∇u_σ 是经过方差为 σ 的高斯核函数平滑的图像梯度。CLMC 模型完美地解决了 P-M 扩散方程理论上解的不适定问题。CLMC 模型可以根据图像的局部几何结构特征信息, 自由地调节扩散系数, 以达到自适应扩散滤波的目的。与 P-M 模型相比, CLMC 模型能够有效地避免大强度噪声对扩散行为的影响, 并且在一定程度上能保持图像的重要几何结构信息不丢失。但这种组合式的偏微分方程模型是否存在冗余, 以及解的存在性和唯一性都需要进一步研究和探讨。CLMC 模型存在的另一问题是, 对图像进行高斯平滑运算相当于对图像进行各向同性低通滤波, 这与 P-M 方程各向异性扩散的思想是相悖的。同时, 高斯函数的方差 σ 选取很敏感, 它的大小对扩散结果影响很大, 实际选取存在一定难度。

Weickert 等^[64] 将图像结构张量引入扩散方程, 以扩散张量作为扩散项, 提出了基于张量的偏微分方程模型: