HIT

数学·统计学系列

Inequality Explore

不等式探究

安振平 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

HIT

数学·统计学系列

不等式探究

Inequality Explore

安振平 著

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共四编，包括：两数和与积的不等关系，课本条件指数不等式的探究，一个不等式的化简，沟通两个经典问题的联系，三正数的分式不等式，构造图形 无字证明，等 33 章. 本书详细介绍了不等式的基本知识概念及其相关内容，同时讲述了不等式在不同学科领域的应用.

本书可供高中、师范院校数学系的师生和不等式爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

不等式探究/安振平著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2016.3

ISBN 978-7-5603-5846-8

Ⅰ.①不… Ⅱ.①安… Ⅲ.不等式-研究
Ⅳ.①O178

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 004970 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 14 字数 270 千字
版　　次 2016 年 3 月第 1 版 2016 年 3 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5846-8
定　　价 38.00 元

◎ 序

原来你一直都在这里

——《不等式探究》出版记言

安振平先生的著作《不等式探究》即将付梓，让我为其写几句话，我甚为惶惑. 虽然同为数学人，这么多年的主要精力是编辑出版经营，顶多是数学的“边缘人”，对于不等式的研究，实在不敢妄言. 迫不及待地翻阅了全书的内容，还真有些许感触，写出来与大家共勉.

我与振平先生相识始于20世纪90年代初. 那时我刚刚大学毕业，到中学数学教学参考编辑部从事编辑工作，满眼新鲜，满腹好奇，未见先生面，先闻其“不等式研究”之盛名. 省教研室的朋友说陕西咸阳的永寿县出了一位数学奇才教师，发现了以其名字命名的“安振平不等式”，因为教学研究成果突出，32岁就是全省最年轻的数学特级教师了. 执教乡村一隅，却饱含数学情怀，“位卑”不忘教研，这不由得让我对安振平先生的敬仰之情油然而生，且期待与其相识相交，这才有了后面20多年两位职业挚友“过从甚密”的深情交往.

对于不等式的研究，振平先生完全出于个人的兴致爱好. 毫不夸张地说，他把别人打麻将抑或休闲的时间都用来进行教学研究了. 不等式是他教学研究的“核心地带”. 他对数学教育研究

的勤勉、执着让我敬佩.这么多年来,只要有机会见面交流,他每次都会带来自己手头研读的数学新书或者期刊热文推荐给我.每次出差、开会期间和安老师同处一室,彻夜交流切磋,后半夜我常常不能自持倒头睡去,他总还要阅读一番才肯睡去.我一觉醒来,他又在那里读书了.今天这些关于不等式系统而深入的研究成果,对他而言绝不是上帝简单眷顾的幸运,而是功到垂成的自然产物.

本书内容从不等式的基础,到高考、竞赛,再到探究,由浅入深,层层递进,非常方便读者朋友阅读学习.这些成果都是安振平先生对多年来自己在各家期刊正式发表文章进行系统梳理后再加工而成,既有诸多不等式问题的详尽证明讲解,还有精心选置的几道思考问题及参考答案,有很多问题还再现还原了探究的背景,并提供了多种证明的思路和方法.

毫无疑问,这本薄薄的小册子,浸润着安振平先生几十年不等式研究的轨迹,也是他毕生心血的凝聚.一个问题的一种证明方法也许只有短短几行,但数学人应该能体会,那背后也许是作者多少个不眠之夜的苦思冥想,也许是困扰许久的妙手偶得.这其中呈现出的绝不仅仅是数学知识本身了,还应该有研究者专业的诉求、人生的态度、探究的精神.

几十年了,安老师,原来你一直都在这里.

我要对所有购买、阅读此书的读者朋友表达敬意.因为你们也是和安振平先生一样的中学数学的同道中人,也是数学教学研究的爱好者、践行者,这里是智者的天堂,这里是思者的乐土,预祝你们自由驰骋于数学思维的广袤草原,把采撷到的智慧之花与大家共享,用数学将人类的生活装点得更加精致美丽.谨以此文恭贺安先生著作正式出版.

马小为

2015 年 12 月于陕西师范大学

◎前言

不等式是初等数学的核心内容，在现行的高中必学和选学教材中，不等式仅涉及不等式的性质和一些著名不等式的应用，学习的内容相对基础，然而，在各级各类的考试中，不等式求解、证明和应用却是一个热门的话题.

不等式的图书已有许多名著，适合于不同层次的读者去学习. 笔者在多年教学工作之余，思考了一些浅层次的不等式，探究这些不等式证明和演变已成为自己学习的习惯，从这些肤浅的思考文章里选择了一部分，意从高中教材、高考试题、竞赛试题以及初等数学研究里的不等式这四个层次，整理成书，作为不等式学习的入门也许是有意义的.

不等式证明的方法多样，最基本的方法那就是作差、作商的比较方法，当构造了一个恒等式，舍去当中的非负非正量，也许就生成所要证明的不等式. 当掌握一些重要不等式，诸如：均值不等式、柯西不等式、排序不等式、切比雪夫不等式、琴生不等式、舒尔不等式等，灵活应用这些不等式及其变形，可以证明许多不等式. 构造函数，建立局部不等式，待定系数，变量排序，变量替换，变量调整，反证法，数学归纳法等，均为常用的证明不等式的解题方法与技巧.

本书中的各节次之间既有联系，又相对独立，读者在阅读时，不必依照书的节次顺序，你可以先阅读一些自己感兴趣的话题，也可以先阅读节次前的例题. 对于后面的习题，建议你探究自己的简捷解答方法，也许书中的解答繁笨，或许能给你少走弯

路的启示.对于一些难度较大的问题,建议你放一放,等你积累了有关知识以后,再反过来去阅读、去探究、去演练.学贵于思,思在于疑.解答数学问题时,既要知道“是什么”(解题知识),还要明白“为什么”(解题方法),更要反思“还有什么”(解题潜能),只要坚持这样的持续训练,必将逐步提升你的发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力.

本书可供高中、师范院校数学系的师生和不等式爱好者阅读,限于作者水平,书中的疏漏在所难免,敬请读者不吝指正.

本书获咸阳师院重点科研课题(初等不等式研究(08XSYK110))和陕西省高等学校教学改革项目(基于微课程的教师教育课程教学模式创新研究(13BY89))研究经费支持.

安振平

2015 年 11 月 26 日于咸阳秦都

◎目录

第一编　基础

第二编　高考

第三编　竞赛

第四编　探究

第一编

基　础

两数和与积的不等关系

第1章

（经典题-代数不等式 ★★）已知 $a>2$，$b>2$，求证：$ab>a+b$.

本题是一道简明的不等式证明题，依据不等式的基本性质，可以从多途径、多角度去思考证明方法.

我们知道，要证明 $x>y$，只要证明 $x-y>0$ 就行了. 作差比较是证明不等式的基本方法.

证明一 （作差法）$ab-(a+b)=ab-a-b$，接下来，难于变形，经一小会时间，有学生提出，加 1 减 1 技巧. 便得

$$\begin{aligned}ab-(a+b)&=ab-a-b+1-1\\&=a(b-1)-(b-1)-1\\&=(a-1)(b-1)-1\end{aligned}$$

由于 $a>2$，$b>2$，所以 $a-1>1$，$b-1>1$，得 $(a-1)(b-1)>1$，即

$$(a-1)(b-1)-1>0$$

故有 $ab>a+b$.

其实，直接作差，有点困难，破除这个困难，用到了"加 1 减 1"技巧，如果你没有想到这个技巧，又能如何实现证明呢？这时，有一学生抢着高声说，可以先对原不等式的两边同乘以 2 后，再作差就好变形了.

证明二 （作差法）因为 $a>2$，$b>2$，所以 $a-2>0$，$b-2>0$.

又因为 $2ab-2(a+b)=(ab-2a)+(ab-2b)=a(b-2)+b(a-2)>0$，所以 $2ab-2(a+b)>0$，即 $ab>a+b$.

如上的证法，需要先乘以2，再作差，不乘以2，能不能证明呢？其实，考虑到对称性，可以用排序的技巧来处理.

证明三　（作差法）由对称性，不妨设 $a\geqslant b$，注意到 $b>2$，则有

$$ab-(a+b)>2a-(a+b)=a-b\geqslant 0$$

所以

$$ab>a+b$$

如上的证明三也可以不用作差技能，改述为下面的证法.

证明四　（排序法）由对称性，不妨设 $a\geqslant b$，注意到 $b>2$，则有

$$ab>2a=a+a\geqslant a+b$$

所以

$$ab>a+b$$

我们知道，作商也是证明不等式的另一基本方法.

证明五　（作商法）由 $a>2,b>2$，可得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$. 于是

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

所以

$$ab>a+b$$

如上的作商法稍加改变，就可得到用不等式的叠加性质来证.

证明六　（叠加法）由 $a>2,b>2$，可得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$，$\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$，将这两个不等式叠加，得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

即 $\frac{a+b}{ab}<1$，也就是

$$a+b<ab$$

所以

$$ab>a+b$$

如上的证法里，有“加、减、商”的证法，一个容易想到的念头是，有“乘”的证法吗？

证明七　（叠乘法）由 $a>2,b>2$，得

$$a-1>1,b-1>1$$

所以

$$(a-1)(b-1)>1$$

即

$$ab-(a+b)>0$$

所以

$$ab>a+b$$

对条件里的 2 不分解为 $1+1$,也可以直接去叠乘的.

证明八 (叠乘法)因为 $a>2$,$b>2$,所以 $a-2>0$,$b-2>0$.再将这两个不等式叠乘,得

$$(a-2)(b-2)>0$$

即

$$ab-2(a+b)+4>0$$

于是,有

$$ab-(a+b)>(a-2)+(b-2)>0$$

所以

$$ab>a+b$$

由条件联想到增量换元法,其证明是比较简明的.

证明九 (增量换元法)由 $a>2$,$b>2$,可设 $a=2+x$,$b=2+y$,$x>0$,$y>0$,则有

$$\begin{aligned}ab&=(2+x)(2+y)=(2+x)+(2+y)+(x+y+xy)\\&=a+b+(x+y+xy)>a+b\end{aligned}$$

所以

$$ab>a+b$$

若将作差后 $ab-(a+b)$ 的代数式记为 $f(a)$,构造一次函数,又获简明证法.

证明十 (构造函数法)构造函数 $f(a)=ab-(a+b)=(b-1)a-b$.

因为 $b>2$,所以 $b-1>1>0$,这说明函数 $f(a)=(b-1)a-b$ 是关于 a 的一次递增函数,并注意到 $a>2$,$f(2)=2(b-1)-b=b-2>0$,所以 $f(a)>f(2)>0$,故有 $ab>a+b$.

对 $ab>a+b$ 分离变量,使 a,b 分别位于不等号的两端.

证明十一 (分离变量法)对 $ab>a+b$ 变形,得 $a(b-1)>b$,分离变量,得 $a>\frac{b}{b-1}$,即

$$a>1+\frac{1}{b-1}$$

因为 $b>2$,所以 $b-1>1$,得 $\frac{1}{b-1}<1$,$1+\frac{1}{b-1}<2<a$,即 $a>1+\frac{1}{b-1}$ 成立.

故有 $ab>a+b$.

从 ab 想到矩形的面积,想法构造矩形,利用整体面积大于局部面积获证.

证明十二 (构造图形法)设 $a=2+x$,$b=2+y$,$x>0$,$y>0$.构造如图 1 所示图形.

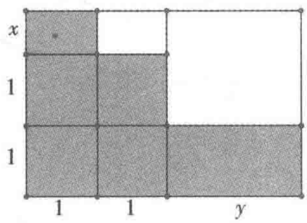

图 1

显然,图中大矩形的面积为 $ab=(2+x)(2+y)$,阴影部分的面积为 $a+b=(2+x)+(2+y)=$

$4+x+y$，由图立即得 $ab>a+b$.

证明十三 （均值不等式法）由条件和均值不等式，得

$$ab(a+b)=a^2b+ab^2>2a^2+2b^2$$
$$=a^2+b^2+(a^2+b^2)\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$$

所以
$$ab(a+b)>(a+b)^2$$
故
$$ab>a+b$$

值得指出的是，本题虽然简单，但其种种证明方法却包涵了证明不等式最为基本的方法和技巧，诸如：作差、作商、换元、排序、构造函数、构造图形，等等，值得读者回味与持续思考.

练习题：

1.（自编题-代数不等式★★）已知 $a>3,b>3,c>3$，求证：$abc>ab+bc+ca$.

2.（自编题-代数不等式★★★）对任意的正实数 a、b，求证

$$\frac{a^3}{3a^2b+b^3}+\frac{b^3}{3ab^2+a^3}\geqslant\frac{1}{2}$$

参考答案：

1. 由 $a>3,b>3,c>3$，得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{3},\frac{1}{b}<\frac{1}{3},\frac{1}{c}<\frac{1}{3}$，所以

$$\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

于是有 $ab+bc+ca<abc$.

2. 所证不等式等价于

$$2a^3(3ab^2+a^3)+2b^3(3a^2b+b^3)\geqslant(3ab^2+a^3)(3a^2b+b^3)$$

等价于

$$6a^4b^2+6a^2b^4+2a^6+2b^6\geqslant10a^3b^3+3ab^5+3a^5b$$

等价于

$$6t^4+6t^2+2t^6+2\geqslant10t^3+3t+3t^5\quad\left(令\ t=\frac{a}{b}>0\right)$$

等价于

$$2t^6-3t^5+6t^4-10t^3+6t^2-3t+2\geqslant0$$

等价于

$$(2t^4+t^3+6t^2+t+2)(t-1)^2\geqslant0$$

获证.

第2章 课本条件指数不等式的探究

(经典题-代数不等式 ★★)若 $a,b>0$,且 $a+b=1$,求证:$3^a+3^b<4$.

这是北师大高中教材选修 2-2 中的一道习题,在习题课教学中,笔者与学生共同研究了该题的多种证明方法.

证明一 采用作差法.

$$\begin{aligned}3^a+3^b-4&=3^a-3+3^b-1 &&\text{(作差)}\\&=3^a-3+3^{1-a}-1 &&\text{(消元)}\\&=3^a-3+\frac{3}{3^a}-1 &&\text{(变形)}\\&=(3^a-3)\left(1-\frac{1}{3^a}\right) &&\text{(分解)}\end{aligned}$$

因为 $0<a<1$,所以 $1<3^a<3$,所以 $3^a-3<0$,$1-\frac{1}{3^a}>0$,所以 $(3^a-3)\left(1-\frac{1}{3^a}\right)<0$(判正负),所以 $3^a+3^b<4$.

证明二 采用分析法.

要证 $3^a+3^b<4$,需证 $3^a+3^b-4<0$(移项),即证 $3^a-3+3^{1-a}-1<0$(消元),等价于 $3^a-3+\frac{3}{3^a}-1<0$(变形),$(3^a-3)\left(1-\frac{1}{3^a}\right)<0$ (分解).因为 $0<a<1$,所以 $1<3^a<3$,

所以 $3^a-3<0, 1-\frac{1}{3^a}>0$,所以 $(3^a-3)\left(1-\frac{1}{3^a}\right)<0$ 成立(判正负),所以 $3^a+3^b<4$.

证明三 构造函数法.

令 $$f(x)=3^x+3^{1-x}\ (0<x<1)\quad\text{(构造函数)}$$

求导,得

$$f'(x)=(3^x-3^{1-x})\ln 3\quad\text{(求导)}$$

令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2}$.

易知函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 是减函数,在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 是增函数.(判断函数单调性)

因为 $f(0)=f(1)=4$,所以

$$f(x)<4\quad\text{(获得不等关系)}$$

所以 $3^x+3^{1-x}<4$, 即 $3^a+3^b<4$.

证明四 采用反证法.

假设 $3^a+3^b\geqslant 4$ 对存在正数 a,b 成立.(否定结论)

因为 $$3^a+3^b\geqslant 2\sqrt{3^{a+b}}\quad\text{(2 元均值不等式)}$$

所以 $2\sqrt{3^{a+b}}\geqslant 4$,即

$$3^{a+b}\geqslant 4$$

得 $a+b\geqslant \log_3^4>1$,即

$$a+b>1\quad\text{(获得不等式)}$$

这与 $a+b=1$ 矛盾.(发现矛盾)

故有 $3^a+3^b<4$.

说明 如上的作差法、分析法、构造函数方法,以及反证法,反映了思维角度的不同,它们均是证明不等式最为基本的方法,值得首先考虑. 在与学生讨论不同证法的同时,学生吕二动联想到了把 2 个变量,拓展到 3 个变量,提出了如下新题:

推广一 (经典题-代数不等式 ★★★)若 $a,b,c>0$,且 $a+b+c=1$.

求证:$3^a+3^b+3^c<5$.

本延伸问题用上面类似的证明途径可能是比较困难的,经过师生共同探究,我们发现,用割线方法容易证之.

证明 由 $a,b,c>0$,且 $a+b+c=1$,知 $a,b,c\in(0,1)$.