控制系统数字仿真

◆ 徐家蓓 编著

Kongzhi Xitong Shuzi Fangzhen

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

控制系统数字仿真

徐家蓓　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书介绍了连续系统和采样系统的数字仿真原理和方法，全书共分六章，先讲述仿真的基本概念及特点，再分别介绍连续系统和离散系统的数值仿真，并介绍了快速数字仿真中经常用的线性变换增广矩阵和时域矩阵法的原理及仿真程序等。最后给出了大量的仿真实例及计算机程序；还有习题、实验指导和控制系统数字仿真 CAI 软件。

版权专有　侵权必究

图书在版编目（CIP）数据

控制系统数字仿真/徐家蓓编著．—北京：北京理工大学出版社，(2007.5 重印)
ISBN 978-7-81045-410-0

Ⅰ．控…　Ⅱ．徐…　Ⅲ．控制系统–数字仿真　Ⅳ．TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 16430 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京地质印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 18
字　　数 / 437 千字
版　　次 / 2007 年 5 月第 1 版第 5 次印刷
定　　价 / 32.00 元

图书出现印装质量问题，本社负责调换

前　言

系统仿真是近几十年发展的一门综合性技术学科，尤其对自动控制系统进行分析、设计和综合研究中提供了先进的手段，随着计算机的广泛应用，利用计算机进行仿真试验和研究与计算机直接控制已成为从事控制工程的各种人员所必需掌握的一门技术。仿真技术广泛应用于工程及非工程的广大领域，并取得了极大的社会及经济效益。

本书反映作者从事数字仿真技术教学与科研的经验，体会与成果，适用于具有自动控制理论基础的机械及机电类专业及工程人员作教材或作参考书。

作者在编写时力求讲清系统仿真的基本概念，特点及方法，本着学以致用的原则，侧重在工程上最常用且易于在微机上实现的方法，讲明原理，使用方法和应用场合；章、节内容重点突出，条理清晰，便于自学，根据仿真技术在自动控制领域广泛应用的特点，选材上既有针对性又有通用性，能满足不同使用者的需要。

“控制系统数字仿真”是一门理论及实践性均强的课程，为了使理论与实践紧密结合，教学内容除保证足够的理论知识之外还附有例题、习题，以此加深对理论知识的理解。为此，配合课堂讲课安排了实验。为了方便实验，本书编写了实验指导书，并编制了“控制系统数字仿真 CAI 软件”提供实验时使用。

全书共分六章，第一章讲述仿真技术的基本概念，仿真研究的步骤以及仿真的特点与性质。第二章讲述了连续系统数值积分法的时域数字仿真及程序。其中包括一阶微分方程组，高阶微分方程或传递函数和结构图法数字仿真三种形式的模型的数字仿真程序。第三章讲述了连续系统按环离散化的时域数字仿真方法及程序。这两章是全书的重点和基础，而后几章都是在此基础上，根据不同的需要而发展或拓宽的。第四章是快速数字仿真方法及程序，主要介绍了双线性变换算法及增广矩阵和时域矩阵的程序。第五章是采样控制系统数字仿真的特点，数字控制器的设计及相应的仿真程序，重点介绍了控制器的设计方法，差分方程的求解和采样控制系统的仿真程序。第六章是频域特性和根轨迹法的数字仿真方法及程序。其中有奈奎斯特幅相频域特性，波德图法的频域特性的计算和绘制及稳定判别，根轨迹的计算程序。

本书所需的基础知识为线性代数，常微分方程，自动控制理论，计算机算法语言等，书中程序采用 C 语言编制。

全书讲授 30 ~ 36 学时，具体视学生情况而定。附录中给出了实验 7 个，可安排 8 ~ 12 学时。

北京科技大学黄畲教授担任本书的主审，他详细审阅了书稿，并提出了许多宝贵的意见和建议，在此仅向他表示诚挚的谢意。

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　绪　论

1.1　仿真技术概述

1.1.1　仿真的定义

系统仿真是近几十年发展的一门综合性技术学科，它对系统进行设计、研究和决策提供了一个先进而有效的手段，并可缩短设计周期、降低费用。仿真技术已广泛应用于工程及非工程的广大领域，并取得了极大的社会及经济效益。

仿真的定义在不同的领域或范畴中的学者均有描述，但可概括为："仿真是指用模型(物理模型或数学模型)代替实际系统进行实验和研究。"

1.1.2　仿真遵循的原则

为使仿真的结果能被实际证实是真实可靠的，也就是结果是可信的，仿真所遵循的基本原则是相似原理：几何相似、环境相似和性能相似。

1.1.3　仿真的分类

1　按模型的性质分类

有物理仿真、数学仿真、数学物理混合仿真。

(1) *物理仿真*

物理仿真是指采用了物理模型，如确定新型飞机机翼的结构形状和尺寸，往往制作一个与实际结构相似但几何尺寸较小的模型，使在气流场相似条件(压力、气流速度)的风洞中进行试验，根据得到的空气动力学的参数，进行结果分析，从而确定结构形状及尺寸。同样为了制造一个大型发电机组，也是在同类型的较小的发电机组上进行试验研究，用试验结果分析指导大型发电机组的设计和生产。所以物理仿真是以物理过程相似、几何尺寸相似以及环境条件相似为基础的仿真。

物理仿真的优点是能最大限度地反映系统的物理本质，具有直观性强和形象化的特点；缺点是构造物理模型所需费用高、周期长、技术复杂，其次是在物理模型上做试验，修改模型的结构及参数困难，实验限制条件多，容易受到环境条件的干扰。

(2) *数学仿真*

数学仿真是应用性能相似、环境相似的原理，按照真实系统的数学关系，构造系统的数学模型，并在数学模型上进行试验。数学仿真的特点是制作模型比较经济，修改参数方便，周期短，但形式抽象、直观性差。

早期的仿真绝大多数采用物理仿真，因为系统比较简单，容易构成仿真系统。相比之下，数学仿真的模型是微分方程或差分方程时的求解相对要烦琐困难。随着科学的发展，技术的

进步，自动控制系统日益复杂，采用物理仿真制作物理模型的结构的难度、复杂度、精度都提高了，因而也增加了成本。与此同时，数学的数值分析逐步推广和发展、自动控制理论中现代控制理论分支的崛起以及计算机种类的发展，使用计算机进行数学模型试验的能力增强，使计算机在数学仿真中的应用日益普遍。数学仿真就是在计算机上对系统的数学模型进行实验，数学仿真离不开计算机，因此也称为计算机仿真。

计算机仿真为数学模型的建立与实验提供了较大的灵活与方便，因此凡是可以用数学模型进行实验的几乎都可以用计算机来研究被仿真系统的各种特性，选择最佳参数和设计合理的系统方案，这就是计算机辅助设计(Computer Aid Design 简称 CAD)的重要内容之一。CAD 一般包括确定设计参数、结构参数，绘图和仿真。仿真是 CAD 的重要组成。现在计算机仿真已经越来越多地取代物理仿真。

(3) *数学—物理混合仿真*

在对某些系统的研究中，把数学模型与物理模型或实物联接在一起进行实验，也即将系统的一部分建立数学模型，并放到计算机上，而另一部分构造其物理模型或直接采用实物，然后将它们联接成系统进行实验，这种形式的仿真就称为数学—物理混合仿真或半实物仿真。这种仿真具有数学与物理仿真的共同优点，当然其费用必将大大增加。

2 实时仿真与非实时仿真

按照仿真实验时间标尺 τ 与实际系统的时间标尺 t 比例来分类，将 $\tau/t=1$ 的仿真称为实时仿真，而 $\tau/t\neq1$ 的仿真为非实时仿真。一般有实物介入的半实物仿真属于实时仿真，而无实物介入的纯计算机仿真为非实时仿真。

3 按计算机仿真采用的计算机分类

用于计算机仿真的一套软硬设备构成了仿真系统。根据仿真系统所采用的计算机种类，可将计算机仿真分为模拟计算机仿真；数字计算机仿真；数字—模拟混合计算机的数字模拟混合仿真。

由于软硬设备配置的不同，这三种形式的计算机仿真具有不同的特点。

(1) *模拟仿真*

模拟仿真中的模拟计算机是一种连续计算装置，它把实际系统的各物理量用电压表示，通过各种电子运算部件来求解描述系统的数学模型，输入和输出均是连续的电压量，因此各物理量“连续”变化是模拟仿真的突出特点，模拟仿真更接近于实际连续系统。

模拟仿真中模拟计算机各运算部件如积分器、加法器、函数发生器等是并联运行，各个运算环节同时进行运算，因此运算速度快，这是模拟仿真的另一优点。

它的主要缺点是模拟计算机的运算精度低。计算机的精度仅能达到 0.1～0.01。这是由于组成模拟计算机运算部件的元、部件，如运算放大器、电阻、电容等的本身精度较低，所以组合误差大，使计算机的精度受到了限制。其次，对一些特殊环节，如纯延时、非线性或逻辑判断环节，实现较困难；排题版需要操作员接线等，所以仿真的自动化程度低。因而适用于低阶连续系统的仿真。

(2) *数字仿真*

数字仿真是利用数字计算机作为仿真工具。数字计算机是一种不连续的计算装置，它把输入的实际系统的数学模型中的连续量变成离散的数字量，经过运算输出不连续的数据。

数字计算机仿真的最大优点是计算精度高。精度取决于字长，增加字长就可提高计算精

度,对计算机只是增加一些部件,在技术上实现并不困难。目前精度可达 $10^{-3} \sim 10^{-6}$。

与模拟仿真相比,运算速度较慢,这是因为数字仿真的数字计算机运算是顺序运行的(或称"串行"),用一个或数个运算器按一定顺序运行完成各种运算相对较慢。

目前数字仿真广泛用于自动控制系统非实时仿真,对于反应要求较快的系统进行实时仿真以及解决参数优化问题有一定困难。

(3) 数字—模拟混合仿真

数字—模拟混合仿真利用混合计算机作为仿真工具,混合计算机有下面两类。

a. 混合模拟计算机

这是在模拟计算机中引进存储判断和数字逻辑运算而形成的。在模拟计算机的基础上研制了具有数字功能的模拟部件,它既保持模拟机的优点又增加了迭代运算能力。

b. 混合计算机系统

把模拟机和数字机通过接口电路联在一起,构成一个混合计算机系统(图 1.1-1)。

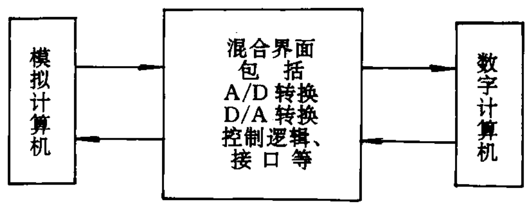

图 1.1－1　混合计算机系统

混合仿真综合了数字仿真和模拟仿真的优点,克服了它们各自的缺点,适宜于快速仿真的研究,以及对于参数寻优、统计分析等方面的应用,另外在半实物仿真中可以用数字计算机解算一些复杂函数。混合仿真涉及的器件多于模拟机或数字机,所以价格昂贵,应用受到限制,但在一些大型或特大型且控制要求高的系统中仍离不开混合计算机仿真。

随着微型数字计算机的大量普及,价格也日益下降,在国际、国内市场,微型数字机已占主流,数字仿真越来越被普遍采用并逐步替代了传统的模拟仿真。

在计算机硬件飞速发展的同时,仿真软件也有很大的发展,国外,早在 60 年代就出现了多种仿真语言,到目前为止,已形成了许多各具特色的仿真语言,常见的有:PSL,CSMP,CSSL,CSS,DARE—P 等。国内,70 年代后期在引进移植和研制数字仿真语言及软件上做了不少工作,如移植和开发了 CSSP(连续系统仿真程序)就是改进 CSS 的软件。80 年代以来也自行开发 SBASIC 及 SSL(III)语言。

在仿真算法方面,在时域仿真中求解微分方程初值问题的经典数值积分法,如龙格—库塔法和 Adams 法,现在仍得到了广泛应用;在控制系统的仿真中,由于仿真技术和现代控制理论相结合已出现了以采样理论为基础的仿真算法,如 Z 变换法和状态转移法等;为了适应快速仿真的需要,出现了一些快速仿真算法,如时域矩阵法,增广矩阵法。替换法等。而在频域仿真中,利用奈奎斯特法和波德图法进行幅相特性计算和稳定性判别亦已有了很大的进展。此外,根轨迹法仿真及曲线绘制均有广泛的应用。

本书将介绍数字仿真原理及各种算法和用 C 语言编制的程序。

1.2　仿真研究步骤

仿真是研究系统普遍采用的先进方法。图 1.2－1 的数字仿真流程图表示了仿真过程。

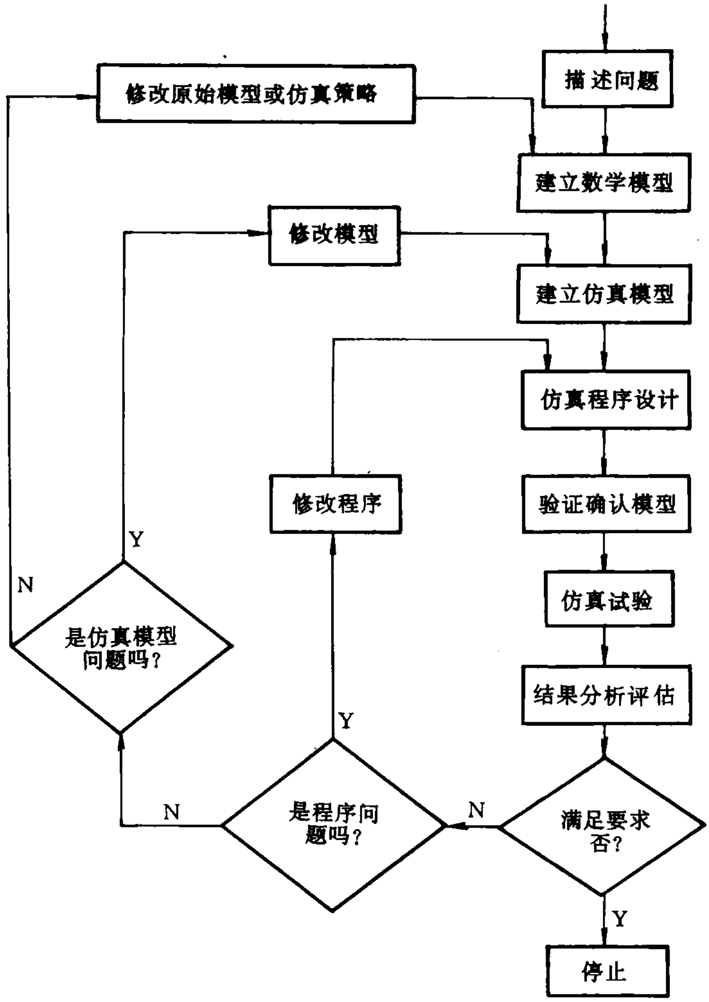

图 1.2－1　数字仿真流程图

1.2.1　建立系统的数学模型

对于一些系统可以通过基本定律，如牛顿定律、克希霍夫定律来建立数学模型，而对很多系统，由于系统的复杂性，难于写出用数学表达式表示的数学模型，则必须利用实验方法获得实验数据，通过系统辨识技术建立数学模型。数学模型是系统仿真的研究依据，所以数学模型的准确性是十分重要的。

1.2.2　建立仿真模型

一般的数学模型都不能直接编制程序并用计算机求解，通常必须把数学模型转换成适宜编程并能在计算机上运行的模型—仿真模型。也就是需要通过一定的算法对原系统的数学模型进行离散化处理，就连续系统而言，就是建立相应的差分方程再由计算机进行求解。

1.2.3 编制仿真程序

对于非实时仿真，可用一般高级语言依据相应的算法编程。而对于实时仿真往往采用汇编语言与高级语言共用的方式进行编程。

1.2.4 程序调试、验证模型、实验结果分析并确定实验方案

1 调试程序

调试程序的首要任务是检查并纠正程序的错误，使其在计算机上运行通过，并保证程序处于正确的工作状态。

2 验证模型

通过运行程序，用仿真实验数据与实际系统运行观测的数据结果相比较的方法，检验、确认模型是代表了实际系统，反映了实际系统运行过程的特性。

3 根据实验结果的分析，确定实验方案

选择合理的参数实验范围，安排用较少的实验次数来达到预期的效果。如果结果不符合原有的设计要求，就应寻找原因并通过修改程序或修改仿真模型，反复多次运行程序直至达到设计要求。

从仿真流程图中可以看出，仿真研究是一个动态迭代过程，通过迭代过程逐步获取系统特性的信息。

1.3 系统仿真的特点

1.3.1 仿真的实验性质

由仿真的定义可知，仿真是在模型上进行实验，因此仿真基本上是一种通过实验来研究系统的综合实验技术，具有一般实验的性质。不论是利用仿真技术进行系统分析还是设计，都必须通过一系列实验来完成。所建立的仿真模型应具有实验的性质，即模型与原型的功能及参数之间应有相似性和对应性。

1.3.2 数字仿真与解析法

解析法是应用数学推导、演绎去求解数学模型的方法，而数字仿真是通过计算机在数学模型上进行一系列实验来研究问题的方法。

1 解析法求解问题得出对问题的通解，而数字仿真的每一次运行只能给出在特定条件的数值解(特解)

如一个二阶力学系统是由质量、弹簧、阻尼器组成(图 1.3－1)。物体受到随时间变化的作用力 $Kf(t)$、正比于物体运动加速度的质量所产生的惯性力 $M\ddot{y}$、正比于弹簧伸缩位置的弹簧力 Ky、正比于物体运动速度的阻尼器所产生的阻尼

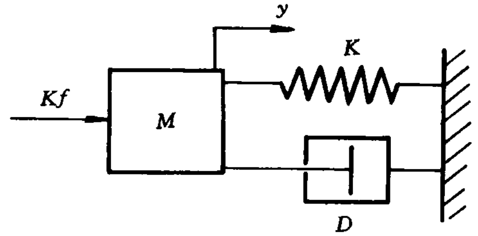

图 1.3－1 二阶力学系统

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

力 $B\dot{y}$ 的共同作用。当质量 M,弹簧刚度 K 为定值时,求出外力与阻尼器阻尼系数之间的关系。

由力学定律可知,该系统的数学模型为

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = Kf(t) \tag{1.3-1}$$

采用解析法,改写式(1.3-1)为

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = \omega^2 f(t) \tag{1.3-2}$$

式中

$$2\zeta\omega = \frac{B}{M},\ \omega^2 = \frac{K}{M}$$

特征方程为 $s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2 = 0$ (1.3-3)

由式(1.3-3)解得特征根

$$s = \frac{-2\zeta\omega \pm \sqrt{4\zeta^2\omega^2 - 4\omega^2}}{2} = -\zeta\omega \pm \omega\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

当 $\zeta = 0$,系统发生等幅振荡;当 $0 < \zeta < 1$,系统产生衰减振荡;

当 $\zeta \geqslant 1$,即 $B^2 \geqslant 4MK$ 时,如 $M = 1$,则 $B^2 \geqslant 4K$ 时,系统不发生振荡。

通过解析法所得的结论,可以全面地了解 B, M, K 三者之间的关系对动态性能的影响。

数字仿真每次得到的结果只是在给定参数条件下的数值解(特解),为了研究参数变化对系统特性的影响,需要多次反复运行不同参数条件下的仿真运算,因此所得的结论不容易获得对系统性能的一般解(通解)。

从数学模型形式来看,解析法是比较成熟的公式,而数字仿真是一个特殊形式下的公式。

2 **用解析法所能求解的问题是有限的,而仿真适应范围广**

实际中的许多问题,用解析法是不能或难以解决的,因为用解析法求解问题,要求将系统的数学模型用一些特殊形式的数学公式表示,如代数方程、微分方程。为了能用较成熟的解析法求解,数学模型不能太复杂、阶次也不能太高,这往往需要对系统进行抽象或近似,尽可能的简化数学模型,但模型的过度简化使系统可能失去实际意义,以至使系统无法得到完整的、特殊形式的、并可用解析法求解的数学模型。由于大多数实际系统是非线性、分布参数的或高阶的复杂系统,其数学模型是不易或不能用解析法求解的、非线性因素不能略去、高阶的复杂系统,就必须使用仿真技术。原则上仿真对于系统的数学模型的形式及复杂程度是没有限制的,但由于仿真是通过一系列实验来进行研究的,当增加模型的复杂程度时,计算量也会迅速增加。因此任一个系统采用哪一种方法求解时,建议先考虑采用解析法,当系统比较复杂,采用解析法相对较困难时,则采用仿真方法。在有些情况下,可先将模型抽象、简化成能用解析法求解的、较方便的形式,而后逐步考虑到实际或更复杂情况,再采用仿真方法进行研究。这种情况是对仿真是作为一种补充手段而应用的,如果系统太复杂,完全不能采用解析法时,仿真将是唯一的方法。

1.3.3 数字仿真与数值求解

数字仿真是指建立系统的数学模型并在计算机上运行和分析的整个过程;数值求解则是仿真所采用的在计算机上求解数学模型的方法。对于连续系统常常利用数值解法将其数学模型转换成适合于计算机编程的仿真模型。数值求解一般只是对数学模型在特定条件下进行一次数值解算,并不构成仿真,而仿真是一种实验方法,一般需要在不同条件下多次运行模型,通

过在全过程运行时间内对所观测的实验结果进行分析来求解问题。数值求解每次运行只完成仿真的一次“解算”，只是整个仿真过程的一环，所给出的解答只是一组特定条件下的特殊解，只说明系统在这个特定条件下的性能。而要研究系统中各种因素及它们之间的关系发生变化对系统性质的变化，只能通过仿真用多次实验的方法进行分析，而不是由仅获得一次特定参数条件的数值得出。在某种意义上可说，数学仿真与数值求解关系如森林与树木之间的关系，确切地说，仿真是运行模型而不是求解模型。

另外从数学模型的形式来看，数值求解是要将整个系统的数学模型整理成一组方程式的形式，这对于实际的复杂的系统是难以做到的；仿真则用建立各子系统或环节的“模块化模型”，以及确定各模块之间的连接关系来进行仿真。当然“模块化”模型与实际模型的变量、结构及参数之间有相对应和相似性，以保证仿真研究的直观和方便。

第二章　连续系统数值积分法的时域数字仿真

数字仿真是用数学模型代替实际系统在计算机上进行实验研究。建立描述控制系统运动的数学模型是数字仿真的先决条件。描述控制系统的数学模型的形式不止一种，它们各有特长和最适用的场合，彼此之间也有紧密的联系，要能灵活地运用数学模型分析具体问题，就要掌握这些数学工具的使用和彼此间的相互转换。

根据自动控制理论可知，描述控制系统的主要数学模型有微分方程、状态空间表达式等形式的时域描述法和用传递函数、频率特性描述的频域描述法。这两种形式又可互相转换。本章以时域描述的常见的连续系统作为研究对象，介绍连续系统的数学模型、数学模型的转换、数学模型转换成仿真模型的方法以及采用数值积分法的几个数字仿真程序的程序编制原理及使用。

2.1　连续系统的数学模型

2.1.1　连续系统定义

凡是系统的输入量是时间 t 的连续函数，无论其输出量是连续单调函数或是单值或是多值的函数如图 2.1－1 所示，均称这个系统是连续系统。我们所研究的系统是线性、定常的连续系统。

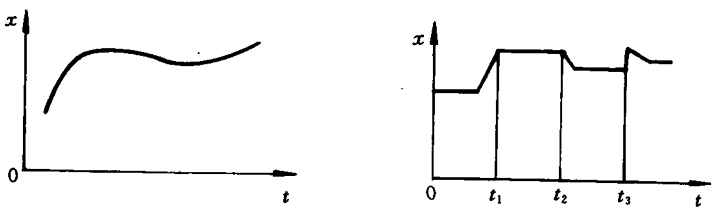

图 2.1－1　连续系统函数图形

2.1.2　线性定常连续系统的数学模型

一个连续系统的数学模型可以用微分方程、传递函数和状态空间表达式等形式表示。这些均在控制理论书籍中有详细介绍，此处只作简单介绍，以便在编制仿真程序时能选择合适的数学模型。

1　**数学模型的形式**

时域仿真常用的数学模型的形式有微分方程、传递函数和状态空间表达式。

(1) 微分方程

设连续系统的输出量为 $y(t)$，输入量为 $u(t)$，则系统用微分方程表示为

$$\begin{aligned}&\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y\\&=c_0\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+c_1\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}}+\cdots+c_{n-1}u\end{aligned}\tag{2.1-1}$$

式中 $a_1,a_2,\cdots a_{n-1},a_n,c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$为常数。

(2) 传递函数

对式(2.1－1)等号两边逐项进行拉氏变换，并考虑初值为零时，可得到

$$\begin{aligned}&s^nY(s)+a_1s^{n-1}Y(s)+a_2s^{n-2}Y(s)+\cdots+a_nY(s)\\&=c_0s^{n-1}U(s)+c_1s^{n-2}U(s)+c_2s^{n-3}U(s)+\cdots+c_{n-1}U(s)\end{aligned}$$

式中 $Y(s)$——系统输出的拉氏变换；

$U(s)$——系统输入的拉氏变换

系统的传递函数

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c_0s^{n-1}+c_1s^{n-2}+\cdots+c_{n-1}}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}\tag{2.1-2}$$

微分方程或传递函数是用系统的输入、输出之间的关系来描述系统的，表示了系统的外部特征，所以称其为外部模型。

用微分方程表示的系统可以是非线性或线性系统，而对于传递函数表示的系统，只适用于单输入—单输出的线性定常系统，所以传递函数的模型表示有一定的局限性。

(3) 状态空间表达式

状态空间表达式可以由两个途径获得，由微分方程、系统模拟图导出，本节将仅对微分方程推导作简单说明。

设系统由不含输入量导数项的 n 阶微分方程表示。

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n y=u\tag{2.1-3}$$

定义 n 个状态变量为$x_1,x_2,\cdots x_n$，令

$$\begin{aligned}x_1&=y\\x_2&=\dot{x}_1=\frac{dy}{dt}\\x_3&=\dot{x}_2=\frac{d^2y}{dt^2}\\&\vdots\\x_n&=\dot{x}_{n-1}=\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\end{aligned}$$

写出各个状态变量的一阶微分方程形式

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2\\\dot{x}_2&=x_3\end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_1x_n - a_2x_{n-1} - \cdots - a_{n-1}x_2 - a_nx_1 + u$$

将上述 n 个一阶微分方程写成矩阵向量形式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{B}u & (2.1-4) \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} & (2.1-5) \end{cases}$$

式中：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdot & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ B_{n-1} \\ B_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 为系数矩阵，$\boldsymbol{x}$ 为状态变量向量。式(2.1-4)为状态方程，式(2.1-5)为输出方程，两式合称状态空间表达式。

状态空间表达式也可由传递函数求得。

由于状态空间表达式反映系统内部特性，又称为内部模型。这是一个由外部模型转化为内部模型的例子。

实际上，内外部模型可以互相转化，对于一个外部模型所对应的状态空间表达式，由于状态变量有不同的取法，因而可得到多种形式的状态空间表达式，这时多种状态空间表达式将对应同一个外部模型。也就是说对于一个确定的外部模型只对应一个确定的系统。判断几个状态空间表达式是否同属一个系统的方法将在后面有关段落讲述。

2.2 模型转化——实现问题

因为状态方程是一阶微分方程组，非常适宜用数字计算机求解，如果一个系统是用状态空间表达式描述的，便可直接编程求解。然后对于一些复杂的控制系统，其数学模型往往是通过实验得到的数据，经过辩识确定的，一般是用传递函数表示。为了便于数字仿真，必须把它们转换为状态空间表达式。把从已知系统传递函数去求相应的状态空间表达式的模型转化问题称为实现问题。

2.2.1 传递函数转换成状态空间表达式

转换采用的方法是状态变量图法，这个方法是从系统模拟方法中引伸出来的，所谓系统模拟方法是指用一些基本模拟单元，如加法器、积分器、放大器等去模拟用传递函数表示的复杂系统。用基本模拟单元模拟系统的传递函数得到的图形是系统模拟图，在系统模拟图上标上状态变量的图形是状态变量图，然后再求出状态空间表达式。

下面通过一些简单的例子说明，如何由状态变量图法得到传递函数转换成的状态空间表达式。如初始条件为零的积分器，代表一个简单系统。系统的传递函数为 $G(s)=1/s$。该系统的模拟图如图 2.2－1 (a)所示，设系统的状态变量为 x，在积分器的输入标上状态变量微分 $\dot{x}$，在积分器的输出标上状态变量 x，得到系统的状态变量图如图 2.2－1 (b)所示。

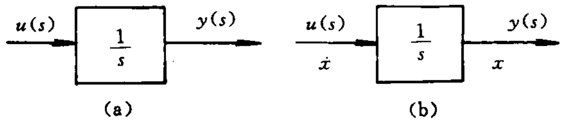

图 2.2－1　积分器的系统模拟图和状态变量图

由状态变量图根据积分器的输入、输出关系写出：状态方程 $\dot{x}=u$ 和输出方程 $y=x$，这两个方程表示了传递函数转换的状态空间表达式。

对于带反馈的积分器，其传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s+a}$$

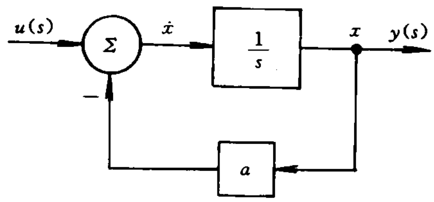

图 2.2－2　带反馈积分器的状态变量图

其中：a 是反馈系数，它的状态变量图如图 2.2－2 所示。图中 a 是放大器，$\sum$是加法器。可见系统由积分器、加法器和放大器组成。

由积分器输入、输出关系得到

$$\begin{cases}\dot{x}=-ax+u & (2.2-1)\\ y=x & (2.2-2)\end{cases}$$

从上面得到由系统模拟图到状态变量图并导出状态空间表达式的步骤如下：

① 根据系统的传递函数，画出系统模拟图，n 阶系统有 n 个积分器；

② 把积分器输出处定为状态变量 x，积分器输入处为状态变量微分 $\dot{x}$，并把状态变量 x 和状态变量微分 $\dot{x}$ 分别标在积分器输入和输出处，得到状态变量图；

③ 根据积分器输入、输出的方程写出系统的状态方程及输出方程。

对于高阶、复杂系统采用级联法、串联法和并联法得到代表实际系统传递函数的系统模拟图及相应的状态变量图，依据同样方法求得状态空间表达式。通过下面的例子来说明这三种方法并推广到一般情况的分析。

一个三阶系统的传递函数有以下三种形式：

分子、分母为微分方程的多项式

$$G(s)=\frac{s^2+3s+2}{s^3+7s^2+12s} \tag{2.2-3}$$

将分子分母为微分方程的多项式化成几个一阶环节传递函数串联的乘积

$$G(s)=\frac{(s+1)(s+2)}{s(s+3)(s+4)} \tag{2.2-4}$$

将分子分母为微分方程的多项式化成几个一阶环节传递函数并联之和

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com