普通高等教育“十二五”规划教材

公共基础课教材系列

高等数学学习指导与同步训练教程

（第二版）

配同济第六版上下册

郑州轻工业学院数学与信息科学系 编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

公共基础课教材系列

高等数学学习指导与同步训练教程

（第二版）

郑州轻工业学院数学与信息科学系　编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书为同济大学数学系编写的《高等数学》第六版的配套辅导教材，共分12章，章节的划分与第六版完全一致. 每章内容由六部分组成：基本概念、性质与结论；典型例题分析；疑难问题解答；同步训练；自测题；同步训练及自测题参考答案与提示. 书末附有2010～2011年全国硕士研究生入学统一考试数学试题及答案.

本书可作为高等工科院校高等数学学习的辅导读物，也可作为教师教学的参考书，同时也是一本同步指导与训练教程，而且也可作为学生考研的系统复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与同步训练教程/郑州轻工业学院数学与信息科学系编. —2版. —北京:科学出版社，2011

(普通高等教育"十二五"规划教材·公共基础课教材系列)

ISBN 978-7-03-032240-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郑… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第176744号

责任编辑:王 超 张 斌/责任校对:马英菊

责任印制:吕春珉/封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011年9月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2011年9月第一次印刷 印张:24 1/2

印数:1—4 000 字数:580 000

定价:39.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉)

销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235(HP04)

前　言

本书第二版保留了第一版的框架结构，但对第一版的具体内容作了重大调整变动，更具可读性和实用性.

全书共分 12 章，章节的划分与同济大学第六版高等数学完全一致. 每章内容由六部分组成：第一部分基本概念、性质与结论主要对本章内容进行归纳，既简洁又翔实. 第二部分典型例题分析，对每节的内容逐个知识点进行剖析，选编的例题题型多，覆盖面广，基本涵盖了本章各节典型的重、难点题目. 第三部分疑难问题解答对每个章节的疑难问题给出详细的解答. 第四部分同步训练旨在帮助学生通过训练，巩固基础，掌握本节的基本知识、解题方法与技巧. 其中带“ * ”的习题多为综合试题和近年来的考研试题，供学有余力和有志于考研的学生练习用. 第五部分自测题重在覆盖面，难度略高于期中、末试题. 这样有助于检验学生对本章内容的掌握情况，发现知识的缺陷，从而为完成全部课程的学习奠定基础. 第六部分同步训练及自测题参考答案与提示附有答案或提示，指出解题的思路及方法. 书末附有 2010～2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题及答案，使有志于继续深造的同学可同步完成考研备考，达到考研的能力和要求.

本书结构严谨，条理清晰，综合性强，并有较强的针对性和可操作性，深入浅出，便于自学，本书可作为综合大学，理工科大学，高等师范学校理、工、经各专业大学生学习“高等数学”课程的辅导读物和训练教程，对青年教师及报考研究生的大学生来说，本书也是较好的教学参考书和考研复习用书.

本书由郑州轻工业学院数学与信息科学系组织编写，编写人员有：郭卫华、王霞、张新敬、黄守佳、职桂珍、赵玲玲、周永安、刘强、黄士国. 在编写的过程中我们博采众家之长，汲取了多本参考书的精华，在此向各位作者表示感谢. 由于时间仓促，水平有限，不足之处在所难免，殷切希望读者提出宝贵意见，以便改进和修正.

编　者

2011.5

于郑州轻工业学院

目 录

第一章　函数、极限与连续

一、基本概念、性质与结论

1. 函数

1)概念

(1)映射：满射、单射和双射；逆映射与复合映射.

(2)函数、分段函数.

(3)反函数、复合函数.

(4)基本初等函数、初等函数.

2)性质

(1)有界函数 $f(x)$：$x\in X\subset D$，存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$.

(2)单调增加(或减少)函数 $f(x)$：x_1、$x_2\in X\subset D$，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)).$$

(3)奇(或偶)函数 $f(x)$：$x\in D$,D 关于原点对称，$f(-x)=-f(x)$(或 $f(-x)=f(x)$).

(4)周期函数 $f(x)$：$x\in(-\infty,+\infty)$，存在 $T>0$，使 $f(x+T)=f(x)$.

2. 极限

1)概念

(1)数列极限和函数极限.

(2)无穷小、无穷大、无穷小的阶.

2)性质与结论

(1)收敛数列极限的唯一性：数列 $\{x_n\}$ 不能收敛于两个不同的极限.

(2)收敛数列的有界性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

(3)收敛数列的保号性：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，且 $a>0$(或 $a<0$)，那么存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $x_n>0$ (或 $x_n<0$).

(4)收敛数列与其子数列之间的关系：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

(5)函数极限的唯一性：如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么极限唯一.

(6)函数极限的局部有界性：如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，那么存在常数 $M>0$ 和 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

(7)函数极限的局部保号性：如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在常数 $\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

如果 $f(x)\to A(x\to x_0)(A\neq 0)$，那么存在点 x_0 的某一去心邻域，在该邻域内，有

$|f(x)|>\frac{1}{2}|A|$.

(8)函数极限与数列极限的关系：如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$的极限存在，$\{x_n\}$为 $f(x)$定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0(n\in \mathbf{N}^+)$，那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to x_0}f(x).$$

(9)极限存在的充要条件：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(10)夹逼准则.

①数列形式：若$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$满足 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

②函数形式：若在 x_0 的某去心邻域(或$|x|>M>0$)内，满足 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

3)单调有界数列

此种数列必有极限.

4)两个重要极限

①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

②$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

5)无穷小的性质

(1)有限个无穷小的和(或积)也是无穷小.

(2)有界函数(或常数)与无穷小的乘积是无穷小.

(3)无穷小(不为 0)的倒数为无穷大，无穷大的倒数为无穷小.

(4)β与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

(5)若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$.

3. 函数连续性

1) 概念

(1)函数在 x_0处连续的概念：设函数 $y=f(x)$在点 x_0的某一个邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时，对应的函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $y=f(x)$在点 x_0处连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$在点 x_0 处左连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$在点 x_0 处右连续.

(2)左、右连续与连续的关系：函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续$\Leftrightarrow$函数 $y=f(x)$在点 x_0 处左连续且右连续.

(3)函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续：$f(x)$在(a,b)内每一点处连续，在 $x=a$ 右连续，在 $x=b$ 左连续.

(4)函数 $f(x)$间断点的类型：如果 x_0 是函数 $f(x)$的间断点，但左极限 $f(x_0^-)$及右极限 $f(x_0^+)$都存在，那么 x_0 称为函数 $f(x)$的第一类间断点；不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点. 在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

2) 结论

(1)初等函数的连续性：基本初等函数在它们的定义域内都是连续的. 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

(2)闭区间上连续函数的性质.

①最大值和最小值定理：在闭区间上连续的函数在该区间上一定能取得它的最大值 M 和最小值 m.

②有界性定理：在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

③零点定理：设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且 $f(a)$与 $f(b)$异号，那么在开区间(a, b)内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

④介值定理：设函数 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，那么，对于 $f(a)$与 $f(b)$之间任意一个数 C，在开区间(a, b)内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

二、典型例题分析

1. 函数及其性质

例 1.1　(1)设函数 $y=f(x)$，$x\in[0, 4]$，求函数 $f(x^2)$及 $f(x+2)+f(x-1)$的定义域.

(2)已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[g(x)]=1-x$，且 $g(x)\geqslant 0$，求 $g(x)$及其定义域.

解　(1)因为 $y=f(x)$的定义域为$[0, 4]$，所以对于函数 $f(x^2)$应有 $0\leqslant x^2\leqslant 4$，即有 $-2\leqslant x\leqslant 2$，故函数 $f(x^2)$的定义域为$[-2, 2]$.

对于函数 $f(x+2)+f(x-1)$，应有$\begin{cases}0\leqslant x+2\leqslant 4\\0\leqslant x-1\leqslant 4\end{cases}$，即$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\1\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$，求其交集得 $1\leqslant x\leqslant 2$，故函数 $f(x+2)+f(x-1)$的定义域为$[1, 2]$.

(2)由题设及复合函数的定义可得

$f[g(x)]=e^{g^2(x)}=1-x$，且 $g(x)\geqslant 0$，所以 $g(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

由$\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0\\1-x>0\end{cases}$，解得 $g(x)$的定义域为$(-\infty, 0]$.

评注　求初等函数的定义域有以下原则：分式的分母不能为零；根式中负数不能开偶次方；对数的真数不能为零和负数；$\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为$|x|\leqslant 1$，$\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；求复合函数的定义域，通常是将复合函数看成一系列初等函数的复合，然后考察每个初等函数的定义域和值域，得到对应的不等式组，通过联立求解不等式组，就可得到复合函数的定义域；对于应用问题中的函数，其定义域由实际问题的具体含义确定.

例 1.2 把下列函数分解为最简单的函数.

(1)$y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$；(2)$y=3^{\arcsin^2(1+2x)}$.

解 由外向里进行分解

(1)$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=w^{-\frac{1}{2}}$，$w=x^2+1$；

(2)$y=3^u$，$u=v^2$，$v=\arcsin w$，$w=1+2x$.

例 1.3 问函数 $y=\sqrt{1-u}$ 与 $u=2+e^x$ 能否构成复合函数？为什么？

解 两个函数能否构成复合函数，取决于外层函数的定义域和内层函数的值域有没有公共部分. 这里外层函数 $y=\sqrt{1-u}$ 的定义域为 $D_f=\{u\,|\,u\leqslant 1\}$，内层函数 $u=2+e^x$ 的值域为 $R_u=\{u\,|\,2<u<+\infty\}$，由于交集为空集，即 $D_f\cap R_u=\phi$，所以函数 $y=\sqrt{1-u}$ 与 $u=2+e^x$ 不能构成复合函数.

例 1.4 求 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<1\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16, & x>2\end{cases}$ 的反函数.

解 当 $x<-1$ 时，$y=1-2x^2$，得 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$，$y<-1$；

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=x^2$，得 $x=\sqrt[3]{y}$，$-1\leqslant y\leqslant 8$；

当 $x>2$ 时，$y=12x-16$，得 $x=\dfrac{y+16}{12}$，$y>8$.

所以反函数 $y=f^{-1}(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-x}, & x<-1\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8\\ \dfrac{x+16}{12}, & x>8\end{cases}$

评注 反函数的求解方法比较固定，由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，对换自变量与因变量的位置，即可得到所求的反函数 $y=f^{-1}(x)$. 对分段函数要注意所求函数表达式的区间.

例 1.5 讨论函数 $f(x)=\varphi(x)\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ 的奇偶性，其中 $\varphi(x)$ 为奇函数.

解 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}\varphi(-x)=-\dfrac{a^x(a^{-x}-1)}{a^x(a^{-x}+1)}\varphi(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}\varphi(x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

例 1.6 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对 $\forall x, y$ 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，且 $f(x)\neq 0$，证明 $f(x)$ 为偶函数.

证 由 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$，用 $-y$ 替换 y 得

$$f(x-y)+f(x+y)=2f(x)\cdot f(-y),$$

得

$$2f(x)\cdot f(y)=2f(x)\cdot f(-y),$$

又因为 $f(x)\neq 0$，故 $f(y)=f(-y)$，所以 $f(x)$为偶函数.

评注　判定函数奇偶性的方法：

(1) 根据奇偶性的定义或利用奇偶函数的运算性质. 如奇(偶)函数的代数和仍为奇(偶)函数；奇(偶)函数的积为偶函数；奇函数与偶函数的积为奇函数等.

(2) 证明 $f(-x)=-f(x)$或 $f(-x)=f(x)$.

例 1.7　设 $a<b$，函数 $f(x)$对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(a-x)=f(a+x)$，$f(b-x)=f(b+x)$，证明 $f(x)$为周期函数.

分析　若函数 $f(x)$是周期函数，且设其周期是 T，则对于$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned} f(x+T) &= f[b+(x+T-b)] = f[b-(x+T-b)] = f[2b-(x+T)] \\ &= f[a-(x+T-2b+a)] = f[a+(x+T-2b+a)] \\ &= f[x+T-2(b-a)] = f(x), \end{aligned}$$

所以 $T-2(b-a)=0$，即 $T=2b-2a$.

解　因为$\forall x\in\mathbf{R}$，

$$\begin{aligned} f(x+2b-2a) &= f(b+x+b-2a)=f[b-(x+b-2a)] \\ &= f(2a-x)=f(a+a+x) \\ &= f[a-(a-x)]=f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$为周期函数，$2b-2a$ 是它的一个周期.

评注　判定函数 $f(x)$为周期函数的主要方法是：①从定义出发，找到 $T\neq 0$，使得 $f(x+T)=f(x)$；②利用周期函数的运算性质证明.

2. 用定义证明极限

例 1.8　利用定义证明下列数列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=1$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{n^2-n}=4$.

证　(1)对于任给的 $\varepsilon>0$，要使$\left|1-\dfrac{1}{2^n}-1\right|=\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$，只要 $2^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$即可.

两边取对数 $n\ln 2>\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $n>-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2}$，故对于任给的 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<1$)，可取正整数 $N=\left[-\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln 2}\right]$.

当 $n>N$ 时，恒有$\left|1-\dfrac{1}{2^n}-1\right|<\varepsilon$ 成立，即$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)=1$.

(2) 由$\left|\dfrac{4n^2}{n^2-n}-4\right|=\dfrac{4n}{n^2-n}$，先将它放大，再解不等式.

当 $n\geqslant 2$ 时，$n^2-n\geqslant\dfrac{n^2}{2}$，于是$\dfrac{4n}{n^2-n}\leqslant\dfrac{8}{n}$，因此任给的 $\varepsilon>0$，

为使 $\left|\dfrac{4n^2}{n^2-n}-4\right|=\dfrac{4n}{n^2-n}\leqslant\dfrac{8}{n}<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{8}{\varepsilon}$，

故取 $N=\left[\dfrac{8}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{4n^2}{n^2-n}-4\right|<\varepsilon$ 恒成立，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2}{n^2-n}=4$.

评注　用定义证明数列的极限时，关键是对任给的 $\varepsilon>0$，寻找 N，但不必找最小的

N，即 N 等于多少并不重要，关键是否存在 N.

找 N 的方法有两种(以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 为例)：

(1) 直接解不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$，得 $n>\varphi(\varepsilon)$，取 $N\geqslant[\varphi(\varepsilon)]$(或 $N=[\varphi(\varepsilon)]$).

(2) 将 $|x_n-A|$ 适当放大，即 $|x_n-A|\leqslant\cdots\leqslant g(n)$(其中 $g(n)$ 为一个较简单的无穷小量)，然后解不等式 $g(n)<\varepsilon$，得 $n>\varphi(\varepsilon)$，取 $N\geqslant[\varphi(\varepsilon)]$(或 $N=[\varphi(\varepsilon)]$).

例 1.9 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$，问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的值是多少，并求出 N，使当 $n>N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时，求出 N.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，对于 $\varepsilon=0.001$，由于 $|x_n-0|=\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$，所以只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon=0.001$ 即可，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，所以取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]=1000$.

当 $n>1000$ 时，x_n 与 0 的差的绝对值小于 0.001.

例 1.10 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则(　　).

(A)若 x_n 发散，则 y_n 必发散　　　(B)若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(C)若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小　　　(D)若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

解 运用排除法，若令 $x_n=n$，$y_n=\dfrac{1}{n^2}$，则排除(A).

若令 $x_n=\begin{cases}0, & n=2k+1\\ n, & n=2k\end{cases}$，$y_n=\begin{cases}n, & n=2k+1\\ 0, & n=2k\end{cases}$，则排除(B).

若(C)成立，则显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，但反过来却未必成立. 例如若取 $x_n=\dfrac{1}{n^2}$，$y_n=n$，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则排除(C).

综上所述应选(D)，若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，事实上，$y_n=(x_ny_n)\cdot\dfrac{1}{x_n}\to0(n\to\infty)$.

评注 解选择题切忌一一进行求证，应运用综合排除法、特殊值法和反证法等.

例 1.11 利用定义证明下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

证 (1)考察 $|x^2-9|=|x-3||x+3|$，在 $x\to3$ 的过程中，x 只在 3 附近取值，故可限制：$|x-3|<1$，于是 $2<x<4$，$|x+3|<7$，因此 $|x^2-9|=|x-3||x+3|<7|x-3|$.

对于任给的 $\varepsilon>0$，欲使 $|x^2-9|<\varepsilon$，只要 $7|x-3|<\varepsilon$，即 $|x-3|<\dfrac{\varepsilon}{7}$，存在 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{7}\right\}$，当 $0<|x-3|<\delta$ 时，有 $|x^2-9|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to3}x^2=9$.

(2) 任给 $\varepsilon>0$，要证 $\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{2x+3}{3x}-\dfrac{2}{3}\right|=\left|\dfrac{2x+3-2x}{3x}\right|=\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$，只需 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则对 $\forall\varepsilon>0$. 当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{2x+3}{3x}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$，

即$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

评注　证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$(或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$)的关键在于，对于任给的$\varepsilon>0$，找相应的$\delta>0$(或$X>0$)，使得当$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)时，不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立. 因此找$\delta$(或$X$)时，一般从解$|f(x)-A|<\varepsilon$入手，尽量将上述不等式转化为关于$|x-x_0|$(或$|x|$)的不等式，将$|x-x_0|$(或$|x|$)视为未知数来解. 注意不要在解不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$的过程中，将$x$视为未知数来解，否则无法找到相应的$\delta$(或$X$).

在上述(1)中，用了这样的手法：当$x\to x_0$时，可将x限制在x_0的一个邻域内，即限制x满足$|x-x_0|<r$，在(1)中$r=1$. 在此限制条件下，就可推出$|f(x)-A|<c|x-x_0|$(其中c为某一确定的常数)，于是由$c|x-x_0|<\varepsilon$，就可保证$|f(x)-A|<\varepsilon$.

3. 利用四则运算法则求极限

例 1.12　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n^2+4n-5}-(n-1)]$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n+x^{n-1}+\cdots+x-n}{x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^{2n}+2)^2-(x^{2n}-2)^2}{(x^n+1)^2+(x^n-1)^2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+100}-x)$.

解　(1) 分子有理化，得

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n-5-(n^2-2n+1)}{\sqrt{n^2+4n-5}+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n-6}{\sqrt{n^2+4n-5}+n-1}=3.$$

(2) $$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1+x^{n-1}-1+\cdots+x^2-1+x-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^n-1}{x-1}+\frac{x^{n-1}-1}{x-1}+\cdots+\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{x-1}{x-1}\right).$$

因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1}=n$，所以

$$\text{原式}=n+n-1+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(3) $$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^{2n}+2+x^{2n}-2)(x^{2n}+2-x^{2n}+2)}{(x^{2n}+2x^n+1)+(x^{2n}-2x^n+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^{2n}}{2(x^{2n}+1)}=4.$$

(4) $$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{100x}{\sqrt{x^2+100}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{100}{\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}+1}=50.$$

评注　(1) 对于有理函数或无理函数的$\dfrac{0}{0}$型极限，可通过分解因式及分子或分母有理化析出并消去致零因子，化为定式求极限.

(2) 对于有理函数或无理函数及相应数列的$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限，应采取“抓大放小”原则，关注分子和分母的最高次项. 当分子与分母次数相同时，极限为分子与分母最高次项的系数之商；当分子的次数低于分母的次数时极限为0；当分子的次数高于分母的次数时极

限为∞.

4. 利用"无穷小量与有界变量的乘积是无穷小量"求极限

例 1.13　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x+x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$.

解　(1)当 $x\to0$ 时，x^2 是无穷小量，虽然 $\sin\dfrac{1}{x+x^2}$ 的极限不存在，但因 $\left|\sin\dfrac{1}{x+x^2}\right|\leqslant1$，即它是有界的，因此

$$\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x+x^2}=0.$$

本题易犯的错误是：

$$\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x+x^2}=\lim_{x\to0}x^2\cdot\lim_{x\to0}\sin\frac{1}{x+x^2}=0.$$

错误在于，因为$\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x+x^2}$不存在，所以不能运用极限的四则运算法则.

(2)$\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$.

因为$\left|-2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant2$，故 $2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$为有界函数，而

$0\leqslant\left|\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|<\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to0$，当 $x\to+\infty$时，

故
$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0,$$

因此
$$\lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})=0.$$

5. 利用函数极限与数列极限的关系求极限

例 1.14　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{1}{2^n}$.

解　利用求函数极限的方法，求数列的极限.

由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，取 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$，则 $x_n\to0$，

$$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{1}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}=1.$$

例 1.15　证明极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

证　取 $x_n^{(1)}=2n\pi$，$x_n^{(2)}=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，则 $x_n^{(1)}\to+\infty$，$x_n^{(2)}\to+\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(1)} = \lim_{n\to+\infty}\sin 2n\pi = 0,\ \lim_{n\to\infty}\sin x_n^{(2)} = \lim_{n\to+\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n^{(1)}\neq\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n^{(2)}$，故极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

例 1.16　证明 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界，但当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 并不是无穷大.

证　$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界是指：$\forall M>0$，总存在 $x_0\in(-\infty, +\infty)$ 使得 $|f(x_0)|>M$.

事实上 $\forall M>0$，取 $x_0=2[M]\pi$，则 $|f(x_0)|=2[M]\pi>M$，这说明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界；当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 是无穷大是指：$\forall M>0$，总存在 $Z_0>0$，使当 $|x|>Z_0$ 时，恒有 $|f(x)|>M$；因此当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 并不是无穷大则是指：存在 $M>0$ 使对于 $\forall Z_0>0$，总有 x_0 满足条件 $|x_0|>Z_0$，但 $|f(x_0)|\leqslant M$.

事实上，取 $M=1$，$\forall Z_0>0$，记 $x_0=2[Z_0]\pi+\frac{\pi}{2}>Z_0$，而 $|f(x_0)|=0<1$，利用极限的归并性可将上述过程简化为：

取 $x_n=2n\pi\to+\infty$，则 $f(x_n)=2n\pi\cos 2n\pi\to+\infty$.

取 $y_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$，则 $f(y_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\to 0$，说明 $f(x)=x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界，但当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 并不是无穷大.

评注　(1)为证明极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在，只要寻找两个趋于 a 的数列 $x_n^{(1)}$ 和 $x_n^{(2)}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^{(1)})\neq\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^{(2)})$ 即可.

(2) 为证明 $f(x)$ 当 $x_n\to a$ 时不是无穷大量，即证 $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq\infty$，只要寻找一个趋近于 a 的数列 x_n^*，使 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n^*)\neq\infty$ 即可.

6. 利用极限存在的两个准则求极限

例 1.17　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)$.

解　(1)因为 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\quad (k=1, 2, \cdots, n)$,

所以 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，所以，原式$=1$.

(2) 因为 $\frac{n+k}{n^2+n}\leqslant\frac{n+k}{n^2+k}\leqslant\frac{n+k}{n^2+1}\quad (k=1, 2, \cdots, n)$,

所以$\dfrac{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{n^2+n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+n}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+k}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k}{n^2+1}=\dfrac{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{n^2+1}$,

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{n^2+n}=\dfrac{3}{2}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{n^2+1}=\dfrac{3}{2}$,所以,原式$=\dfrac{3}{2}$.

评注 利用夹逼定理求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的要点是:将$x_n$适当放大及缩小,即找两个数列$\{y_n\}$及$\{z_n\}$,使$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且$y_n$与$z_n$的极限都存在并且相等,即$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$.

例 1.18 利用单调有界准则证明下列极限存在,并求极限值.

(1) 设$x_1>0$,$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$,其中$a>0$ $(n=1,2,\cdots)$;

(2) $x_1=\sqrt{2}$,$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$,$(n=1,2,\cdots)$.

证 (1) 显然$x_n>0$,$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)\geqslant\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n\cdot\dfrac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$,即$x_n$有下界.

又因为$x_{n+1}-x_n=\dfrac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0$,故由单调有界原理,知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则在$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$两边令$n\to\infty$取极限得$A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{a}{A}\right)$,解得$A=\pm\sqrt{a}$(负值舍去),故得$A=\sqrt{a}$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

(2) 先证x_n有上界.因为$x_1=\sqrt{2}<2$,由数学归纳法,假设对n成立,即$x_n<2$,则$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2$,所以数列$\{x_n\}$为有上界数列.

又因为$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$,所以$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\dfrac{-(x_n-2)(x_n+1)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}>0$,所以数列$\{x_n\}$为单调递增数列.

由单增有上界数列必有极限的准则知$\{x_n\}$的极限存在,设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,由$x_n^2=2+x_{n-1}$,有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}(2+x_{n-1})$,即$A^2=2+A$,解得$A=-1$,$A=2$,由于数列单增且$x_1=\sqrt{2}>0$,从而$A=2$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

评注 (1) 在证明$\{x_n\}$单调有界时,常常使用数学归纳法.

(2) 为证明数列$\{x_n\}$单调,只需证明$x_{n+1}-x_n\geqslant 0$(或$\leqslant 0$) $(n=1,2,\cdots)$.

(3) 证明了$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在后,为求此极限值$A$,可在$x_n$递推式的两端取极限,即得关于$A$的方程.

7. 利用两个重要极限和等价无穷小求极限

例 1.19 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; (2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m,n为正整数).

解 (1) 利用和差化积公式有$\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\dfrac{2\sin 2x\sin x}{2x\cdot x}\cdot 2$.