索伯列夫空间与偏微分方程

SOBOLEV

魏光祖　袁忠信
王恩三　王玉林

河南大学出版社

索伯列夫空间与偏微分方程

魏光祖　袁忠信

王恩三　王玉林

河南大学出版社

（豫）新登字09号

索伯列夫空间与偏微分方程
魏光祖 袁忠信
王恩三 王玉林
责任编辑 王 慧

河南大学出版社出版
（开封市明伦街85号）
河南省新华书店发行
中国科学院开封印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32 印张：13.875 字数：348千字
1994年7月第1版 1994年7月第1次印刷
印数：1—1200 定价：7.80元

ISBN7-81041-058-X／O·71

前　言

本书是为偏微分方程和泛函分析方向的硕士研究生所编的教材. 全书共分六章. 前两章是准备工作，较简练地讨论可分 Hilbert 空间的基本知识和 L_2 微积分，而对于 Sobolev 嵌入定理、延拓定理、迹定理等基本理论作了详细的论述. 第三、四、五章分别讨论椭圆、双曲、抛物三类方程各种定解问题的广义解和局部广义解存在唯一及光滑性，特别对于 Laplace 算子的广义特征值的渐近估计作了仔细的分析. 在这三章内有关处理这三类方程的基本方法，如算子方法、能量方法、Ritz 方法、Fourier 方法、Galerkin 方法、平均函数法、格林函数方法都作了介绍. 第六章简要介绍广义函数及拟微分算子的基本知识. 作为应用，以 Hörmamder 台阶方法、冻结法以及渐近展开为工具，给出常系数和变系数高阶线性方程拟基本解存在定理和椭圆算子拟逆的存在定理. 从 Görding不等式出发给出了椭圆算子的 Fredholm 性质，特别是椭圆算子的特殊指标定理. 最后我们利用 Carleman 型估计，建立 m 阶拟微分算子 Cauchy 问题唯一性和连续相依性定理. 我们认为这些内容是偏微分方程硕士研究生所必需的知识. 因为全书是以索伯列夫空间为工具的，故取名为《索伯列夫空间与偏微分方程》.

本书是在编著者多次讲授讲义的基础上，由魏光祖最后执笔定稿. 由于编著者水平有限，错误难免，恳请读者指正. 本书在出版过程中得到孙荣光教授、程庆副总编的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢.

编著者
一九九三年于郑州大学

目　录

第一章　希尔伯特空间上的线性算子方程

本章的目的是利用可分希尔伯特（Hilbert）空间上的线性算子的矩阵表示，研究希尔伯特空间上的线性算子方程的弗雷德霍姆（Freldholm）定理．这些定理在第三、四、五章中将要用到．

§1　希尔伯特空间

1．线性有模空间

集合 M 上的元素规定一种加法（+）运算，运算后所得元素仍属于 M，并使得对任意的 $f_1, f_2, f_3 \in M$，有

$$f_1 + f_2 = f_2 + f_1, \quad (f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3).$$

又规定了 M 中元素与实数（或复数）的乘法（·）运算．运算后所得元素仍属于 M，使得对任意的 $f, f_1, f_2 \in M$，及实数（或复数）c，c_1, c_2，有

（1）　$(c_1 + c_2)f = c_1 f + c_2 f$；

（2）　$c(f_1 + f_2) = cf_1 + cf_2$；

（3）　$(c_1 c_2)f = c_1(c_2 f)$；

（4）　存在 M 中的零元素 0，使 $0 \cdot f = 0$；

（5）　$1 \cdot f = f$，

则称 M 为实（或复）的线性空间．以后我们只讨论复线性空间，而所有结论对实线性空间也正确．

设 M 是线性空间，$N \subset M$．如果 N 也是线性空间，则称 N 是 M 的一个线性流形．

设$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}\subset M$，对任意$k$和复数$c_1,\cdots,c_k$，形如$\sum_{i=1}^{k}c_if_i$的元素集合称为$\{f_m\}_{m=1}^{k}$的外壳，显然它是$M$的线性流形．若等式$\sum_{i=1}^{k}c_if_i=0$成立的充要条件是$c_i=0(i=1,\cdots,k)$，则称$f_1,\cdots,f_k$线性无关，否则称$f_1,\cdots,f_k$线性相关．若$M$中任一个无穷集$N$中的任一个有限线性子集皆线性无关，则称集$N$是线性无关集．

若线性流形N存在m个线性无关元素，而它的任意$m+1$个元素线性相关，则称线性流形N的维数为m．若N中存在无穷线性无关子集，则称N是无穷维的．

设M为线性空间，若$\forall f\in M$，存在实数$\|f\|=\|f\|_M$与之对应，并具有性质：

（1）　$\|cf\|=|c|\,\|f\|$，c为复数；

（2）　$\forall f_1,f_2\in M$，$\|f_1+f_2\|\leqslant\|f_1\|+\|f_2\|$；

（3）　$\|f\|\geqslant 0$，且$\|f\|=0$，恒有$f=0$，

则称M为线性有模空间，$\|f\|$称为M中元素f的模．

设M为线性有模空间，$\forall f_1,f_2\in M$，定义

$$\operatorname{dist}(f_1,f_2)=\|f_1-f_2\|,$$

则由模的性质导出距离公理，从而又可导出收敛的概念．

设$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}\subset M$，当$i,j\to\infty$时，若有$\|f_i-f_j\|\to 0$，则称$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$是线性有模空间$M$中的基本列．

定义 1.1.1　设$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}\subset M$，若存在$f\in M$，当$m\to\infty$时有$\|f_m-f\|\to 0$，则称$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$按模收敛到$f$，有时也称强收敛到$f$，简记为$f_m\to f$或$\lim\limits_{m\to\infty}f_m=f$．

定理 1.1.2　$\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$极限存在必唯一，并且当$m\to\infty$时，$\|f_m\|\to\|f\|$，其中f为它的极限．

定理 1.1.3　收敛列必为基本列．

定义 1.1.4 线性有模空间 M 中的任一个基本列皆是收敛列，则称 M 是完备空间．完备的线性有模空间称为巴拿赫(Banach)空间，简称为 B 空间．

设 N 是 B 空间的线性流形，N 和它的基本列的极限元素的并记为 $\bar{N}$，称 $\bar{N}$ 为流形 N 的闭包．

定理 1.1.5 闭包 $\bar{N}$ 必完备．

证明 设 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}\subset\bar{N}$ 为基本列，而且 $f_m\to f(m\to\infty)$．从 $\bar{N}$ 的定义，$\forall k=1,2,\cdots$，$\exists f'_k\in N$，使 $\|f_k-f'_k\|\leqslant\frac{1}{k}$．由三角不等式，当 $k\to\infty$ 时，有

$$\|f-f'_k\|\leqslant\|f-f_k\|+\frac{1}{k}\to 0,$$

从而 $f\in\bar{N}$． □

定义 1.1.6 设 $M\subset B$ 空间，如果存在 $C>0$，使对任意的 $f\in M$，$\|f\|\leqslant C$，则称 M 为 B 空间中的有界集．

定义 1.1.7 设 $M\subset B$ 空间，任意的 $f\in B$ 空间，存在 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}\subset M$，使当 $m\to\infty$ 时，有 $f_m\to f$，则称 M 在 B 空间中处处稠．B 空间中如果存在可数的处处稠子集，则称此 B 空间为可分 B 空间．

2．希尔伯特空间

对线性空间 H 中任意二元素 $h_1,h_2\in H$，都对应一个复数 (h_1,h_2)，且具有性质：

(1) $(h_1,h_2)=\overline{(h_2,h_1)}$；

(2) 对复数 c，$(ch_1,h_2)=c(h_1,h_2)$；

(3) $(h_1,h_1)\geqslant 0$，且 $(h_1,h_1)=0$ 时必有 $h_1=0$，

称 $(\cdot,\cdot)$ 为空间 H 的内积，并称 H 为内积空间．

定理 1.2.1 设 H 为内积空间，则对任意的 $h_1,h_2\in H$，布尼亚科夫斯基(Bunjakovski)不等式成立

$$|(h_1,h_2)|^2\leqslant(h_1,h_1)(h_2,h_2). \tag{1.2.1}$$

证明 如果 $h_2=0$，则(1.2.1)显然成立. 现设 $h_2\neq 0$，对任意的 t(复数)，

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant (h_1+th_2, h_1+th_2)\\
&\leqslant (h_1,h_1)+t\overline{(h_1,h_2)}+\bar{t}(h_1,h_2)+t^2(h_2,h_2).
\end{aligned}
$$

取 $t=-\dfrac{(h_1,h_2)}{(h_2,h_2)}$，得(1.2.1). □

内积空间 H 中，对任意的 $h\in H$，令 $\|h\|=\sqrt{(h,h)}$，则 $\|h\|$ 满足模的公理，即内积空间 H 必为有模空间. 在这种模意义下完备的内积空间 H 称为希尔伯特空间，简称为 H 空间. 对 H 空间除依模收敛，即强收敛之外，还可引进弱收敛概念.

定义 1.2.2 设 $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}\subset H$ 空间，对任意的 $f\in H$ 空间，存在 $h\in H$ 空间，使

$$
\lim_{m\to\infty}(h_m,f)=(h,f), \tag{1.2.2}
$$

则称 $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ 弱收敛到 h，简记为 $h_m\rightharpoonup h$.

定理 1.2.3 弱收敛列的极限元素必唯一.

定理 1.2.4 强收敛必弱收敛.

3. **双线性形式**

对任意的 $h_1,h_2\in H$ 空间，可得相应复数 $W(h_1,h_2)$，使有:

(1) $W(h_1+h_2,h)=W(h_1,h)+W(h_2,h)$, $\quad\forall h\in H$;

(2) $W(ch_1,h_2)=cW(h_1,h_2)$, $\quad c$ 是任意复数;

(3) $W(h_1,h_2)=\overline{W(h_2,h_1)}$,

$W(\cdot,\cdot)$ 称为 H 空间上的厄尔米特 (Hermite) 双线性形式，而 $W(h,h)$ 称为厄尔米特双线性形式 $W(h_1,h_2)$ 的二次形式. 如果 $W(h,h)\geqslant 0$，且 $W(h,h)=0$ 时，必有 $h=0$，则在 H 空间中可引进一个新的内积 $W(h_1,h_2)=(h_1,h_2)'$ 和相应的模 $\|h\|'=\sqrt{W(h,h)}$.

我们关心的是 H 空间中原有的内积和新引进的内积的等价性.

定义 1.3.1 设存在常数 $c_1>0$ 和 $c_2>0$，使对 $h\in H$ 空间，有 $\|h\|'\leqslant c_1\|h\|$ 和 $\|h\|\leqslant c_2\|h\|'$，则称这两种模等价. 相应的称导出这种模的内积等价.

定理 1.3.2 线性空间 H 在内积 $(\cdot,\cdot)$ 意义下是 H 空间，如果模 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|'$ 等价，则它在内积 $(\cdot,\cdot)'$ 意义下也是 H 空间.

4. **正交基**

因为 H 空间中有内积，因此可以谈正交性. 可分 H 空间中引进正交基概念后，对付利叶 (Fourier) 展开可有一系列的重要性质. 特别有算子的矩阵表示，利用这一表示，我们可以讨论线性算子方程的弗雷德霍姆理论.

定义 1.4.1 设对任意的 $h_1,h_2\in H$ 空间皆非零，若有 $(h_1,h_2)=0$，则说 h_1 与 h_2 正交，简记为 $h_1\perp h_2$. 若 $H'\subset H, H''\subset H$，对任意的 $h_1\in H'$，$h_2\in H''$，有 $(h_1,h_2)=0$，则说 H' 与 H'' 正交，简记为 $H'\perp H''$.

定理 1.4.2 设 H' 为 H 空间的处处稠集，若 $h\in H$ 空间，对任意的 $h'\in H'$，皆有 $(h,h')=0$，则 $h=0$.

证明 设 $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}\subset H'$，且当 $k\to\infty$ 时，$h_k\to h$. 对任意的 $k\geqslant 1$，$(h_k,h)=0$，以及 $k\to\infty$ 时，$(h_k,h)\to(h,h)=\|h\|=0$，即

$$h=0. \quad \square$$

定义 1.4.3 设 $h\in H$ 空间，若 $\|h\|=1$，则说 h 是就模的. 若 $H'\subset H$，对任意的 h_1，$h_2\in H'$，有 $(h_1,h_2)=0$，且 $\|h_1\|=1$，$\|h_2\|=1$，则说 H' 是一个就模正交集.

显然就模正交集 H' 中的元素必线性无关.

定理 1.4.4 可数线性无关系 $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ 必可化为就模正交系.

证明 令 $e_1=\dfrac{h_1}{\|h_1\|}$，$e_2=\dfrac{h_2-(h_2,e_1)e_1}{\|h_2-(h_2,e_1)e_1\|}$，…，

$$e_k=\frac{h_k-(h_k,e_1)e_1-\cdots-(h_k,e_{k-1})e_{k-1}}{\|h_k-(h_k,e_1)e_1-\cdots-(h_k,e_{k-1})e_{k-1}\|},\cdots,$$

以上方法称为格拉姆-施密特(Gram-Schmidt)就模正交化方法. □

设 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\subset H$ 是一个可数就模正交系. $p\geq 1$, H_p 是由 e_1, $\cdots$, e_p 支撑的线性子空间. 于是对常数 $c_1, c_2, \cdots, c_p$, H_p 中元素具有形式 $\sum_{i=1}^{p} c_i e_i$. 令

$$\delta^2_{H_p}(f, c_1, \cdots, c_p) = \|f - \sum_{i=1}^{p} c_i e_i\|^2, \qquad f\in H \tag{1.4.1}$$

数 $f_k=(f, e_k)(k=1, 2, \cdots)$ 称为元素 f 关于 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 的付利叶系数.

定理 1.4.5 设 $f\in H$ 空间, 则 $\delta^2_{H_p}(f, c_1, \cdots, c_p)$ 达到极小的充要条件是: $f_k=c_k, k=1, 2, \cdots$, 且此时有等式

$$\delta^2_{H_p}(f) = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{p} |f_k|^2. \tag{1.4.2}$$

证明 因为

$$\delta^2_{H_p}(f, c_1, \cdots, c_p) = \left(\sum_{i=1}^{p} c_i e_i - f, \sum_{i=1}^{p} c_i e_i - f\right)$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{f} - \sum_{k=1}^{p} \bar{c}_k f_k + \sum_{k=1}^{p} |c_k|^2$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{p} |f_k|^2 + \sum_{k=1}^{p} |c_k - f_k|^2,$$

即得所需的结论. □

由定理 1.4.5, 知

$$\|f-\sum_{k=1}^{p}c_ke_k\|\geqslant\|f-\sum_{k=1}^{p}f_ke_k\|.$$

f^p 表示空间 H_p 中逼近于 f 的唯一元素

$$f^p=\sum_{k=1}^{p}f_ke_k,$$

则有

$$\delta_{H_p}^2(f)=\|f-f^p\|^2, \tag{1.4.3}$$

元素 f^p 称为 f 在 H_p 上的投影.

由(1.4.2)知，$\forall f\in H$，及任意 $p\geqslant 1$，$\sum\limits_{k=1}^{p}|f_k|^2\leqslant\|f\|$，从而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_k|^2$ 收敛，且有不等式（贝塞尔(Bessel)不等式）

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^2\leqslant\|f\|. \tag{1.4.4}$$

引理 1.4.6 设$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$是 H 的就模正交系，$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$是一个复数列，则级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_ke_k$ 收敛的充要条件是级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_k|^2$ 收敛.

证明 作部分和 $S_p=\sum\limits_{k=1}^{p}f_ke_k$，对 $p\geqslant q$，

$$\|S_p-S_q\|=\|\sum_{k=q+1}^{p}f_ke_k\|=\sum_{k=q+1}^{p}|f_k|^2.$$

由 H 空间的完备性，级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_ke_k$ 收敛的充要条件是$\{S_p\}_{p=1}^{\infty}$是一个基本列. □

定义 1.4.7 设 $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 H 空间中的就模正交系，任意的

$f\in H, f_k=(f,e_k)(k=1,2,\cdots)$是$f$的付利叶系数，则级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k \tag{1.4.5}$$

称为f关于就模正交系$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$的付利叶级数.

引理 1.4.8 任意的$f\in H$空间，f的付利叶级数(1.4.5)必按H空间的模收敛.

证明 由贝塞尔不等式(1.4.4)及引理1.4.6立得. □

由(1.4.2)当p增大时，$\delta^2_{H_p}(f)$只能变小，这样可能出现两种情况：

(1) 当$p\to\infty$时，对任意的$f\in H$空间，$\delta^2_{H_p}(f)\to 0$.

(2) 当$p\to\infty$时，存在$f\in H$空间，$\delta^2_{H_p}(f)\to c\neq 0$.

在情况(1)，对任意的$f\in H$空间，有

$$f=\sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k, \tag{1.4.6}$$

并且还有

$$\|f\|=\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^2, \tag{1.4.7}$$

(1.4.7)称为巴塞伐尔-斯捷克洛夫(Parseval-Steklov)等式.

对任意的$f,g\in H$空间，还有推广的巴塞伐尔-斯捷克洛夫公式

$$(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k \bar{g}_k. \tag{1.4.8}$$

这是由于$|f_k\bar{g}_k|\leqslant\frac{1}{2}(|f_k|^2+|g_k|^2)$以及

$$(f,g)=\lim_{p\to\infty}(f^p,g)=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{p} f_k e_k, g\right)$$

$$=\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p}f_k(e_k,g)=\sum_{p=1}^{\infty}f_k\bar{g}_k$$

而得.

对于情形(2)，由引理1.4.8，存在$f\in H$空间，f的付利叶级数(1.4.5)收敛到$\tilde{f}\in H$空间，即$h=\tilde{f}-f\neq 0$. 于是

$$f=h+\sum_{k=1}^{\infty}f_k e_k, \tag{1.4.9}$$

其中$(h,e_k)=0$，$k=1,2,\cdots$.

定义1.4.9 对任意的$f\in H$空间，使(1.4.6)成立的就模正交系$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$称为完备就模正交系，简称正交基.

定理1.4.10 就模正交系是H空间的一个正交基的充要条件是这个系支撑的线性流形在H空间中处处稠，或者(1.4.7)成立，或者(1.4.8)成立.

证明 后两个结论上面已经证明了，我们只证第一个结论.

必要性：$\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\subset H$空间且就模正交，$\forall f\in H$空间，作付利叶级数(1.4.5)的部分和，它可以任意接近付利叶级数本身，而部分和是这个系的线性组合，必要性得证.

充分性：取$\forall f\in H$空间，$\forall\varepsilon>0$，可找到$p=p(\varepsilon)$和$c_1(\varepsilon)$，$\cdots$，$c_p(\varepsilon)$，使$\|f-\sum_{k=1}^{p}c_k(\varepsilon)e_k\|<\varepsilon$. 由付里叶系的极小性质以及$\delta^2_{H_p}(f)$的单调性，对一切$q\geqslant p$，

$$\|f-\sum_{k=1}^{q}f_k e_k\|\leqslant\|f-\sum_{k=1}^{p}f_k e_k\|^2\leqslant\|f-\sum_{k=1}^{p}c_k(\varepsilon)e_k\|^2<\varepsilon,$$

即f可展成(1.4.6)形成的付利叶级数. □

由定理1.4.10及希尔伯特-施密特(Hilbert-Schmidt)方法得

定理 1.4.11 可分 H 空间一定存在正交基.

§2 紧 算 子

1. 线性算子的概念

设 B_1 和 B_2 是两个 B 空间，$B_1' \subset B_1$ 空间，如果 $\forall f \in B_1'$，对应有元素 $g = Af$，$g \in B_2$ 空间，则称在 B_1' 上定义了一个从 B_1 空间到 B_2 空间的算子 A. B_1' 称为 A 的定义域，记为 D_A. 当 $f \in D_A$ 时，形如 Af 的元素集称为算子 A 的值域. 记为 $R_A \subset B_2$ 空间.

如果 B_2 空间是一个复数空间，则称算子 A 为泛函，通常用 l 表示.

定义 2.1.1 设 $f \in D_A$，$\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D_A$，且当 $k \to \infty$ 时，$\|f_k - f\|_{B_1} \to 0$，恒有 $\|Af_k - Af\|_{B_2} \to 0$，则称算子 A 在点 $f \in D_A$ 处连续. 设 $E \subset D_A$，对任意的 $f \in E$，A 连续，则称 A 在 E 上连续. 在 D_A 上连续的算子称为连续算子.

对任意的 $f_i \in D_A$ 以及数 c_i，$i = 1, 2$，有

$$A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 A f_1 + c_2 A f_2,$$

则称 A 为线性算子.

线性算子将 B_1 空间中的 0 元素变成 B_2 空间中的 0 元素.

设 A_1, A_2 是具公共定义域 D 的两个线性算子，定义线性算子 $A = c_1 A_1 + c_2 A_2$（其中 c_1, c_2 为复数（或实数））用如下方法：

$$\forall f \in D, \quad Af = c_1 A_1 f + c_2 A_2 f,$$

因而具公共定义域 D 的所有线性算子形成的集合是一个线性空间. 如果这个线性空间中引进模，使成为线性有模空间，则此空间必是 B 空间. 为证明这一结论，先给出如下定义：

定义 2.1.2 设 A 是以 D_A 为定义域的线性算子，如果存在常数 $C > 0$，使对任意的 $f \in D_A$，有 $\|Af\|_{B_2} \leqslant C\|f\|_{B_1}$，则称算子 A 是有界的. 常数 C 的下界称为算子 A 的模，记为 $\|A\|$.

定理 2.1.3 设 $f\in D_A$，则从 B_1 空间到 B_2 空间的有界线性算子 A 的模由以下等式给出

$$\|A\|=\sup_{f\in D_A}\frac{\|Af\|_{B_2}}{\|f\|_{B_1}}. \tag{2.1.1}$$

证明 令 $C=\sup\limits_{f\in D_A}\dfrac{\|Af\|_{B_2}}{\|f\|_{B_1}}$，因此 $\forall f\in D_A$，有

$$\|Af\|_{B_2}\leqslant C\|f\|_{B_1}.$$

又由上确界的定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ f_\varepsilon\in D_A$，使

$$\frac{\|Af_\varepsilon\|_{B_2}}{\|f_\varepsilon\|_{B_1}}\geqslant C-\varepsilon.$$

从而 $\forall\varepsilon>0$，$\|A\|\geqslant C-\varepsilon$，即 $\|A\|\geqslant C$，所以 $\|A\|=C$. □

如果 A 是有界线性泛函 l，则

$$\|l\|=\sup_{f\in D_A}\frac{|lf|}{\|f\|_{B_1}}.$$

对有界线性算子按上面方法定义的模满足模的三条公理.

定理 2.1.4 从 B_1 空间到 B_2 空间的具有公共定义域的有界线性算子形成的线性流形配上算子模构成一个 B 空间.

证明 设 $\bar{B}$ 是从 B_1 空间到 B_2 空间的具有公共定义域 D_A 的有界线性算子的集合. 设 $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是 $\bar{B}$ 的基本列，即当 $i,j\to\infty$ 时，有 $\|A_i-A_j\|\to 0$，则 $\forall f\in D_A$，当 $i,j\to\infty$ 时，有 $\|A_if-A_jf\|_{B_2}\to 0$. 由 B_2 空间的完备性，存在 $g\in B_2$ 空间，使 $g=\lim\limits_{k\to\infty}A_kf$. 故存在 A，使 $Af=g=\lim\limits_{k\to\infty}A_kf$. 因为 $\forall f_1,f_2\in D_A$，有

$$\begin{aligned}A(f_1+f_2)&=g=\lim_{k\to\infty}A_k(f_1+f_2)\\&=\lim_{k\to\infty}A_kf_1+\lim_{k\to\infty}A_kf_2=Af_1+Af_2,\end{aligned}$$

故 A 是线性的.

由条件，当 $i,j\to\infty$ 时，

$$\|A_i-A_j\|\to 0.$$

从而当 $i,j\to\infty$ 时，