普通高等教育“十二五”规划教材

电磁场理论

唐炼　赵昆　主编

中国石化出版社

HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM

普通高等教育“十二五”规划教材

电磁场理论

唐炼　赵昆　主编

中国石化出版社

内 容 简 介

本书系统地阐述了电磁场的基本理论，内容包括：矢量分析，静电场，静态场边值问题的解法，恒定电场，恒定磁场，时变电磁场，平面电磁波，电磁场边值问题的数值解法，每章均含有相应的例题和习题。

本书可作为石油高等院校勘查技术与工程、电子和数学专业的“电磁场理论”课教材，也可供其他专业的教师、学生和科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

电磁场理论/唐炼，赵昆主编.
—北京：中国石化出版社，2011.8
ISBN 978-7-5114-1100-6

Ⅰ.①电… Ⅱ.①唐…②赵… Ⅲ.①电磁场
Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 155934 号

中国石化出版社出版发行
地址：北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编：100011 电话：(010)84271850
读者服务部电话：(010)84289974
http://www.sinopec-press.com
E-mail:press@sinopec.com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787×1092 毫米 16 开本 14 印张 352 千字
2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷
定价：28.00 元

前　言

目前，“电磁场理论”课所用的教材很多，但是这些教材都是针对电子类及其相关专业的，不太适合石油院校的学生。根据几年来讲授“电磁场理论”课的经验和体会，以及原教材的使用情况和修改意见，参阅了近年来国内外的相关教材和参考书，我们编写了《电磁场理论》一书，其特点是：

——在课程总体安排上，按“从特殊到一般”的循序渐进的方式，以加深学生对本课程的理解；在讲授具体问题时，采用“从一般到特殊”的方法，以电磁学的基本物理概念为起点，建立电磁场理论的严格数学模型，由浅入深地讲述，并尽量注意同前期课程的衔接，避免与物理电磁学之间的重复性叙述，将物理概念和数学方法结合起来，培养学生分析和解决实际工程问题的能力。

——在理论联系实际的前提下，以数学建模的思想为学生学习的主线索，以“电磁场的数学物理基础”为学习的起点，选择具有代表性的典型例题进行分析讲解，使学生掌握解题的基本步骤，学会解题技巧，并对各种类型题目的解题方法进行总结，开阔解题思路，培养学生的综合能力。

——结合石油行业的特点，展示了电磁场基本理论与石油行业相关学科间的结合点，用以扩大学生的知识面，激发学习兴趣，从而有助于加强学生运用基础理论解决工程实际问题的能力。

——在“电磁场理论”课中，首次引入 MATLAB 软件，介绍了偏微分方程工具箱，能使学生很方便根据边值问题设定几何模型、边界条件、网格剖分等，然后设定方程类型、参数，很快就能得出数值结果和图形显示。

本教材共分八章，第一章矢量分析，介绍了研究电磁场理论所用的数学方法；第二、三、四、五章分别为静电场、静态场边值问题的解法，恒定电场、恒定磁场，主要讨论了几种静态场的性质和静态场边值问题的解法；第六、七章为时变电磁场和平面电磁波，主要讨论时变场的一般特性及平面波在空间中的传播、反射及在波导中的传播；第八章电磁场边值问题的数值解法，介绍了电磁场边值问题的两种数值解法及其利用 MATLAB 偏微分方程工具箱，实现边值问题计算的具体方法和步骤。

本书第二、三、四、五、八章由唐炼编写，第六章由赵昆编写，第一章由王芳编写，第七章 1 至 4 节由张鹏编写，第七章 5、6 节由王继红编写，全书由唐炼统稿。本书在编写过程中得到了中国石油大学物理系邵长金、孙为、卢贵武、周广刚等各位老师的支持和帮助，在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，欢迎读者批评指正。

目　　录

第1章 矢量分析

研究宏观电磁场与电磁波之前，我们先介绍电磁场理论重要的数学工具：矢量分析。本章在给出了标量场与矢量场、三种常见的正交曲线坐标系的基础上，讨论了标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律，之后引入了亥姆霍兹定理和格林定理。

1.1 矢量及其矢量场

1.1.1 标量与矢量

电磁场中遇到的绝大多数物理量，都能够容易地区分为标量和矢量。矢量是一个既有大小又有方向的量，例如电场、磁场、力、位移、速度等都是矢量。在矢量运算中常用符号 $\vec{A}$ 来表示一个矢量，而它的大小(即模)则用符号 $|\vec{A}|$ 或 A 表示。

一个仅用大小就能够完整描述的物理量称为标量，例如，电压、温度、时间、质量、电荷等。实际上，所有实数都是标量。

单位矢量是长度为1的矢量，用 $\vec{e}$ 表示，显然 $|\vec{e}|=1$。由定义可知

$$\vec{e}=\frac{\vec{A}}{|A|} \tag{1.1}$$

矢量可表示为

$$\vec{A}=|A|\vec{e} \tag{1.2}$$

式中，$|A|$ 表示矢量的大小；$\vec{e}$ 表示矢量的方向。

1.1.2 矢量的代数运算

(1) 矢量加法和减法

任一矢量 $\vec{A}$ 在三维正交曲线坐标系中，都可以给出三个分量。在直角坐标系中，用 $\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$，$\vec{e}_z$ 分别表示三个坐标轴方向的单位矢量，如果矢量 $\vec{A}$ 在 x,y,z 三个坐标轴上的投影分别为 A_x,A_y,A_z，则矢量 $\vec{A}$ 表示为

$$\vec{A}=A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z \tag{1.3}$$

$\vec{A}$ 的大小为

$$|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2} \tag{1.4}$$

任何两个矢量相加，只要把两个矢量的相应分量相加，就能得到它们的和

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{e}_x(A_x+B_x)+\vec{e}_y(A_y+B_y)+\vec{e}_z(A_z+B_z) \tag{1.5}$$

任何两个矢量相减，只要把其中一个矢量变号后，再相加就能得到它们的差

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=\vec{e}_x(A_x-B_x)+\vec{e}_y(A_y-B_y)+\vec{e}_z(A_z-B_z) \tag{1.6}$$

矢量的加法符合交换律和结合律

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A} \tag{1.7}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C} \tag{1.8}$$

(2) 矢量的乘法

1）矢量与标量相乘

一个标量 k 与一个矢量 $\vec{A}$ 的乘积 $k\vec{A}$ 仍为一个矢量，即

$$k\vec{A} = kA_x\vec{e}_x + kA_y\vec{e}_y + kA_z\vec{e}_z \tag{1.9}$$

若 $k>0$，则 $k\vec{A}$ 与 $\vec{A}$ 同方向；若 $k<0$，则 $k\vec{A}$ 与 $\vec{A}$ 反方向。

2）矢量与矢量的点积

两个矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的点积是一个标量，定义为矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的大小与它们之间较小的夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 的余弦之积，如图 1.1.1 所示，即

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta_{AB} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.10}$$

矢量的点积服从乘法交换律和分配律，即

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A} \tag{1.11}$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} \tag{1.12}$$

3）矢量与矢量的叉积

两个矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的叉积是一个矢量，它垂直于包含矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的平面，其大小定义为 $AB\sin\theta_{AB}$，方向为当右手四个手指从矢量 $\vec{A}$ 到 $\vec{B}$ 旋转 θ 时大拇指的方向，如图 1.1.2 所示，即

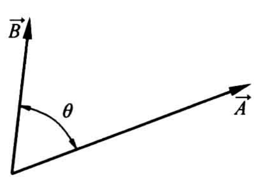


图 1.1.1　两矢量的夹角

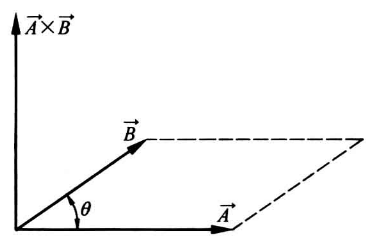


图 1.1.2　两矢量的叉积

$$\vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta_{AB}\,\vec{e}_n = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}_x$$

$$= \vec{e}_x(A_yB_z - A_zB_y) + \vec{e}_y(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{e}_z(A_xB_y - A_yB_x) \tag{1.13}$$

矢量积不服从交换律，但服从分配律，即

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A} \tag{1.14}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C} \tag{1.15}$$

矢量积不服从结合律，即

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq \vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \tag{1.16}$$

4）三个矢量的乘积

矢量三重积 $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ 的结果为一标量，有如下循环互换规律

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) \tag{1.17}$$

矢量三重积 $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ 的结果为一矢量，可展成下述两矢量之差

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \tag{1.18}$$

1.1.3 标量场与矢量场

(1) 标量场和矢量场的概念

在火炉、暖气片等热源周围空间的每一点上，温度都是确定的，即在空间存在温度的某种分布，我们就说空间存在温度场；在江河中，各处水的流速是可知的，水域中存在水流速的某种分布，我们就说那里存在流速场；在地球周围各点，存在对各种物体的引力，我们说地球周围存在引力场，或者说地面上有重力场；在电荷周围各点，存在对电荷的作用力，我们就说电荷周围有电场，……显然，“场”是指某种物理量在空间的分布。

具有标量特征的物理量在空间的分布是标量场。密度场、电位场、温度场是标量场。

具有矢量特征的物理量在空间的分布是矢量场。电场、流速场与重力场都是矢量场。

场是物理量的空间分布，这种物理量还可能随时间变化，因此，在数学上，场用表示其特征物理量的空间和时间坐标变量的多元函数来描述，即标量场用空间和时间的标量函数表示，矢量场用空间和时间的矢量函数表示。例如，温度场可表示为 $T(x,y,z,t)$，电位可表示为 $u(x,y,z,t)$，流速场可表示为 $\vec{v}(x,y,z,t)$，电场表示为 $\vec{E}(x,y,z,t)$，磁场表示为 $\vec{B}(x,y,z,t)$。

在电磁场中，随时间变化的场称为时变场；而将与时间无关，即不随时间变化的场称为静态场，也就是说，静态场只是空间坐标的函数。例如，静电场可表示为 $\vec{E}(x,y,z)$。

(2) 标量场的等值面

在标量场中，各点的场量是随空间位置变化的标量。因此，一个标量场 u 可以用一个标量函数来表示。例如，在直角坐标系中，可表示为

$$u=u(x,y,z) \tag{1.19}$$

在标量场中，为了形象直观地描述物理量在空间的分布状况，常常要考察场中物理量取相同值的点，因此，引入了等值面的概念。在标量场中，使标量函数 $u(x,y,z)$ 取得相同数值的点构成一个空间曲面，称为标量场的等值面。例如，在温度场中，由温度相同的点构成等温面；在电位场中，由电位相同的点构成等位面。

对任意给定的常数 C，等值面方程为

$$u(x,y,z)=C \tag{1.20}$$

标量场的等值面具有如下特点：

①常数 C 取一系列不同的值，就得到一系列不同的等值面，形成等值面族。

②若 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是标量场中的任一点，显然，曲面 $u(x,y,z)=u(x_0,y_0,z_0)$ 是通过该点的等值面，因此标量场的等值面充满场所在的整个空间。

③由于标量函数 $u(x,y,z)$ 为单值的，一个点只能在一个等值面上，因此标量场的等值面互不相交(如图 1.1.3 所示)。

(3) 矢量场的矢量线

在矢量场中，各点的场量是随空间位置变化的矢量。因此，一个矢量场 $\vec{A}$ 可以用一个矢量函数来表示。在直角坐标系中可表示为

$$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z) \tag{1.21}$$

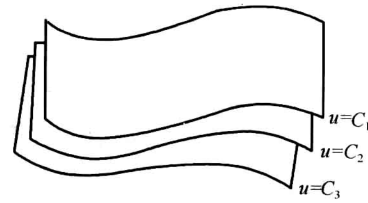


图 1.1.3　等值面

一个矢量场$\vec{A}$可以分解为三个分量场，在直角坐标系中

$$\vec{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\,\vec{e}_x + A_y(x,y,z)\,\vec{e}_y + A_z(x,y,z)\,\vec{e}_z \tag{1.22}$$

式中，$\vec{e}_x$，$\vec{e}_y$，$\vec{e}_z$ 分别是沿 x,y,z 方向的单位矢量，$A_x(x,y,z)$，$A_y(x,y,z)$，$A_z(x,y,z)$ 是 $\vec{A}(x,y,z)$ 的三个分量。

(1) 矢量线

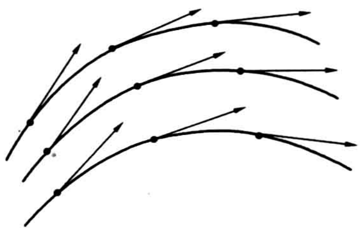


图 1.1.4　矢量线

在矢量场中，为了形象直观地描述矢量在空间的分布状况，引入了矢量线的概念。矢量线是一条空间曲线，在它上面每一点 M 处的切线方向与该点矢量 $\vec{A}$ 的方向相重合（如图 1.1.4 所示）。例如，静电场中的电力线，磁场中的磁力线等，都是矢量线的例子。一般地，矢量场中的每一点都有矢量线通过，所以矢量线也充满矢量场所在的空间。

(2) 矢量线微分方程

设已知矢量场$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$，$P(x,y,z)$ 是场中的矢量线上任一点，其矢径为

$$\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

则其微分矢量

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

在点 P 处与矢量线相切。根据矢量线的定义可知，在点 P 处 $\mathrm{d}\vec{r}$ 与 $\vec{A}$ 共线，即 $\mathrm{d}\vec{r}\,/\!/\,\vec{A}$，

于是

$$\mathrm{d}\vec{r}\times\vec{A} = 0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x} = \frac{\mathrm{d}y}{A_y} = \frac{\mathrm{d}z}{A_z} \tag{1.23}$$

这就是矢量线的微分方程组。解此微分方程组，即可得到矢量线方程。

(4) 矢量与矢量场的不变特性

描述物理状态空间分布的标量函数 $u(\vec{r})$ 和矢量函数 $\vec{A}(\vec{r})$，在时间为一定值的情况下，它们是唯一的，其大小和方向与所选择的坐标系无关，即对于坐标系的变换，$u(\vec{r})$ 和 $\vec{A}(\vec{r})$ 的大小与方向保持不变。矢量函数在直角坐标，柱坐标和球坐标三种常用坐标系中的关系为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\,\vec{e}_x + A_y(x,y,z)\,\vec{e}_y + A_z(x,y,z)\,\vec{e}_z \tag{1.24a}$$

$$= \vec{A}(\rho,\varphi,z) = A_\rho(\rho,\varphi,z)\,\vec{e}_\rho + A_\varphi(\rho,\varphi,z)\,\vec{e}_\varphi + A_z(\rho,\varphi,z)\,\vec{e}_z \tag{1.24b}$$

$$= \vec{A}(r,\theta,\varphi) = A_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\varphi \tag{1.24c}$$

由矢量的不变特性，可得下列恒等式

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = F_\rho^2 + F_\varphi^2 + F_z^2 = F_r^2 + F_\theta^2 + F_\varphi^2 \tag{1.25}$$

1.2　三种常用的正交坐标系

矢量场是矢量的空间分布，是空间坐标变量的矢量函数，即在空间的每一点都有一个对应的矢量。因此，定量地分析矢量场就需要建立参考坐标系，以表示空间的位置及矢量的方向。正交曲面坐标系有多种类型，本书采用最常用的三种，即直角坐标系、圆柱坐标系和圆球坐标系。

1.2.1 直角坐标系

直角坐标系是最常用的正交坐标系。直角坐标系中的三个坐标变量是 x,y,z，如图 1.2.1 所示，它们的变化范围是

$$-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty,\ -\infty < z < \infty$$

三个相互垂直的坐标轴方向的单位矢量分别用 $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ 表示，且有

$$\vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_z,\vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_x,\vec{e}_z = \vec{e}_x \times \vec{e}_y \tag{1.26}$$

在空间每一点上的矢量都相同的矢量场称为常矢量场，简称常矢量。直角坐标系中的三个单位矢量 $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ 均为常矢量。常矢量在直角坐标系中的三个分量都是常量。在直角坐标系内的任一矢量 $\vec{A}$ 可以表示为

$$\vec{A}(x,y,z) = A_x(x,y,z)\,\vec{e}_x + A_y(x,y,z)\,\vec{e}_y + A_z(x,y,z)\,\vec{e}_z$$

或

$$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \tag{1.27}$$

式中，A_x,A_y,A_z 分别为矢量 $\vec{A}$ 在 $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ 方向上的分量。

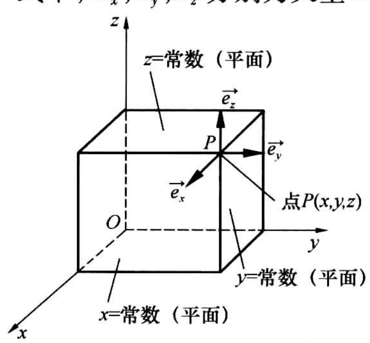


图 1.2.1 直角坐标系

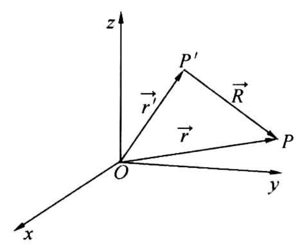


图 1.2.2 位置矢量和相对位置矢量

如图 1.2.2 所示，设空间中有一点 P，它的位置在所选择的坐标系下可以用一从原点出发的矢量 $\vec{r}$ 来表示，矢量 $\vec{r}$ 叫做点 P 的位置矢量。显然有

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{1.28}$$

类似地，如有另一点 $P'(x',y',z')$，则它的位置也可用一位置矢量来表示。

$$\vec{r}' = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z \tag{1.29}$$

点 P 相对于 P' 的位置可用从 P' 到 P 的矢量 $\vec{R}$ 来表示。矢量 $\vec{R}$ 称为点 P 相对于点 P' 的相对位置矢量。显然 $\vec{r}' + \vec{R} = \vec{r}$，所以

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \tag{1.30}$$

矢量 $\vec{R}$ 用 P 点和 P' 点的坐标值表示时，有

$$\vec{R} = (x - x')\,\vec{e}_x + (y - y')\,\vec{e}_y + (z - z')\,\vec{e}_z \tag{1.31}$$

所以 $\vec{R}$ 的模的平方为 $$R^2 = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] \tag{1.32}$$

位置矢量的微分为 $$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z \tag{1.33}$$

与三个坐标面单位矢量相垂直的三个面积元分别为

$$\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.34}$$

体积元为 $$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.35}$$

1.2.2 柱坐标系

在柱坐标系中，表示空间位置点的三个坐标变量记为 (ρ,φ,z)，它们的变化范围分别为

$$0 \leqslant \rho \leqslant \infty,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty \leqslant z \leqslant \infty$$

式中，ρ 表示该点到 z 轴的垂直距离；φ 表示过该点和 z 轴的平面与 xz 平面的夹角；z 仍然表示该点在 z 轴上的投影值，如图 1.2.3 所示。同一空间位置点的圆柱坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \tag{1.36}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \tag{1.37}$$

对空间任一位置点，如图 1.2.4 所示，三个相互垂直的坐标轴方向的单位矢量分别记为 $\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{e}_z$，且有

$$\vec{e}_z = \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z,\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \times \vec{e}_\rho \tag{1.38}$$

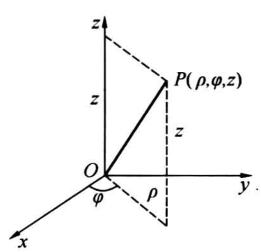


图 1.2.3 柱坐标系

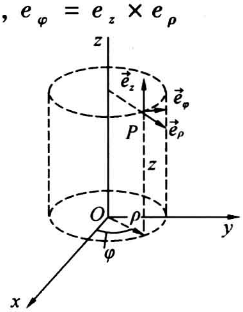


图 1.2.4 柱坐标系中的单位矢量

圆柱坐标系中的单位矢量的方向随空间位置而变，不是常矢量。

任一矢量 $\vec{A}$ 在圆柱坐标系中可表示为

$$\vec{A} = A_\rho \vec{e}_\rho + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z \tag{1.39}$$

式中，A_ρ,A_φ,A_z 称为圆柱坐标分量，是矢量 $\vec{A}$ 在三个垂直坐标轴上的投影。

圆柱坐标系中的单位矢量与直角坐标系中的单位矢量的关系为

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \tag{1.40}$$

$$\vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \quad \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \tag{1.41}$$

同一空间位置点上柱坐标系中的坐标分量与直角坐标系中的坐标分量之间的关系可用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\varphi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

$$\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_\rho\\A_\varphi\\A_z\end{pmatrix} \tag{1.43}$$

在圆柱坐标系，位置矢量为

$$\vec{r}=\rho\vec{e}_\rho+z\vec{e}_z \tag{1.44}$$

位置矢量的微分为

$$d\vec{r}=d(\rho\vec{e}_\rho)+d(z\vec{e}_z)=d\rho\vec{e}_\rho+\rho d\vec{e}_\varphi+dz\vec{e}_z=d\rho\vec{e}_\rho+\rho d\varphi\vec{e}_\varphi+dz\vec{e}_z \tag{1.45}$$

与三个坐标面单位矢量相垂直的三个面积元分别为

$$dS_\rho=\rho d\varphi dz,\ dS_\varphi=d\rho dz,\ dS_z=\rho d\rho d\varphi \tag{1.46}$$

体积元为

$$dV=\rho d\rho d\varphi dz \tag{1.47}$$

1.2.3 球坐标系

在球坐标系中，表示空间位置点的三个坐标变量记为(r,θ,φ)，其变化范围为

$$0\leqslant r\leqslant\infty,0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

其中，r表示该点到坐标原点的距离，也就是位置矢量的长度；θ表示该点的位置矢量与z轴的夹角；φ表示过该点和z轴的平面与xz平面的夹角，如图1.2.5所示。同一空间位置点的球坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases} \tag{1.48}$$

$$\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ \theta=\arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\\ \varphi=\arctan\dfrac{y}{x}\end{cases} \tag{1.49}$$

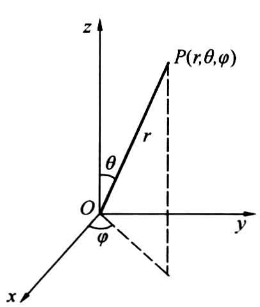


图1.2.5　球坐标系

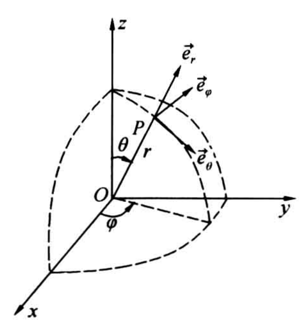


图1.2.6　球坐标中的单位矢量

对空间任一位置点(r,θ,φ)，如图1.2.6所示，本地的三个相互垂直的坐标轴单位矢量记为$\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi$，且有

$$\vec{e}_r=\vec{e}_\theta\times\vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_\theta=\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_r,\ \vec{e}_\varphi=\vec{e}_r\times\vec{e}_\theta \tag{1.50}$$

球坐标系中的单位矢量的方向也随空间位置而变，不是常矢量。

任一矢量$\vec{A}$在球坐标系中可表示为

$$\vec{A} = A_r\vec{e}_r + A_\theta\vec{e}_\theta + A_\varphi\vec{e}_\varphi \tag{1.51}$$

式中，A_r, A_θ, A_φ 称为球坐标分量，是矢量 $\vec{A}$ 在该点的三个垂直坐标轴 $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ 上的投影。

球坐标系中的单位矢量与直角坐标系中的单位矢量的关系为

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta &= \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y \end{aligned} \tag{1.52}$$

同一空间位置点上球坐标系中的坐标分量与直角坐标系中的坐标分量之间的关系可用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

在球坐标系中，位置矢量为

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \tag{1.55}$$

位置矢量的微分为

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}(r\vec{e}_r) = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\vec{e}_r = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi \tag{1.56}$$

与三个坐标面单位矢量相垂直的三个面积元分别为

$$\mathrm{d}S_r = r^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi d\theta,\ \mathrm{d}S_\theta = r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi,\ \mathrm{d}S_\varphi = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \tag{1.57}$$

体积元为

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{1.58}$$

1.3 标量场的梯度

1.3.1 梯度的定义

一元函数的导数表示函数的变化率，多元函数的偏导数是多元函数沿坐标轴方向的变化率。例如，对于温度场 $T(x,y,z,t)$，$\dfrac{\partial T}{\partial t}$ 表示温度场随时间的变化率；而 $\dfrac{\partial T}{\partial x}, \dfrac{\partial T}{\partial y}, \dfrac{\partial T}{\partial z}$ 分别表示温度场沿 x,y,z 三个坐标轴方向的变化率。

对于指定的空间方向 $\vec{e}_l$，其单位矢量可用方向余弦表示为

$$\vec{e}_l = \vec{e}_x\cos\alpha + \vec{e}_y\cos\beta + \vec{e}_z\cos\gamma \tag{1.59}$$

式中，α,β,γ 分别为该方向与 x,y,z 三个坐标轴方向的夹角。标量场或者说多元函数 $u(x,y,z)$ 沿指定方向 $\vec{e}_l$ 的变化率就是标量场在该方向的方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l} \tag{1.60}$$

式中，$\dfrac{\partial x}{\partial l}, \dfrac{\partial y}{\partial l}, \dfrac{\partial z}{\partial l}$ 分别等于 $\vec{e}_l$ 的三个方向余弦，因此，式(1.60)可写为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$
$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z\right)\cdot(\cos\alpha\,\vec{e}_x+\cos\beta\,\vec{e}_y+\cos\gamma\,\vec{e}_z)$$

在矢量分析中，经常用到哈密顿算符，记作“∇”，在直角坐标中，它可写成

$$\nabla=\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.61}$$

因为它具有矢量的形式，故又称为矢性微分算符。将其代入上式得

$$\nabla u=\vec{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.62}$$

∇u 称为标量场 u 的梯度，可用 gradu 表示。

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}u\cdot\vec{e}_l=|\mathrm{grad}u||\vec{e}_l|\cos\theta$$

式中，θ 为 gradu 与 $\vec{e}_l$ 之间的夹角。

$\because\quad |\vec{e}_l|=1$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial l}=|\mathrm{grad}u|\cos\theta \tag{1.63}$$

上式表明：

①标量场 $u(x,y,z)$ 沿指定方向 $\vec{e}_l$ 的变化率就是矢量场 gradu 在该方向的投影，与 $\vec{e}_l$ 无关。

②沿 gradu 的方向，标量场变化最快，变化率最大，其最大的变化率就是 gradu 的模。也就是说，gradu 给出了对应的标量场 u 在空间各点上的最大变化率及其方向。

与坐标系无关的定义为：$\mathrm{grad}u=\dfrac{\partial u}{\partial n}\vec{n}$ (1.64)

$\vec{n}$ 是标量场最大增加率方向的单位矢量。

③梯度矢量有一个重要的性质，即

$$\nabla\times\nabla u=0 \tag{1.65}$$

1.3.2 梯度的基本运算公式

求梯度运算是多项求偏导运算，因此它与微分运算有相似的规则。下面给出一些常用的梯度运算恒等式。

(1) $\nabla C=0$ （C 为常数） (1.66)

(2) $\nabla(Cu)=C\nabla u$ (1.67)

(3) $\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v$ (1.68)

(4) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$ (1.69)

(5) $\nabla F(u)=F'(u)\nabla u$ (1.70)

(6) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{1}{v^2}(v\nabla u-u\nabla v)$ (1.71)

例 1.3.1 产生场的场源所在的空间位置点称为源点，记为 (x',y',z') 或 $\vec{r'}$；场所在的空间位置点称为场点，记为 (x,y,z) 或 $\vec{r}$。源点到场点的距离记为 $R=|\vec{r}-\vec{r}'|$；从源点指向

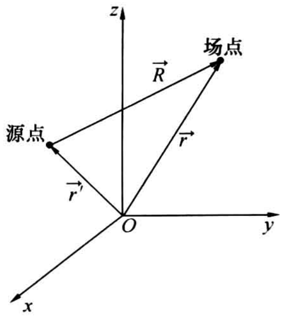


图 1.3.1　场点和源点

场点的矢量记为 $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}'$，如图 1.3.1 所示。求 ∇R、$\nabla' R$、$\nabla f(R)$、$\nabla' f(R)$、$\nabla\frac{1}{R}$、$\nabla'\frac{1}{R}$，∇ 表示对 (x,y,z) 运算，∇' 表示对 (x',y',z') 运算。

解：

$$R=|\vec{r}-\vec{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

$$\nabla R=\vec{e}_x\frac{\partial R}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial R}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x-x'}{R}\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{y-y'}{R}\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{z-z'}{R}$$

$$\nabla R=\frac{\vec{R}}{R}\quad \nabla' R=-\frac{\vec{R}}{R}$$

由式(1.70)

$$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{1}{R^2}\nabla R$$

因此

$$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\vec{R}}{R^3}=-\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

同理得

$$\nabla'\frac{1}{R}=\frac{\vec{R}}{R^3}=\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

$$\nabla f(R)=f'(R)\nabla R=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}\nabla R=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}\frac{\vec{R}}{R}$$

$$\nabla' f(R)=f'(R)\nabla' R=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}\nabla' R=-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}\frac{\vec{R}}{R}$$

1.4　矢量场的通量与散度

1.4.1　矢量场的通量

设 S 为一有向曲面，其正侧的单位法线矢量为 $\vec{n}$，如图 1.4.1 所示，则矢量场 $\vec{A}$ 在曲面 S 上的积分称为矢量场 $\vec{A}$ 通过曲面 S 的通量。

$$\Phi=\int_S\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\int_S\vec{A}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S \tag{1.72}$$

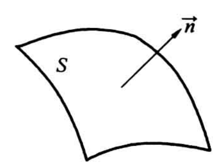


图 1.4.1　面元矢量

例如，在电场中，电位移矢量 $\vec{D}$ 在某一曲面 S 上的面积分就是矢量 $\vec{D}$ 通过该曲面的电通量，在磁场中，磁感应强度 $\vec{B}$ 在某一曲面 S 上的面积分就是矢量 $\vec{B}$ 通过该曲面的磁通量。

如果 S 是一闭合曲面，则通过闭合曲面的总通量可表示为

$$\Phi=\oint_S\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\oint_S\vec{A}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S \tag{1.73}$$

对于闭合曲面，通常规定曲面的外法线方向为面积元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的方向。

以流体场为例说明上式的意义。如果穿过闭合面 S 的通量不等于零，则表示闭合面包围的体积内有净流量流出或流入。

① 若 $\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} > 0$，则表示每秒有净流量流出，说明体积内必定存在着流体的“源”（或源大于沟）；

② 若 $\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} < 0$，则表示每秒有净流量流入，说明体积内必定存在着流体的“沟”（或称负源，沟大于源）；

③ 若 $\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$，则流入体积内和从体积内流出的流量相等，即体积内源和沟的总和为零或体积内既无源也无沟。

例如，电场强度的通量 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$，磁感应强度的通量 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$。

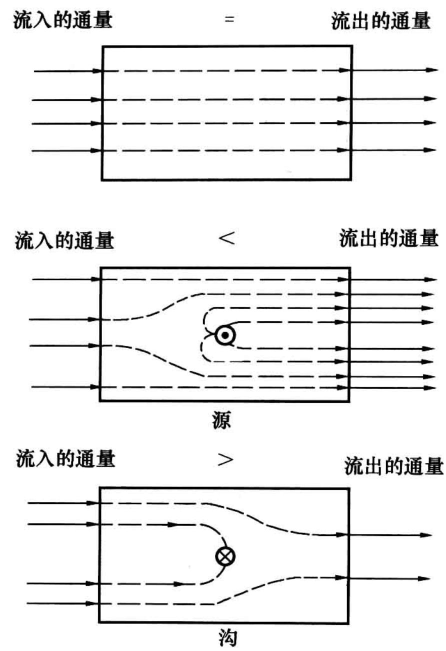


图 1.4.2　穿过闭合面的通量

1.4.2　矢量场的散度

从矢量场的通量可以确定一空间区域中有无矢量场源，以及该区域中场源的总量。如果某空间区域有场源，那么该场源是在该区域中何处？又是怎样分布的？为了研究矢量场在一个点附近的通量特性，取如下极限

$$\lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r})}{\Delta v}$$

此极限式称为 $\vec{A}(\vec{r})$ 在该点的散度，记为 $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r})$，即散度的定义式为

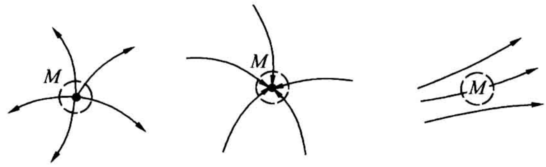
$$\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r})}{\Delta v} \tag{1.74}$$

它表示从该点单位体积内散发出来的 $\vec{A}(\vec{r})$ 的通量。显然，散度 $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r})$ 与 $\vec{A}(\vec{r})$ 沿空间位置的变化有关。

从散度的定义可知：

① $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r})$ 表示在矢量场中任意点 M 处穿出单位体积的净通量，所以 $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r})$ 描述了通量源的密度。

②在矢量场中的点 M 处，若 $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) > 0$，则该点有发出通量线的正源；若 $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) < 0$，则该点有接收通量线的负源；若 $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) = 0$，则该点无源（如图 1.4.3）。



(a)div$\vec{A}$>0　(b)div$\vec{A}$<0　(c)div$\vec{A}$=0

图 1.4.3　散度的定义

③矢量场 $\vec{A}(\vec{r})$ 的散度是一个标量场，通常称 $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r})$ 为矢量场所产生的散度场。

由散度的定义，$\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r})$ 与所取体积元 Δv 的形状无关，只要在取极限时，所有尺寸都趋于零即可。

证明： 在直角坐标系中，如图 1.4.4 所