·2005·

今年高考考什么

主编：王大赫　副主编：胡江浩
全国高考命题研究组 编写

数学

- 2005年高考最新命题思路
- 2005年高考内容范围
- 2005年高考新题型
- 2005年高考复习第二阶段精练

世界图书出版公司

·2005·

今年高考考什么

主编：王大赫　副主编：胡江浩

全国高考命题研究组 编写

数学

世界图书出版公司

北京·上海·广州·西安

图书在版编目(CIP)数据

今年高考考什么. 数学/王大赫,胡江浩主编.
北京:世界图书出版公司北京公司,2005.1
ISBN 7-5062-7328-4

Ⅰ. 今... Ⅱ. ①王... ②胡... Ⅲ. 数学课—
高中—升学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 133128 号

今年高考考什么
数 学

主　　编: 王大赫
副 主 编: 胡江浩
责任编辑: 高明让　梁丙卓
装帧设计: 北京午夜阳光平面设计公司

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(地址: 北京朝内大街 137 号　邮编: 100010　电话: 64077922)
销　　售: 各地新华书店和外文书店
印　　刷: 北京世图印刷厂

开　　本: 880×1230　1/16
印　　张: 17.5
字　　数: 420 千
版　　次: 2005 年 1 月第 1 版　2005 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7-5062-7328-4/G·205　定价: 23.80 元

前　言

普通高等学校统一考试(高考),自2002年在全国推行“3+x”考试之后,2004年又有新的发展,即打破了全国共同使用一张试卷的局面,扩大了分省组织命题的范围,北京、天津、上海、重庆、辽宁、福建、湖南、湖北、广东、江苏、浙江在这方面进行了有益的尝试。这是适应各地实施素质教育、推进高中课程改革的需要,也是高考改革进一步深化的举措。值得重视的是:这并不是要改变全国统一考试的原则。各地的命题必须要以教育部考试中心颁发的全国高考《考试大纲》为依据,执行全国统一的命题思想和思路,并由教育部考试中心审定试卷,并上报工作。故此,全国各地的高考复习备考工作,要以高考《考试大纲》为准,按照统一的命题思路去进行,才能取得良好的收效。《今年高考考什么》这套丛书,旨在贯彻《考纲》“高考在考查知识的同时,注重能力考查的原则”,提出高考复习的第二阶段,应以能力培养为主线,揭示高考各学科的能力内涵,并且提出命题的范围、思路,以及解题的程序性知识这一与其他复习资料不同的重要思想。这也正是高校所需要的学生的潜能。

本丛书突出四个特点

一、权威性。本丛书由命题专家和全国著名的学科专家编撰。直接解读命题权威机构最新的命题设计原则、思路和方法。

二、针对性。丛书广泛调研了备考生在第一复习阶段存在的问题,以及历届考生的失误情况,从高考测试的目标出发,培养考生应具备的综合能力和创新能力。适合做高考总复习第二阶段(即对知识进行推理、深化,形成科学的知识网络)的复习样书。

三、可读性。考生在复习中,应克服盲目性,增加自觉性,了解高考的基本常识。丛书以通俗的语言、精当的内容和清晰的结构阐述和训练,便于理解,也便于记忆。

四、实效性。丛书为抑制题海、减少考生的重复无用功,编拟、精选了适当的综合能力训练题和等值平行试卷,其题型的设计思路、难度与高考试题平行、等值,并起到举一反三的作用。

《今年高考考什么》丛书分为五个分册:语文分册、数学分册、英语分册、理科综合分册、文科综合分册。

编写工作是从高考阅卷开始的,在总结考生的答卷情况、调研2005年考生的实际水平和了解命题的总思路后已是十月了,时间非常仓促。我们在编写工作中,还得到各方面专家教师和招生考试部门同志的大力支持,在同志们的支持下我们完善了此套丛书的内容,使它的复习指导方向和内容更贴近2005年的命题。在这里向他们表示深切的感谢。此套丛书应该是当今市面上最权威、最新的高考复习资料。

因编写工作仓促,有不当之处,诚请批评指正,以便改正、完善。

全国高考命题研究组

2005年1月

目　录

第一章

高考数学最新命题思路

数学科的考试在命题实践中，按照"考查基础知识的同时，注重考查能力"的原则，确立以能力立意命题的指导思想，在试题命制和试卷结构中进行了新的创新设计. 确定了命题的总思路是：

> 注重对数学思想和方法的考查，注重对数学能力的考查，增加应用性和能力型的试题，融知识、方法、思想、能力于一体，全面检测考生的数学素养. 注重展现数学价值和人文价值，同时兼顾试题的基础性、综合性和现实性，重视试题的层次性，合理调控综合程度、坚持多角度、多层次的考查，发挥数学科考试的区分选拔功能和对中学数学教学的积极的导向作用.

具体可以分为五条基本思路：

思路一　突出对数学的"核心能力"——思维能力的考查

高考数学试题中所涉及的能力最近定为五大能力——思维能力、运算能力、空间想象能力、实践能力和创新意识能力. 其中数学的"核心能力"是思维能力. 思维能力不仅包括逻辑思维能力，还包括探索能力、直觉思维能力、合情推理能力和策略创造能力. 高考命题则突出对思维能力的考查，淡化对知识点的刻意覆盖，淡化公式的记忆，淡化对机械计算的要求，思维能力的考查应占据主导地位. 如在解答题中，除应用题外，每题都含有证明的要求. 推理和论证能力的要求也提高了.

当然，就是思维能力的考查. 也是分层次的，不同的题型考查的层次深度也不一样.

高考对思维的考查有三个层次：对问题或资料进行观察、比较、分析、综合、抽象与概括；运用演绎、归纳和类比进行推算；准确、清晰、有条理地进行表述. 体现在不同的题型上. 如：

例 1

若 $a>b>1$，$P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$，$Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$，$R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$，则　　(　　)

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

解析 这是一道选择题.本例的考查目的是想通过实数大小的比较来考查考生的判断和推理能力,试题是以选择题的形出现.考查的层次较低.按常规思路,解本题时主要使用平均值定理来进行判断.

$\because\ a>b>1\ \therefore\ \lg a>0,\lg b>0,\lg a\neq\lg b.$

由平均值定理,得

$$\sqrt{\lg a\cdot\lg b}<\frac{\lg a+\lg b}{2}$$

即 $P<Q$

又 $a>,b>0,a\neq b$

再次使用平均值定理进行演绎推理,得

$$\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2},$$

则 $\lg\sqrt{ab}<\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$

而 $Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)=\frac{1}{2}\lg ab=\lg\sqrt{ab},$

所以 $Q<R$

综上,有 $P<Q<R$, 选 B.

对于用选择题给出的判断性问题,使用演绎推理的思维进行推理,往往会更便捷一些.演绎推理是由一般到特殊的推理,也就是说:"一个命题在一般情况下成立,那么它在特殊情况下也成立".它的逆否命题也成立:"如果一个命题在特殊情况下不成立,那么在一般情况下也不成立".

令 $a=0$, $b=0$,满足 $a>0>1$ 的条件

此时 $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}=\sqrt{2}$, $Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)=\frac{3}{2}$, $R=\lg\left(\frac{a+b}{2}\right)=\lg 55$ 容易得到 $P<Q<R$.于是便可以把 A、C、D 排除而选择 B 项.

两种不同的思考和解决问题的方法从不同的角度考查了演绎推理,不同的方法体现了不同的考查要求.

例 2 如图,已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形,且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$.

(1) 证明:$C_1C\perp BD$;

(2) 假定 $CD=2,CC_1=\frac{3}{2}$,记面 C_1BD 为 α,面 CBD 为 β,求二面角 $\alpha-BD-\beta$ 的平面角的余弦值;

(3) 当 $\frac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时,能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD 请给出证明.

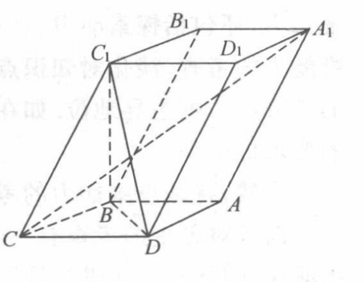

图 1—1

解析 这是一道证明题,考查思维能力.立体几何内容是考查演绎思维的最好素材,几乎每年的高考数学试卷中,都有一道以解答题形式给出的立体几何试题.立体几何试题除了考查空间想象能力之外,考查逻辑思维、考查演绎推理是它的目的.如何使

用立体几何素材来考查以思维能力核心的综合能力呢？命题时主要考虑了两点：一是在证明中进行考查，要求考生以典型三段论的形式，严格按照演绎推理的步骤完成推理和论证；二是在计算中进行考查.立体几何中的计算，往往需要先画出或作出有关的几何量，然后进行计算.这里的作图是需要证明的，证明过程便体现出对演绎推理的考查.

这道立体几何试题主要是从线线垂直、线面垂直、二面角的平面角的证明三个方面来考查演绎推理.为了正确处理平面几何在演绎推理过程中的作用，适当减少演绎推理过程中无关因素的干扰，以考查演绎推理的基本模式为主而不过分强调技巧.

第(1)问证明 $C_1C\perp BD$，其思考顺序是将线线垂直转化为线面垂直，再把线面垂直转化为线线垂直，也就是用分析法思考.可将证明 $C_1C\perp BD$ 转化为证明 $BD\perp$ 平面 C_1CAA_1，最终转化为证明 $BD\perp AC$ 且 $BD\perp C_1O$.然后再根据已知条件，用综合法写出证明过程.

由已知条件$\angle C_1CB=\angle C_1CD$，可获得《立体几何》课本习题四提出了一个命题："经过一个角的顶点引这个角所在平面的斜线，如果斜线和这个角两边的夹角相等，那么斜线在平面上的射影是这个角的平分线所在的直线，"原设想是这样提出第(1)问"证明：点 C_1 在底面 $ABCD$ 上的射影在 AC 上."由于这个结论证明的表述过程较长，且为课本原题，高考也曾作试题使用过，故改为证明"$C_1C\perp BD$".这个命题的证明可以让考生避开直接引用课本中未经证明的结论，因推理不严密导致失分，即用试题解答中的证法：

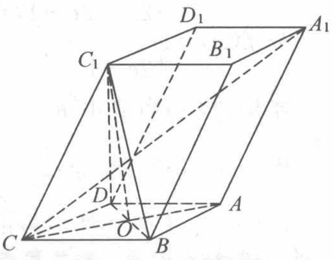

图 1—2

$$\left.\begin{matrix}\angle C_1CB=\angle C_1CD\\ BC=CD\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}BC_1=DC_1\\ BO=OD\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}C_1O\perp BD\\ AC\perp BD\\ AC\cap C_1O=O\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}BD\perp \text{平面 } A_1C\\ C_1C\subset \text{平面 } A_1C\end{matrix}\right\}\Rightarrow C_1C\perp BD.$$

完成演绎推理的全过程.

第(2)问对演绎推理的考查，主要体现在二面角平面角的证明.由于第(1)问已经证明了 $AC\perp BD$，$C_1O\perp BD$，因此，便可使用定义直接证得，虽然简单，但这其中也体现了"算中有证"的考查思想，立体几何体计算题并非单纯考查计算，而是与逻辑思维能力相结合进行考查.

第(3)问由于设问方式的改革，对思维能力有更高层次的要求.在第(3)问中，进行演绎推理的条件并没有给出，而是要求考生使用分析法进行逆向思维，通过探索猜想出使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD 的充分条件.

例 3

已知 $c>0$.设

P：函数 $y=c^x$ 在 R 上单调递减.

Q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 R.

如果 P 和 Q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围.

解析　与立体几何中的几何演绎推理相比较，由于代数缺少几何图形的直观辅助作用，学生对代数演绎推理感到抽象，是高中数学的难点之一.再考虑到大学的选拔考虑，高考都必须加强对代数演绎推理的考查.本题的命制，是在以往强化函数与不等式结合的基础上.寻求新的知识交汇点，将函数问题、不等式问题与命题判断结合起来，创设出新

颖的题目表述形式，着重考查考生以思维能力为核心的理解、分析和判断能力．同时试题涉及指数函数、含绝对值函数、解不等式等多个知识点，又实现了代数知识的有机组合．全题分解到各个小问题，解法都是基本的，但要综合处理，则思维程度较高，特别是要正确的、有条理地且简洁地表述，颇费功夫，这也是对考生的“数学交流”能力的考查．纵观全题，能在一个新的思维高度审视问题，融入了数学课程改革的新思想，值得好好品味．

解题的思路有很多．如：基本不等式法，解不等式法，函数讨论法等．如

设 $f(x)=x+|x-2c|-1$．

因为 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 R．

所以对于一切，$x\in R$，恒为 $f(x)>0$ 成立．

故 $f(x)$ 的最小值 >0，

而 $f(x)=\begin{cases}2x-2c-1, & (x\geqslant 2c)\\ 2c-1, & (x<2c)\end{cases}$

可知，$f(x)$ 的最小值为 $2c-1$．

故 $2c-1>0$，即 $c>\dfrac{1}{2}$．

思路二 设置实际情境，考查数学的应用

这主要体现在新增加的实践能力，在考试中表现为解答应用问题，考查的重点是客观事物的数学化，依据现实的生活为背景，提炼相关的数量关系，构造数学模型，将现实问题转化为数学问题，让考生加以解决．命题以“贴近生活，背景公平，控制难度”为原则，引导考生自觉地置身于现实社会的，关心自己身边的教学问题．

几年来所涉及的主题范围有：为保护环境汽车的总量控制；农村的人均住房；电工学中的串联、并联；网络系统工程求电厂冷却塔容积、民房的屋顶、计算机知识比赛的分组；设计宣传画高度；地图着色设计；台风侵袭的时间计算，旅游发展；西红柿上市的时间与成本收益，测试的概率……

例 1 如图，一个地区分为 5 个行政区域，现给地图着色，要求相邻区域不得使用同一颜色．现有 4 种颜色可供选择，则不同的着色方法共有______种．（以数字作答）

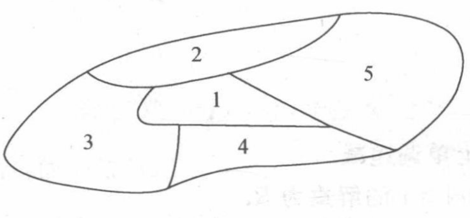

图 1—3

解析 本题通过地图着色的设计，主要考查排列、组合的基础知识，乘法原理与加法原理的应用，以及数学思维能力和分析、解决实际问题的能力．

地图着色问题是一类经典的排列组合问题，解决这类问题，首先必须理解题意，包括图的结构，着色的条件与要求．对于本题，图中的区域 1 与其它们 4 个区域都有公共边，这四个区域围在区域 1 的周围，排成一圈．而着色要求是有公共边的两个区域不能着同一颜色，着色的条

件是有 4 种颜色供选择. 注意这里不是说“用 4 种颜色给地图着色”. 要是误解为“用 4 种颜色给地图着色”，势必会造成漏计，这是因为对所给出的地图，用 3 种颜色也可实现所要求的着色. 不过要是只有 2 种颜色，则无法实现所要求的着色.

在准确理解题意之后，对着色程序的设计应明确分步和分类，防止混淆与糊涂. 进而在应用乘法原理和加法原理进行计数时，必须防止错用和误用. 此外，还得防止数值计算的失误和差错，才能圆满完成解答.

依题意，由图可知至少需用 3 种颜色，故可分两类：

第一类，着色用的是 3 种颜色.

首先，从 4 种颜色中任取 3 色，有 C_4^3 种取法. 接着，对每一种所取的 3 色，任取 1 种颜色着区域 1，有 C_3^1 种着法；然后，着色第 2 区域，有 C_2^1 种着法；往后，依次着 3、4、5 都只有 C_1^1 种着法. 应用乘法原理，第一类的不同着色方法共有 $C_4^3C_3^1C_2^1C_1^1=P_4^4$ 种.

第二类，着色用的是 4 种颜色.

依区域序号逐一着色，首先第 1 区，有 C_4^1 种着色方法；其次第 2 区，有 C_3^1 种着色方法；再次，第 3 区，有 C_2^1 处着色方法：接着，第 4 区、也有 C_2^1 种着色方法. 最后，第 5 区只有 1 种着色方法. 这是因为：第 1、2 区域已有 2 种不同颜色，若 4 区所着的颜色不同于区域 2，则只有 1 种颜色可用于第 5 区着色，若 4 区所着的颜色与区域 2 相同，则 1、2、3、4 四个区域只使用了 3 种颜色，故第 5 区只能用第 4 种颜色着色，否则属于第一类而不属于第二类，会造成重复计数.

应用乘法原理，得到第二类不同着色方法共有 $C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1=2P_4^4$ 种.

最后，应用加法原理，得合乎题意的不同着色方法的种数为

$$N=P_4^1+2P_4^4=7^2$$

例 2　设计一幅宣传画. 要求画面面积为 4 840 cm²，画面的宽与高的比为 $\lambda(\lambda<1)$，画面的上、下各留 8 cm 空白，左、右各留 5 cm 空白. 怎样确定画面的高与宽尺寸，能使宣传所用纸张面积最小？如果要求 $\lambda\in\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$，那么 λ 为何值时，能使宣传画所用纸张面积最小.

解析　给宣传画面的长宽规定一合适比例使画面设计美观大方，是现实生活中常见的问题. 高考的应用题，取材于社会生活，反映数学既取之于社会的生活和生产实践，又服务于社会的基本精神. 能激励考生自觉运用数学知识去解决生活和生产中的实际问题，做到学以致用，这也是应用题命题的初衷. 本题主要考查建立函数关系和求函数最小值的知识和技能，同时考查运用所学数学知识解决实际问题的能力.

思路如下：宣传画画面和纸张为长方形，是约定俗成的，设定画面的宽或高为一个变量 x，可表示出另一个变量，依题意可写出表示纸张面积的函数表达式 $S=f(x,\lambda)$. 注意到画面面积是给定的，可置换出一个变量，从而求函数的最小值.

解

设画面高为 x cm，宽为 λx cm，则 $\lambda x^2=4\ 840$. 设纸张面积为 S，则

$$\begin{aligned}S&=(x+16)(\lambda x+10)\\&=\lambda x^2+16\lambda x+10x+160\end{aligned}$$

$$=5\,000+16\lambda x+10x$$
$$\geqslant 5\,000+2\sqrt{16\lambda x\cdot 10x}$$
$$=5\,000+2\sqrt{160\cdot\lambda x^2}=6\,760.$$

当 $16\lambda x=10x$ 时，即 $\lambda=\frac{5}{8}$ 时，S 取得最小值.

此时，高 $x=\sqrt{\frac{4\,840}{\lambda}}=88$ cm.

宽 $\lambda x=\frac{5}{8}\times 88=55$ cm

因为 $\lambda=\frac{4\,840}{x^2}$，若 $\lambda\in\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right]$ 即 $\frac{2}{3}\leqslant\frac{3}{4}$

因为 $x>0$，所以 $\frac{44\sqrt{30}}{3}\leqslant x\leqslant 22\sqrt{15}$.

$$S=5\,000+16\cdot\frac{4\,840}{x}+10x.$$

设 $\frac{44\sqrt{30}}{3}\leqslant x_1<x_2\leqslant 22\sqrt{15}$，

则 $S(x_1)-S(x_2)=\frac{16\times 4\,840}{x_1}-\frac{16\times 4\,840}{x_2}+10x_1-10x_2$

$$=10(x_1-x_2)\left(1-\frac{16\times 484}{x_1x_2}\right).$$

而 $x_1x_2\leqslant(22\sqrt{15})^2=2^2\times 11^2\times 15$，所以 $1-\frac{16\times 484}{x_1x_2}<0$，

因此 $S(x_1)-S(x_2)>0$，

所以 $S(x)$ 在区间 $\left[\frac{44\sqrt{30}}{3},22\sqrt{15}\right]$ 内单调递减，

故当 $x=22\sqrt{15}$ 时，$S(x)$ 最小，此时 $\lambda=\frac{4\,840}{x^2}=\frac{2}{3}$.

思路三　注重考查考生数学的思想方法

数学不仅仅是一种重要的“工具”或者“方法”，更重要的是一种思维模式，表现为数学思想. 数学的思想和方法是数学知识在更高层次上的抽象和概括，它蕴涵于数学知识的发生、发展和应用的过程，又相对超脱于具体的数学知识，是提高数学能力，特别是提高数学综合能力所不可缺少的. 近几年的数学高考试题更强调三个层次(一般的数学方法、一般的逻辑方法、数学的思想方法)的综合考查，以及四种常用的数学思想方法的自然综合. 为此，考生既要在揭示内在联系，构建知识网络中提炼数学思想和方法，又要在分析和解决各类数学问题的过程中灵活应用数学思想和方法.

高考试卷不刻意追求知识点的覆盖率，但对数学思想和方法的考查始终贯穿于整个试卷之中，着重考查了函数与方程的思想，数形综合的思想，分类讨论的思想，转化与化归的思想等等.

例 1　设 $a\neq 0$,解关于 x 的不等式

$$\sqrt{a^2-2x^2}>x+a.$$

解析　这是一个含字母系数的无理不等式的求解问题,分类讨论是求解的基本思想,借助于相关函数及变换,将不等式两端各视为一个函数,并将函数解析式转化为含字母系数的曲线方程,表示动曲线(包括动直线),再利用曲线的上、下位置关系,对不等式及其解集做出几何解释,既有助于加深对题意的理解,又能对所得解集进行有效检验.

由于 $y=\sqrt{a^2-2x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}y\geqslant 0,\\2x^2+y^2=a^2\end{cases}$,因此它的曲线是以原点为中心,焦点在 y 轴上的椭圆的上半部分(含短轴的两端点),此椭圆与 x 轴两交点横坐标是 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$,与 y 轴正半轴交点纵坐标是 a,函数 $y=x+a$ 的图象是直线,斜率为 1,在 y 轴上的截距是 a,当 $a>0$ 时,此直线通过椭圆的上顶点,并交上半椭圆于点 $D\left(-\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a\right)$,因此,直线位于半椭圆下方部分的各点横坐标的集合是区间 $\left(-\frac{2}{3}a,0\right)$;当 $a<0$ 时,直线与上半椭圆无交点,上半椭圆上所有点都在直线上方,各点横坐标的集合是区间 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}a,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$(如图). 由此可见,运用数形结合的思想方法可揭示代数推理和运算的几何意义,深化对问题的认识.

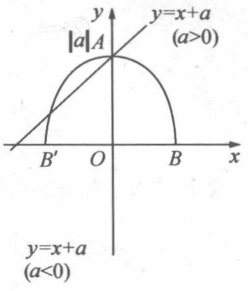

图 1—4

解

原不等式 $\Leftrightarrow$ ① $\begin{cases}a^2-2x^2\geqslant 0,\\x+a\geqslant 0,\\a^2-2x^2>(x+a)^2;\end{cases}$

或　② $\begin{cases}a^2-2x^2\geqslant 0,\\x+a<0.\end{cases}$

不等式组①$\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}|a|,\\x\geqslant -a,\\x(3x+2a)<0.\end{cases}$

不等式组②$\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}|a|,\\x<-a.\end{cases}$

当 $a>0$ 时,①$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{\sqrt{2}}{2}a\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}a,\\x\geqslant -a,\\-\frac{2}{3}a<x<0,\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}a<x<0.$

$$②\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\\ x<-a,\end{cases}\text{无解.}$$

$$\text{当 } a<0 \text{ 时},①\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\\ x\geqslant -a,\\ 0<x<-\dfrac{2}{3}a.\end{cases}\text{无解.}$$

$$②\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\leqslant x\leqslant-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\\ x<-a.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}a\leqslant x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

综上可知:当 $a>0$ 时,原不等式的解集是

$$\left\{x\left|-\frac{2}{3}a<x<0\right.\right\};$$

当 $a<0$ 时,原不等式的解集是

$$\left\{x\left|\frac{\sqrt{2}}{2}a\leqslant x\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right.\right\}.$$

例 2 已知数列 $\{a_n\}$ 中,S_n 是它的前 n 项和,并且 $S_{n-1}=4a_n+2(n=1,2,\cdots)$,$a_1=1$.

(1) 设 $b_n=a_{n+1}-2a_n(n=1,2,\cdots)$,求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列,并写出它的通项公式;

(2) 设 $c_n=\frac{a_n}{2^n}(n=1,2,\cdots)$,求证数列 $\{c_n\}$ 是等差数列,并写出它的通项公式;

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和公式,

解析 这是一道数列的综合题,重点是数列的相互关系,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 可视为求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及前 n 项和公式的辅助数列.$\{a_n\}$ 既非等差数列,也非等比数列,两 $\{b_n\}$ 是等比数列,$\{c_n\}$ 是等差数列.求解过程体现了函数的思想方法,转化和化归的思想方法.

解

(1) ∵ $S_{n+1}=4a_n+2(n=1,2,\cdots)$,

∴ $S_{n+2}=4a_{n+1}+2$

两式相减,得 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$

变形,得 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$.

∵ $b_n=a_{n+1}=2a_n(n=1,2,\cdots)$,

∴ $b_{n+1}=2b_n$,可知 $\{b_n\}$ 是公比为 2 的等比数列;

由 $b_1=a_2-2a_1=S_2-3a_1=(4a_1+2)-3a_1=a_1+2=3$,

可知 $b_n=3\cdot 2^{n-1}$ 是 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) ∵ $C_n=\frac{a_n}{2^n}(n=1,2,\cdots)$

∴ $c_{n+1}-c_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n+1}-2a_n}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^{n+1}}$

$=\frac{3\cdot 2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{4}$,

可知$\{c_n\}$是公差为$\frac{3}{4}$的等差数列;由$c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$,

可知$c_n=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}(3n-1)$是$\{c_n\}$的通项公式.

(3) ∵ $c_n=\frac{a_n}{2^n}$,$c_n=\frac{1}{4}(3n-1)$,

∴ $a_n=2^n\cdot\frac{1}{4}(3n-1)=(3n-1)\cdot 2^{n-1}(n\in\mathrm{N})$.

当$n\geqslant 2$时,$S_n=4a_{n-1}+2=(3n-4)\cdot 2^{n-1}+2$,由于$S_1=a_1=1$也适合于此公式,故$\{a_n\}$的前$n$项和公式是$S_n=(3n-4)\cdot 2^{n-1}+2$.

例3

如果实数x,y满足等式$(x-2)^2+y^2=3$,那么$\frac{y}{x}$的最大值是 ( )

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

解析 这是一道确定条件最值的问题,既可用代数方法求解,也可以用几何方法求解.反映了数与形的对立统一关系.本题的考查重点是灵活运用数形结合法解决问题的能力.

本题的解答须灵活运用相关的知识和技能,要求良好的观察力和一定深度的思维能力.关键在于能否将问题等价转换为自己所熟悉的问题加以解决.比较深刻地考查了等价转换思想的运用.等价转换是解答数学问题的一个重要和基本的思想方法.

解法1

等式$(x-2)^2+y^2=3$与比值$\frac{y}{x}$都有清晰的几何意义:前者表示xOy坐标平面上的一个圆,圆心在点$M(2,0)$上,半径为$\sqrt{3}$(如图所示);而比值$\frac{y}{x}$是点(x,y)与坐标原点连线的斜率.因此,该题相当于如下的几何问题:动点N在定圆M上移动,求直线ON的斜率的最大值.借图可见:当N在第一象限且ON与圆M相切时,ON的斜率最大.这时,在Rt△OMN中,$\angle N=90^\circ$,$OM=1$,$OM=2=\sqrt{3}$,故$ON=1$,

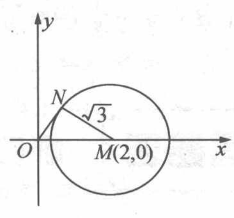

图 1—5

$$\tan\angle NOM=\frac{MN}{ON}=\sqrt{3}.$$

得答案为D项.

解法2

依设，可令 $x=2+\sqrt{3}x\cos\theta, y=\sqrt{3}\sin\theta$，其中 $\theta\in[0,2\pi)$. 因此

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{2+\sqrt{3}\cos\theta},$$

$$\because\quad 2+\sqrt{3}\cos\theta=(2+\sqrt{3})\cos^2\frac{\theta}{2}+(2-\sqrt{3})\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\geqslant 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=2\left|\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right|=|\sin\theta|,$$

$$\therefore\quad \frac{y}{x}\leqslant\sqrt{3},$$

且当 θ 满足 $\tan\frac{\theta}{2}=2+\sqrt{3}$ 时取等号. 因此，$\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

解法3

令 $t=\frac{y}{x}$，则 $y=tx$，代入已知等式，得

$$(x-2)^2+t^2x^2=3,$$

因此，$x\in[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$，且

$$t^2=\frac{1}{x^2}[3-(x-2)^2]$$

$$=-\left(\frac{1}{x}\right)^2+4\left(\frac{1}{x}\right)-1$$

$$3-\left(\frac{1}{x}-2\right)^2,$$

得：当 $x=\frac{1}{2}$ 时，t^2 取最大值 3. 从而 $t\leqslant\sqrt{3}$.

由于 $x=\frac{1}{2}, y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 满足等式 $(x-2)^2+y^2=3$，故题设下 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$. 选择 D 项.

思路四　顺应教育改革，体现课改精神

高考数学试题要充分体现课程改革的理念. 更加关注高中数学课程改革的进展，了解使用新课程考生的实际情况；汲取新课程中的新思想、新理念，使高考数学科考查更能反映数学教育改革的发展方向.

在现行课程试卷中，融入了新教学大纲的教育理念，注重考查考生的创新意识和动手能力，体现自主学习和主动探究精神. 如对传统内容的处理，设计了新的考查形式，编拟了新的题型，开发了新的背景. 试题切入容易，深入难，鼓励考生多层次、多样化的发展，再如函数与不等式知识的综合，涉及到《集合与简易逻辑》部分的内容，设问新颖，拓宽了考生的思路，增加了多

种变解法.数列、排列、不等式等知识和观察、归纳、分析、推理能力的考查,可以用研究性学习内容《杨辉三角》问题拓展以上的试题,从涉及的知识层面看并不深,但对思维能力的要求很高,反映了课程改革中研究学习的精神,要求考生对数学对象进行细致地观察,寻找规律,形成直觉,产生由一般到特殊的猜想,并最终抓住问题的特征,同时说理必须清楚到位.

试卷要紧密结合新教材内容,新增加的内容要占很大的比例,一般都高于其在课时中所占的比例,而且与传统内容相结合.

例 1　(1) $\{a_n\}$是集合$\{2^t+2^s\mid 0\leqslant s<t$,且$s,t\in Z\}$中所有的数从小到大排列成的数列,即$a_1=3,a_2=5,a_3=6,a_4=9,a_5=10,a_6=12,\cdots\cdots$.将数列$\{a_n\}$各项按照上小下大,左小右大的原则写成如下的三角形数表:

$$\begin{array}{c} 3 \\ 5\quad 6 \\ 9\quad 10\quad 12 \\ \_\_\quad \_\_\quad \_\_\quad \_\_ \\ \_\_\quad \_\_\quad \_\_\quad \_\_\quad \_\_ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

①写出这个三角形数表的第四行、第五行各数.

②求a_{100}.

(2) 设$\{b_n\}$是集合$\{2^t+2^s+2^r\mid 0\leqslant r<s<t$,且$r,s,t\in Z\}$中所有的数从小到大排列成的数列.已知$b_k=11160$,求$k$.

解析　本题主要利用数列,组合等基础知识,考查观察、分析、归纳和探究的能力.

这是一道操作题,要求考生设计一种裁剪方法,将一个正三角形裁剪成一个正三棱锥,直三棱柱,进而附加提问,要求考生将一张正三角形的纸片裁剪成一个直棱柱.这是一个由特殊到一般的研究性的问题.从数的研究上去考虑.数的排列是一个十分有趣而深刻的问题,古代早有“杨辉三角形”的研究,于是从这个思路开展命题设计:把数的排列表述为数学模式$\{2^t+2^s\mid 0\leqslant s<t$,且$s,t\in Z\}$,针对其所表示的数列$\{a_n\}$提问的一般情况抽象思维太强,故先直观给出三角形数表,先通过观察、归纳,可求第四、五行,进而求出一个具体数.由于考生这类问题接触较少,尽量让问题具体化,让考生能动手做题.解题过程中可以体验到题目所给数集中所有的数从小到大排列成的数列组成一个无限延伸的正三角形,数列的第k项a_k,有$k=C_t^2+C_s^1+1$.有了这个基础,就可以拓广,因此,作为附加题给出数列$\{b_n\}$是$\{2^t+2^s+2^r\mid 0\leqslant r<s<t$,且$r,s,t\in Z\}$中所有的数从小到大的排列,数的排列的实质是由正三角形延伸为正四面体,其中第k项b_k,有$k=C_t^3+C_s^2+C_r^1+1$.这是一个值得研究的问题.当然考场上能探究这个问题的考生是极少数,但是,考后留下悬念,让考生从中领会数学世界的绚丽多彩,激发他们研究数学问题的兴趣.

解题的关键是通过观察、研究,领会到数表的排列规律.

(1)

解

①　第四行　17　18　20　24

　　第五行　33　34　36　40　48