数理逻辑引论

李涛 张岩 刘峰 主编　　任世军 主审

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校“十二五”规划教材

数理逻辑引论

李　涛　张　岩　刘　峰　主　编
任世军　主　审

哈爾濱工業大學出版社

内容提要

数理逻辑是离散数学的重要组成部分之一，是计算机科学的数学基础。本书内容主要侧重于逻辑演算，即命题逻辑演算和一阶谓词逻辑演算，这些内容是构成数理逻辑其他分支的共同基础。全书共分 5 章，分别介绍了数理逻辑的研究对象、研究内容和研究方法；命题逻辑的基本概念、命题逻辑演算形式系统的组成、基本定理及其性质定理；一阶谓词逻辑演算形式系统的基本概念、组成、基本定理及其性质定理、一阶语言的语义等。

本书可用作高等院校计算机专业离散数学的教材或教学参考书，也可供从事计算机科学、人工智能方面的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑引论/李涛主编. ——哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011. 11

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3411 - 0

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①数理逻辑-高等学校-教材　Ⅳ. ①O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 223879 号

责任编辑　王桂芝

出版发行　哈尔滨工业大学出版社

社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006

传　　真　0451 - 86414749

网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn

印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司

开　　本　880mm×1230mm　1/32　印张 4. 625　字数 140 千字

版　　次　2011 年 11 月第 1 版　2011 年 11 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 3411 - 0

定　　价　16. 00 元

前　言

离散数学是大学计算机专业的基础数学课程，而数理逻辑是其重要组成部分之一，在算法设计、程序设计理论以及计算复杂性理论等方面都涉及数理逻辑的知识和理论。近年来，随着数理逻辑在计算机科学中的地位越来越被重视，需要加强数理逻辑在计算机专业中的知识普及与应用。

数理逻辑的内容通常包括证明论、递归论、模型论和公理集合论，以及作为它们共同基础的逻辑演算。对于计算机专业的本科生来说，考虑到逻辑演算在数理逻辑中的基础性以及在计算机科学中的广泛应用，本书把重点放在逻辑演算上，即逻辑演算的推理研究上。在目前相关的数理逻辑书籍中，有些把计算机科学中用到的数理逻辑知识放在离散数学书中介绍，但由于受篇幅限制，较难系统地描述数理逻辑的推理体系，很难满足计算机工作者的需要；有些书中的数理逻辑通常又过于专业化，其深度对于计算机专业的本科生来说难以接受。鉴于此，编者根据多年讲授该课的讲义整理而成此书，以此实现我们的初衷：一是希望能使学生在大学本科期间把数理逻辑的基本内容掌握好，使他们在学习其他相关课程或阅读相关文献资料时，不至于对其中的数理逻辑知识产生困难；二是希望通过对逻辑演算的讲解，即命题逻辑演算和一阶谓词逻辑演算的讲解，使学生感受到逻辑演算在计算机科学中的重要应用，更重要的是通过严格的形式化、公理化的逻辑推理方法，培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和严密的分析问题与解决问题的能力。

本书在成书过程中，软件教研室的王义和教授提出了许多宝贵的意见和建议，最后又详细地审阅了原稿，对本书的形成和改进起了重要作用。同时软件教研室的领导也给予了热情的鼓励和支持，在此一并表示衷心感谢。

由于作者水平有限，疏漏和不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2011.8

目　　录

第1章 绪 论

逻辑学是研究推理规律的科学。数理逻辑与传统逻辑在研究对象上没有实质性的区别,都是以逻辑推理本身作为研究的对象,区别在于研究的工具语言不同,传统逻辑以自然语言作为主要工具语言,而数理逻辑则是用数学符号语言,即借助于数学的符号化、公理化、形式化的方法,因此数理逻辑又称为符号逻辑或理论逻辑。在绪论部分,我们先从数理逻辑的发展简史来引入数理逻辑的研究内容,然后介绍一下什么是形式化公理系统,最后介绍一下数理逻辑与计算机科学的关系及其应用。

1.1 数理逻辑的发展简史

数理逻辑作为使用符号语言和数学方法来研究演绎推理和证明的科学,从17世纪70年代德国数学家、哲学家Leibniz提出之后,发展至今已有300多年的历史。在它的发展过程中,由逻辑数学化到数学逻辑化,始终将逻辑的内容和数学的内容交织在一起。就其逻辑方面来说,它在传统逻辑学的基础上演变成使用数学方法的现代形式逻辑,有自己独特的方法和组成部分;就其数学方面来说,随着逻辑问题转化为数学问题,它的很多部分,特别是20世纪以来取得的许多新成果已成为数学的分支。数理逻辑的发展史大体上可以分为三个阶段:第一阶段是数理逻辑萌芽和逻辑代数建立时期(17世纪70年代～19世纪50年代);第二阶段是逻辑演算建立和数理逻辑

定型化时期(19 世纪 50 年代 ～ 20 世纪 30 年代);第三阶段是数理逻辑发展的现代化时期(1930 年以来),包括证明论、模型论、递归论、集合论的形成和发展,以及非古典逻辑出现时期。

1. 数理逻辑萌芽和逻辑代数建立时期

把数学应用于思维领域,用数学的方法来研究思维形式和思维规律,首先得有一种数学类型作为必要条件,也就是符号化数学,而传统逻辑学的缺陷和不足满足不了这种需要,这就促进了传统逻辑学的变革,从而预示着新类型的逻辑学,即数理逻辑的产生。

Leibniz 不满于 Aristotle 的形式逻辑,认为应当将形式逻辑加以改造,使得新的逻辑学像数学那样精确严格。他希望能建立一个普遍的符号语言,可以区别日常语言的局限性和不规则性,同时一个完整的符号语言又应该是一个思维的演算,根据这种演算,思维和推理就可以用计算来代替。这样,推理的错误就只成为计算的错误,而不必考虑所用到的表达式的含义内容。这一设想涉及数理逻辑的本质特点,对于数理逻辑的产生具有划时代的意义,后世的研究大体上也是沿着这个方向前进的。符号语言和思维的演算是 Leibniz 提出的重要思想,这也正是数理逻辑的重要特征。

Leibniz成功地将命题形式表达为符号公式,提出了命题演算的原则和公理,建立了科学史上最早的逻辑演算,从而奠定了数理逻辑的基础,使他成为公认的数理逻辑发展史上的奠基人。

17 世纪数学的发展已日益完善,代数已达到完全符号化,能够用字母表示已知量和未知量,以及用符号表示运算,可以用代数方法来描述和研究几何图形,这些成就为用代数方法研究推理提供了线索。而用代数方法研究推理,就必须把命题的形式结构用符号和公式来表达,把推理中的前提与结论之间的关系,转化为公式与公式之

间的运算关系。Leibniz一生中曾作过多次努力，后又经过许多逻辑学家和数学家的工作，到了19世纪，英国的逻辑学家和数学家Hamilton和Morgan使用符号语言和代数的数学方法，通过对传统逻辑学的修补和改良，精确化了传统逻辑学，他们取得的成果对数理逻辑的发展起着一定的推动作用，在数理逻辑发展史上占有一定的重要性，为Boole建立逻辑代数铺平了道路。

19世纪上半叶，在产业革命的影响下，欧洲各国自然科学有了迅速的发展，特别是数学由长期为天文学、物理学和工程技术等服务，转向纯数学本身的研究，而这些研究都涉及数学严格性的要求及深刻的逻辑问题，而这些问题又都是在传统逻辑范围内解决不了的，这就进一步激励数学家和逻辑学家加快逻辑数学化的研究工作。在Leibniz逻辑演算设想的基础上，Boole最早把对代数系统的解释推广到逻辑领域，从而建立了逻辑代数。Boole的主要工作是仿照数学的方式来发展逻辑，他确信语言的符号化会使逻辑严密化。他成功地把代数方法应用于逻辑，建立了“布尔代数”，部分实现了Leibniz的设想，同时也扩展了传统逻辑的范围，解决了许多传统逻辑难以解决的问题。由于Boole在引进符号时，允许先不加解释，等形式地建立起代数系统后再做解释，这就加强了数学化的倾向。尽管Boole取得了上述成就，但他所建立的代数并不成熟。继Boole之后，Jevons、Peirce、Huntington等对布尔代数作了改进，并使之逐步完善。德国的数学家Schröder总结了前人的研究成果，将布尔代数构成一个演绎体系，从而使布尔代数臻于完善。他在《逻辑代数讲义》中对类演算、命题演算和关系演算进行了系统的整理。他提出逻辑代数的定理可以分为两组，而根据一个简单的互换法则就可以从一组定理的内容推导出另一组定理的内容，成功地用代数方法处理了演绎推理。

逻辑代数的建立和完善，打破了传统逻辑学的体系，说明思维的形式结构可以成功地用数学方法来处理，这对数理逻辑的发展产生了深远的影响。但是，就整个数理逻辑体系来说，它距离要找到理想完善的、能把数学纳入其中的公理系统这个目标来说，逻辑代数还只是初步的成果。

2. 逻辑演算建立和数理逻辑定型化时期

进入 19 世纪后，数学发生了一些本质的变化，许多迫切的问题已基本得到解决，于是数学的研究转向了基础的重建。这主要是指对它论证的逻辑严格性进行深入的探讨；对函数、连续性、极限、无穷等概念做出精确的定义；对负数、无理数等给予仔细的审查。到了 19 世纪中叶，终于获得了重要的成果：Frege 给出了一个完全的逻辑演算，使数理逻辑的发展出现了一个飞跃；Cantor 建立了集合论，这标志着数理逻辑由萌芽发展到真正创立的时期。

德国数学家、逻辑学家 Frege，在纯逻辑的领域中，他引进了量词、变量和命题函数，使数理逻辑具备了完全的表达能力，给出了逻辑的公理基础。数理逻辑创立时期的主要目标是要找到能把数学纳入其中的理想完善的公理系统，Frege 提出的谓词演算被看作是达到这一目标的最主要成就。另外，他还开辟了数理逻辑应用于数学基础研究的新方向。他深入研究数学的科学性质和数学思维的规律，努力把逻辑本身变成一个由公理、规则和定理构成的演绎体系。他的目标就是要从逻辑推导出全部数学，把数学真理性的证明看成完全依赖于逻辑的推理和规律。为此他发明了一种表意的概念语言，并应用于逻辑，结果是构造了初步自足的命题演算和谓词演算系统；应用于算术，第一次给出了自然数的精确定义。Frege 从逻辑推导出自然数，但这只能说明逻辑可以推导出算术中的一部分，而并不

能说明逻辑能够推导出全部算术，更不能说明逻辑能够推导出算术之外的全部数学。就在 Frege 致力于进一步构造算术基础，写完第二卷《算术的基本规律》时，Russell 于 1902 年 6 月 16 日写信告诉他发现了逻辑悖论，这使 Frege 感到极大震惊，因为这直接动摇了他正在从事工作的基础。这一历史事实也说明，由于数学这门学科的性质决定，要想把数学全部逻辑化是实现不了的。

19 世纪 70 年代，数学分析研究的发展，促使对不连续函数和连续统有了进一步的理解，这就直接牵涉到集合论的问题。到了近代，由于微积分的出现，更引起了对无穷小的讨论。19 世纪 20 年代 Cauchy 建立的极限理论，对无穷过程和无穷小的认识大大前进了一步。后来 Bolzano 通过对微积分的基本概念的严格表述，认识到实无穷的存在。但是，所有这些成就比起 Cantor 取得的成果只是初步的、不成熟的。

与 Frege 同时代，在数理逻辑发展史上另一个重要人物是德国数学家 Cantor，他超出算术之外，建立了集合论，是集合论的真正创始人。集合论的建立为全面理解数学科学的性质打下基础，从而对数理逻辑的创立和发展起着强有力的推动作用。

Cantor 建立的集合论是现代数学中的重要基础理论。这个理论把哲学中的无穷概念变成精确的数学研究的对象，把数学从潜无穷的观点转变到实无穷。这一方面把实数系从数的概念推进到集合概念，从而把数学基础的研究推进到一个新阶段；另一方面它从朴素的集合论逐步向抽象集合论过渡，这对现代数学的发展也有深刻的影响。由于 Cantor 的集合论把集合理解为是把我们的感觉或思维中的一些确定的、不同的对象（即集合的元素）汇合成一个总体，这就使得这个概念事实上失去了纯数学的性质，而取得了更有一般性的逻辑含义，因此集合论密切了数学与逻辑学的关系，集合论也是现

代数理逻辑的重要理论基础。事实上,从 1880 年以来,集合论和谓词演算之间的相互关系,一直影响着数理逻辑的发展。

19 世纪 20 ~ 30 年代,Gauss、Bolyai 以及 Lobachevsky 先后发现的非欧几何,打破了形而上学的空间观,从根本上改变了人们的几何观,使人们看到感性直观不能成为几何命题真假的根据,真假要靠证明,而且证明的概念本身要严格。几何学中的进展引起了人们对公理学的关注,这对数理逻辑的研究和发展产生了深远的、决定性的影响,促进了公理化方法的研究与发展。Hilbert 于 1899 年发表了名著《几何基础》,该书第一次给出了一个简明全面的公理系统,在他的系统中强调了逻辑推理,讨论了公理系统的无矛盾性、完备性和独立性,给出了证明公理系统独立性的一般方法及证明公理系统完备性的普遍原则。Hilbert 发展了公理方法,使之由古典的实质公理学,发展为现代的形式公理学,从而成为近代形式公理学的奠基人。同时期集合论和实数理论的研究也促进了公理法的使用和发展。《几何基础》的出版,深刻影响着数理逻辑和数学各个分支的产生和发展。例如命题逻辑、谓词演算、公理集合论、形式数论、近世代数等也是作为各个分支的公理化和各种不同的形式系统而出现的。

最后真正把逻辑演算定型化,对数理逻辑的发展起着承先启后作用的是英国的哲学家、数理逻辑学家 Russell,他对数理逻辑做出了多方面的创造性贡献和发展。他和 Whitehead 合著的三大卷《数学原理》,可以说是直到当时为止的数理逻辑成果的总结,总结了从 Leibniz 以来数理逻辑产生和发展过程中取得的成果。他构设了一个完全的命题演算和谓词演算系统,完成了逻辑演算定型化的工作,这标志着数理逻辑作为一门独立的学科已达到成熟阶段,并为数理逻辑下一阶段的发展提供了前提。他关于关系逻辑、摹状词、逻辑类型论以及给自然数下定义等成果,为丰富和扩大数理逻辑内容,推动

数学基础问题的进一步探讨也做出了积极的贡献。

Russell和Whitehead合著的《数学原理》发表之后,数理逻辑取得了迅速的发展。Russell构造的完全的逻辑演算体系,自以为找到了理想完善的、能把数学纳入其中的公理系统。Hilbert提出了解决数学基础问题的证明论方案,自以为这种方法解决了包括古典逻辑和古典数学的形式演绎系统问题。

3. 数理逻辑发展的现代化时期

从1930年开始,美籍奥地利数学家、逻辑学家Gödel发表了一系列重要成果,开辟了数理逻辑的新纪元。1930年,他发表的博士论文证明了谓词演算系统的完全性。1931年,他发表了著名的不完全性定理,证明了数论或分析或集合论的形式系统是不完全的,同时还证明了一个给定的形式系统的相容性。这些定理证明了Russell的构造是不完善的,Hilbert的方案是达不到的。这一重要发现,对整个数学产生了极大影响和推动,并开辟了数理逻辑的新纪元。从此数理逻辑进入了第三个发展阶段。此阶段数理逻辑相继取得了三个划时代的巨大成就:1931年,Gödel证明了不完全性定理;1933年,波兰的逻辑学家、逻辑语义学的创始人之一Tarski提出了形式语言的真理性概念;1937年,英国的逻辑学家Turing建立了图灵机的理论。

Gödel用精确的形式化的数学方法证明了形式系统的不完全性,这就表明尽管公理化、形式化在数学和逻辑中取得了重大成就,但仍然存在局限性。Gödel的不完全性定理的发现进一步密切了数学和逻辑的关系,它说明数学的发展离不开精致、协调和有效的逻辑结构,而逻辑的发展也离不开数学工具的使用和对数学真理的直接洞察力。

Tarski 在《形式语言中的真理概念》等著作中，探讨了语义学悖论产生的根源及其解决办法，证明了一个重要的结果，那就是在满足一定条件的形式语言中，可以无矛盾地建立其形式上正确、实质上充分的像真句子那样的语义学概念的定义。他首先做出了两对概念上的区别：一是逻辑与元逻辑的区别。元逻辑以逻辑为对象，研究形式语言和形式系统本身，也就是形式系统中作为符号串的表达式之间的关系；表达式与其意义之间的关系；形式系统与其应用之间的关系。二是对象语言与元语言的区别。通常把被断定的（被分析的）语言称为对象语言，把进行断定的（分析的）语言称为元语言，这就是语义层次。但在日常语言中没有做出这种区分，所以会产生语义悖论。在形式语言中，对象语言和元语言有了明显区分，因而不会产生语义悖论。

Turing 在《论可计算数及其在判定问题上的应用》中，分析了"可计算性"这一概念，第一次把计算和自动机联系起来，这对后世产生了巨大的影响，这种自动机后来被人们称为图灵机，并证明了 Hilbert 提出的判定问题的不可解性。图灵机虽然很简单，但现在已证明这种图灵机能够计算全部能行可计算函数。Turing 相当完善地解决了可计算函数的精确定义问题，对数理逻辑的发展起了巨大的推动作用。

自从 Gödel 提出不完全性定理，证明无所不包的公理系统是不存在的之后，数理逻辑学家们开始转向承认这种公理系统有很多，应该研究他们的共同性，这就促进了有内在联系的四大分支：证明论、模型论、递归论和公理集合论的形成和发展，逻辑演算则是它们的共同基础。其中证明论是把数学本身作为研究的对象，用以证明数学的相容性，以数学推理或证明为研究对象。模型论是研究形式语言与其解释之间的相互关系的学科，它的主要任务是对数学理论系统

建立模型，研究各模型之间的关系、模型与数学系统之间的关系等。递归论是用数学方法研究“可构造性”或“能行过程”的学科，它是 20 世纪 30 年代发展起来的。1931 年，Gödel 作出严格的但实际上只是原始递归函数的定义，出现了递归函数论。1934 年，Gödel 又进一步提出了一般递归的概念。1936 年，Turing 给“可计算函数”提供了一个精确的定义。20 世纪 60 年代后把递归理论应用到计算机上，用于计算复杂性的理论的研究。公理集合论就是用公理化方法建立集合论系统，也就是集合论的形式系统。它是在 19 世纪 20 年代 Cantor 提出的集合论出现悖论后，为了修改集合论而发展起来的。比较著名的集合论的公理系统是 ZF 系统和 GB 系统。

四论构成了数理逻辑的重要组成部分，这标志着数理逻辑的发展已经成熟，它的理论基础已经奠定。四论之间是相互联系、互为补充的，但它们研究的对象和侧重点又各不相同。四论的共同点都和数学有着密切联系，或者说其本身就是数学，或者说其本身是由数学问题引起的。如果单从逻辑角度对它们作了区分，那么可以说：证明论具有语法性质，模型论具有语义性质，递归论是证明论的工具，公理集合论是模型论的工具。

在数理逻辑进入第三个发展阶段后，其基础部分，即逻辑演算方面也开辟了新的研究领域，这就是许多非古典逻辑系统的相继出现和发展。所谓非古典逻辑系统是相对于 Aristotle 的三段论体系和 Frege、Russell 提出的命题演算和谓词演算来说的，它包括两个方面：第一，纯逻辑理论方面，包括多值逻辑、模态逻辑、构造性逻辑、相干逻辑、模糊逻辑等；第二，应用逻辑体系方面，包括认知逻辑、法律逻辑、时态逻辑、量子论逻辑、电路分析逻辑等。

1.2 形式化公理系统

数学区别于其他科学的特点就是它的规律只有加以证明才能被承认。感性直观只是启发人们发现问题和思考问题的手段，而不能成为判断数学规律成立的依据，但我们并不能对所有的规律都加以证明，总要有些初始的规律是不加证明而被承认的，因为不存在证明它们的更加初始的规律。我们将某些初始的规律称为公理，它们不需要证明即被承认。由公理出发，按一定的逻辑推理规则推出的规律称为定理，推导的过程称为证明。

数学的概念要求有精确的定义。所谓定义，就是用已有的概念去规定新概念的含义，即揭示新概念的内涵。但总有些初始的概念是不能定义的，因为不存在定义这些概念的更加初始的概念。我们将这些概念称为基本概念，对它们不予定义，即是不能定义的。用基本概念和已经定义的概念定义出的概念，称为导出概念。基本概念与导出概念、公理以及定理组成的结构称为公理系统。公理系统可以是关于某一数学学科全体的，如平面几何、集合论，也可以是关于某一数学学科中的一部分，如实数理论。公理学的发展经历了两个阶段。第一阶段是古典公理学或称为实质公理学，它是密切联系某种特殊对象的，称为公理的对象域。公理是关于这种对象的认识，表达这类对象的性质，而且有直观的明显性，如欧式几何中的公理就是实质公理。第二阶段是现代公理学，或称为形式化公理学，它不要求给定某种具体对象。群、环、线性空间等都是现代公理学或形式化公理学。

在形式化公理系统中，原始概念的直觉意义被忽略，甚至没有任何预先设定的意义。公理也无需任何实际意义为背景，它们仅仅是

一些选定的有穷符号串,唯一可识别的是它们的表示形式,这也是它们唯一有意义的东西。推理规则视为符号串的变形规则,推理或证明视为符号串的变形过程,也就是满足一定条件的有穷符号行的有穷序列。定理当然也是符号的有穷序列。因此,公理系统不再是一些有意义的命题的体系,而是一些符号的有穷序列的体系,只是靠符号形式来区别哪些是公理,哪些是定理。

当然抽象的形式化公理系统的提出往往是有客观背景的,常常是因为现实世界的某些对象及其性质需要精确的刻画和深入的研究。但是一旦抽象的形式公理系统建成,它便是超脱客观背景的,它可刻画的对象已不限于原来考虑的那些对象,而是与它们有着(公理所规定的)共同结构的相当广泛的一类对象,因而对它们性质的讨论也必定深刻得多。因此对一个抽象的形式公理系统,一般会有多种解释(释例)。例如,布尔代数抽象公理系统,可以解释为有关命题真值的命题代数,有关电路设计研究的开关代数,也可以解释为讨论集合的集合代数。

形式化是数理逻辑的基本特性和重要工具。借助于形式化过程和对形式系统的研讨完成对思维规律或其他对象理论的研究。数理逻辑形式系统的组成如下:

(1) 用于将概念符号化的语言,通常为一形式语言(formal languages),包括符号表 Σ 及语言的文法,可生成表示对象的语言成分项(terms),表示概念、判断的公式(formulas)。

(2) 表示思维规律的逻辑学公理模式和推理规则模式(抽象的形式公理系统),及其依据它们推演出的全部定理组成的理论体系。

根据其组成,对数理逻辑形式系统的研究包括以下 3 个方面:

(1) 语构(syntax)的研究。在形式系统内首先是对系统内定理推演的研究,如哪些是系统内的定理,如何更快地导出这些定理,定