

阶梯奥数

主编 / 陈国强

本书适用于七、八年级



脑筋急转弯

汤姆写信时，把收信人和寄信人的地址写反了，结果把信寄回自己家中，不过他又不花一分钱又把信寄给收信人了，为什么？

答案：

他写上“查无此人”，重新投回邮筒。

上海科学普及出版社



责任编辑 / 郭子安

特约编辑 / 赵 毅

封面设计 / 零 语

本书适用于七、八年级

ISBN 7-5427-2458-4



9 787542 724588 >

ISBN 7-5427-2458-4/O·84

全套定价: 46.00 元 (共二册)

阶 梯 奥 数

2(上)

(本书适用于七、八年级)

陈国强 主编

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

阶梯奥数.2/陈国强主编. —上海:上海科学普及出版社,2003.6

ISBN 7-5427-2458-4

I.阶... II.陈... III.数学课—初中—教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 047604 号

责任编辑 郭子安

特约编辑 赵 毅

阶梯奥数 2(上)(下)

陈国强 主编

上海科学普及出版社出版发行

(上海中山北路 832 号 邮政编码 200070)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷

开本 640×935 1/16 印张 39.25 字数 785000

2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—8100

ISBN 7-5427-2458-4/O·84 定价: 46.00 元(上、下)

本书如有缺页、错装或损坏等严重质量问题
请向出版社联系调换

内 容 提 要

本书是为小学高年级和初中阶段在数学学习上学有余力的优秀学生提供的竞赛培训教材或数学较好者自学的课外读物。

该书是一些长期在第一线从事数学竞赛数学的教师多年实践的知识积累和总结。按照学生所学基础知识的程度,由浅入深、从易到难、分门别类地把内容归纳成许多专题,在每个专题中力求简炼地介绍知识的由来、要点和重要定理及公式,再通过典型的例题和练习来展开知识的探究,并进行归纳和总结。从而使学生一级一级地沿着知识的阶梯循序渐进,这种做法将有利于培养学生学习数学的兴趣和自信心。

序

现在我们常说的一个名词是“素质教育”。到底素质教育指的是什么？是不是简单地指那些课外的活动？学生除了正常的文化课学习以外，再搞一些舞蹈、书法班的训练，就算是得到素质教育了？不可否认，艺术教育也提高学生的素质。但是素质教育的内容也许应该更加广一些，我们学生现在所需要的素质也应该包括文化课的素质。

我对中学的教育也很感兴趣。曾经认识了几位中学的校长，我们对学校素质教育的看法在很大程度上有相同之处，大家认为素质教育也应该体现在文化课的教育中，特别是数学教育中。在进华中学陈国强校长的倡导下，几十位多年从事中学数学提高教育的大学教授、数学博士、奥数教练员、中学资深数学教师聚集一起，开始了在数学课程教育中的实验。我们的主要想法是通过数学课程的教育让学生认识数学、理解数学、掌握数学，这就是学生所需要的素质。这个实验已经进行了六年多了，收到了不错的效果，培养出一大批有扎实数学基础的初中毕业生。

现在的这套书，是实验的一部分，希望暨此能够提高学生学习数学的兴趣。很小的时候我也读过一些有趣的数学小册子，但现在这些小册子很难找了，不敢说现在的这套书十全十美了，但是对于希望理解数学、学习奥数的小学高年级和初中学生，应该是有帮助。我

SiWeiXunLian

很希望这套书能够受到学生们的喜欢,也希望看到有更多的这类书能够出版。

上海交通大学数学系教授 周 青

2003. 3. 25

目 录

第一讲	有理数的巧算	1
第二讲	巧用绝对值	11
第三讲	一元一次方程	17
第四讲	一次方程组	23
第五讲	一次方程组的应用	31
第六讲	列方程组解应用题	39
第七讲	设而不求——巧用辅助元解题	48
第八讲	一次不等式(组)	54
第九讲	含绝对值的一次方程与不等式	62
第十讲	不等式的应用	69
第十一讲	整式的乘法和除法	75
第十二讲	乘法公式的运用	81
第十三讲	综合除法与余数定理	87
第十四讲	代数式的化简与求值	95
第十五讲	因式分解(一)	102
第十六讲	因式分解(二)	106
第十七讲	对称式与轮换对称式的因式分解	110
第十八讲	归纳与发现	115
第十九讲	分式运算	124
第二十讲	部分分式	133
第二十一讲	配方法应用	143
第二十二讲	线段	152
第二十三讲	角	161
第二十四讲	三角形的内角和	169
第二十五讲	平行线	177



脑筋急转弯

汤姆写信时，把收信人和寄信人的地址写反了，结果把信寄回自己家中，不过他 not 花一分钱又把信寄给收信人了，为什么？



答案：

他写上“查无此人”，重新投回邮筒。

第二十六讲	整数的整除性	185
第二十七讲	质数与合数(二)	190
第二十八讲	奇数与偶数(二)	197
第二十九讲	完全平方数	204
第三十讲	待定系数法	211
第三十一讲	不定方程(二)	217
第三十二讲	逻辑推理(二)	226
第三十三讲	抽屉原理(二)	239
第三十四讲	二次根式及其运算	246
附	参考答案及提示	254

 智力魔方

林肯在哪个剧院遇刺身亡?

 答案:

华盛顿剧院。

第一讲 有理数的巧算

有理数的计算同整数与小数的计算一样,既有知识要求,又有能力要求,当然运算的法则、定律、性质是进行计算的依据,但要使计算进行得快且准确,还必须掌握运算的技巧,并对算式进行认真观察,迅速剖析算式的特点及数与数之关系,巧妙、灵活地运用运算定律,有时还可以运用合理改变运算顺序或凑整或分解相约或裂项相约或以符号代数等方法,使计算能简单易行.而熟练地掌握这些技巧对开拓知识,启迪思维,培养综合分析、推理能力和灵活、快速、准确的运算能力,使智能得到协调发展,都有很大的帮助.

【例1】 计算下列各式:

$$(1) -29\frac{25}{27} \times 25;$$

$$(2) 41\frac{24}{31} \div (-7);$$

$$(3) \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8} - \frac{5}{42}\right) \times 336 - 35.75 \times 2\frac{4}{5} + \left(-25\frac{1}{4}\right) \times \left(-2\frac{4}{5}\right) + 4.5 \times \left(-2\frac{4}{5}\right).$$

分析:(1)、(2)可合理拆分,转化为较简单的计算.

(3)前一部分可用分配律,后一部分有共同的因数 $2\frac{4}{5}$ 可逆用分配律.

$$\begin{aligned} \text{解:}(1) -29\frac{25}{27} \times 25 &= -\left(30 - \frac{2}{27}\right) \times 25 \\ &= -\left(750 - \frac{50}{27}\right) = -748\frac{4}{27}. \end{aligned}$$

脑筋急转弯

夏天,小丽家里既没有电扇,也没有折扇,为什么她却觉得热?

答案:

她家装有空调。

$$(2) 41 \frac{24}{31} \div (-7) = -\left(42 - \frac{7}{31}\right) \div 7$$

$$= -\left(6 - \frac{1}{31}\right) = -5 \frac{30}{31}.$$

$$(3) \text{原式} = \frac{1}{12} \times 336 - \frac{1}{8} \times 336 - \frac{5}{42} \times 336 - 2 \frac{4}{5} \times$$

$$\left(35 \frac{3}{4} - 25 \frac{1}{4} + 4 \frac{1}{2}\right) = 28 - 42 - 40 - \frac{14}{5} \times 15 = -96.$$

智力魔方

北京猿人化石
是由中国哪位考古
学家发现的?

【例2】 计算下列各式:

$$(1) \frac{267+123 \times 894}{894 \times 124 - 627}; (2) 1998 \div 1998 \frac{1998}{1999}.$$

分析: (1) 式注意 $267+627=894$.

$$\text{解}(1) \text{原式} = \frac{894+123 \times 894 - 627}{894 \times 124 - 627}$$

$$= \frac{894 \times 124 - 627}{894 \times 124 - 627} = 1.$$

$$(2) \text{解一: 原式} = 1998 \div \frac{1998(1999+1)}{1999}$$

$$= 1998 \times \frac{1999}{1998 \times 2000} = \frac{1999}{2000}.$$

$$\text{解二: 原式} = 1 \div \left(1998 \frac{1998}{1999} \div 1998\right)$$

$$= 1 \div \left(1 + \frac{1}{1999}\right) = \frac{1999}{2000}.$$

答案:

裴文中。

说明: (2) 解二中运用了等式: $a \div b = 1 \div (b \div a)$.

【例3】 计算下列名式:

$$(1) 99 + 99 \times 99 + 99 \times 99 \times 99 + 99 \times 99 \times 99 \times 99;$$

$$(2) 2000 + 1999 - 1998 - 1997 + 1996 + 1995 - \dots + 8 + 7 - 6 - 5 + 4 + 3 - 2 - 1.$$

$$\text{解: (1) 原式} = 99(1+99) + 99 \times 99 \times 99 \times (1+99)$$

$$= 99 \times 100 \times (1+99 \times 99)$$

$$= 9900 \times 9802$$

$$= 97039800.$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 解法一: 原式} &= 2000 + (1999 - 1998) - (1997 \\
 &\quad - 1996) + (1995 - 1994) - (1993 \\
 &\quad - 1992) + \\
 &\quad \dots + (8 - 6) + (7 - 5) + (4 - 2) \\
 &\quad + (3 - 2) \\
 &= 2000 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 \\
 &\quad + 1 - 1 = 2000.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解法二: 原式} &= (2000 - 1998) + (1999 - 1997) + \\
 &\quad (1996 - 1994) + (1995 - 1993) + \dots \\
 &\quad + (8 - 6) + (7 - 5) + (4 - 2) + (3 - \\
 &\quad 1) = 2 + 2 + 2 + 2 \dots + 2 + 2 + 2 + 2 (\text{共} \\
 &\quad 1000 \text{ 个 } 2 \text{ 相加}) \\
 &= 2000.
 \end{aligned}$$

【例 4】 计算下列各式:

$$(1) (789 + 789789 + 789789789) \div (987 + 987987 + 987987987);$$

$$(2) \frac{352}{495} + \frac{3552}{4995} + \frac{35552}{49995} + \frac{355552}{499995} + \frac{3555552}{4999995}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解: (1) 原式} &= [789 \times (1 + 1001 + 1001001)] \div \\
 &\quad [987 \times (1 + 1001 + 1001001)] \\
 &= \frac{789}{987} = \frac{263}{329}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 原式} &= \frac{32 \times 11}{45 \times 11} + \frac{32 \times 111}{45 \times 111} + \frac{32 \times 1111}{45 \times 1111} + \\
 &\quad \frac{32 \times 11111}{45 \times 11111} + \frac{32 \times 111111}{45 \times 111111} \\
 &= \frac{32}{45} + \frac{32}{45} + \frac{32}{45} + \frac{32}{45} + \frac{32}{45} = \frac{32}{9} = 3 \frac{5}{9}.
 \end{aligned}$$

【例 5】 计算下列各式:

$$(1) (999999999 \times 999999999) \div (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1);$$

脑筋急转弯

路易十四及王后被砍头后他们的儿子当上了什么?

答案:

当上孤儿。

$$(2) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \left(1 + \frac{1}{6}\right) \times \left(1 + \frac{1}{8}\right) \times \left(1 + \frac{1}{10}\right) \times \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \left(1 - \frac{1}{7}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right).$$

解:(1) 原式

$$= [999999999 \times 999999999] \div \{(1+8) + (2+7) + (3+6) + (4+5) + (5+4) + (6+3) + (7+2) + (8+1) + 9\}$$

$$= \frac{999999999 \times 999999999}{9 \times 9}$$

$$= 111111111 \times 111111111 = 123456789987654321.$$

(2) 原式

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{6}\right) \times \left(1 - \frac{1}{7}\right) \times \left(1 + \frac{1}{8}\right) \times \left(1 - \frac{1}{9}\right) \times \frac{11}{10}$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{6} \times \frac{6}{7} \times \frac{9}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{11}{10}$$

$$= \frac{11}{10} = 1 \frac{1}{10}.$$

【例6】计算下列各式:

$$(1) 1 \frac{1}{3} + 3 \frac{1}{15} + 5 \frac{1}{35} + 7 \frac{1}{63} + 9 \frac{1}{99} + 11 \frac{1}{143} + 13 \frac{1}{195} + 15 \frac{1}{255} + 17 \frac{1}{323};$$

$$(2) \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \frac{1}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{1}{97 \times 98 \times 99} + \frac{1}{98 \times 99 \times 100}.$$

解:(1) 原式

$$= (1+3+5+7+9+11+13+15+17)$$

$$+ \left(\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} + \frac{1}{11 \times 13} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{13 \times 15} + \frac{1}{15 \times 17} + \frac{1}{17 \times 19} \right)$$

智力魔方

北京猿人化石
在哪一年被发现?

答案:

1929 年。

$$\begin{aligned}
&= \frac{(17+1) \times 9}{2} + \frac{1}{2} \times \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{17}\right) + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{19}\right) \right] \\
&= 81 + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{19}\right) \\
&= 81 + \frac{9}{19} \\
&= 81 \frac{9}{19}.
\end{aligned}$$

(2) 原式

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3}\right) + \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4}\right) + \left(\frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5}\right) \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{97 \times 98} - \frac{1}{98 \times 99}\right) + \left(\frac{1}{98 \times 99} - \frac{1}{99 \times 100}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{99 \times 100} \right] \\
&= \frac{4949}{19800}.
\end{aligned}$$

说明:(1)的整数部分的加法,实质是等差数列的求和问题,一般,一列数 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$, 若有 $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = \cdots = a_2 - a_1$, 则称这一列数为等差数列, 对等差数列有 $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$. 所以 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{2} [(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + a_{n-1} + a_2 + (a_n + a_1)] = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 特殊情况 $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, 又(1)的分数部分的和及(2)的求和都采用了拆项相消的方法, 而对分子相同, 而分母具有 $n(n+k)$ 或 $n(n+k)(n+2k)$ 等形式的多项分数和的问题, 可采用拆项法试一试.

【例7】求和 $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{15}}$

脑筋急转弯

一个爱好书法的人,为什么有用黑墨水写出红字来?

答案:

看看他写的字就知道了。

智力魔方

欧洲最大的宫殿是哪座？

解法一：因为： $\frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{15}} = \frac{1}{2^{14}}$

$$\begin{aligned} \text{所以：} S &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{15}} - \frac{1}{2^{15}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{14}} - \frac{1}{2^{15}} \\ &= \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{15}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{15}} \\ &= \frac{32767}{32768}. \end{aligned}$$

$$\text{解法二：} S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{15}} \quad (1)$$

$$(1) \times \frac{1}{2} \text{ 得 } \frac{1}{2}S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{16}} \quad (2)$$

$$(1) - (2) \text{ 得：} \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{16}}$$

$$\text{所以 } S = 1 - \frac{1}{2^{15}} = \frac{32767}{32768}.$$

答案：

卢浮宫。

说明：本题解法一充分利用了 $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ 的性质，而解法二利用了 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$ ，而 S 的和式中第二个加数开始每一个加数都是前一个数的 $\frac{1}{2}$ 。

$$\begin{aligned} \text{【例 8】 求和 } S &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{60} \right) + \\ &\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{60} \right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \frac{3}{6} + \cdots + \frac{3}{60} \right) + \cdots + \\ &\left(\frac{58}{59} + \frac{58}{60} \right) + \frac{59}{60}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{解: } S &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60} + \frac{3}{60} + \cdots + \frac{59}{60} \right) \\
&= \frac{1}{2} + 1 + \frac{6}{4} + 2 + \frac{15}{6} + 3 + \frac{28}{8} + \cdots \\
&\quad + 29 + \frac{30 \times 59}{60} \\
&= (1 + 2 + 3 + \cdots + 29) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \cdots + \frac{59}{2} \right) \\
&= \frac{(1+29) \times 29}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{(1+59) \times 30}{2} \\
&= 885.
\end{aligned}$$

【例 9】 计算: $\left(\frac{519}{123} + \frac{657}{324} + \frac{573}{947} \right)$

$$\begin{aligned}
&\times \left(\frac{657}{324} + \frac{573}{947} + \frac{246}{173} \right) - \left(\frac{519}{123} + \frac{657}{324} + \frac{573}{947} + \frac{246}{173} \right) \\
&\times \left(\frac{657}{324} + \frac{573}{947} \right).
\end{aligned}$$

解: 设 $\frac{657}{324} + \frac{573}{947} = A$, $\frac{657}{324} + \frac{573}{947} + \frac{246}{173} = B$.

$$\begin{aligned}
\text{则原式} &= \left(\frac{519}{123} + A \right) \times B - \left(\frac{519}{123} + B \right) \times A \\
&= \frac{519}{123} \times B + A \times B - \frac{519}{123} \times A - B \times A \\
&= \frac{519}{123} \times (B - A) = \frac{519}{123} \times \frac{246}{173} = 6.
\end{aligned}$$

【例 10】 在数 1, 2, 3, 4, ..., 2000, 2001, 2002 前任意添“+”或“-”号并依次运算, 其可能得到的最小非负数是多少?

脑筋急转弯

为什么导弹能以每小时几十公里的速度超低空飞行?

答案:

放在汽车顶上的导弹。

智力腴方

上海体育场位于哪个区？

解：由于 $1+2+3+\cdots+2002=\frac{1}{2}\times(2002+1)\times 2002=1001\times 2003$ 是一个奇数，而将和式中的任何一个数的“+”改为“-”，其运算结果的奇偶性不变（例如将“+7”改为“-7”则其运算结果为原结果减去14，是减去一个偶数，故奇偶性不变），所以不管怎样添“+”和“-”其运算结论只能是奇数，故所得最小非负数不能是零，下面就要讨论能否找到一种符号添加的方法，使其结果为1。而考虑四个连续自然数添加“+”或“-”号后，可使结果为 $n-(n+1)-(n+2)+(n+3)=0$ ，则按下法添加“+”、“-”号，即 $(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\cdots+(1993-1994-1995+1996)+(1997-1998-1999+2000)-2001+2002=1$ ，所以，所求的最小非负数是1。

说明：本题解法中有三个步骤：(1)考虑极端情况，发现所有数的和是一个奇数。(2)再运用奇偶分析证明所得最小非负数不可能是0，最小只可能是1。(3)再构造出一种得出结果是1的方法。

练 习 题

计算下列各式：

$$1. 0.38 \times 7 \frac{3}{5} + 0.38 \div 2 \frac{1}{2} + 38\% \times 2.$$

$$2. 36 \times 25\% + \frac{1 \frac{1}{4} \times 2}{1 \frac{3}{4} + 1.25} + 1 \div \frac{2}{5} + 2.5 \div \frac{3}{22}.$$

$$3. \frac{1}{2 \times 7} + \frac{1}{7 \times 12} + \frac{1}{12 \times 17} + \frac{1}{17 \times 22} + \cdots + \frac{1}{92 \times 97} + \frac{1}{97 \times 102}.$$

$$4. 3 \frac{1}{6} \times \left(7 \frac{1}{3} - 3 \frac{1}{7} \right) \times \frac{6}{19} \div 1 \frac{1}{21}.$$

答案：

徐汇区。