高校经典教材同步辅导丛书
配套高教版·程其襄主编

九章丛书

实变函数与泛函分析基础同步辅导及习题

（第三版）

主编 孙雨雷 冯君淑

◆知识点窍 ◆逻辑推理 ◆习题全解
◆全真考题 ◆名师执笔 ◆题型归类

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

实变函数与泛函分析基础
（第三版）
同步辅导及习题全解

主编　孙雨雷　冯君淑

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

前言

实变函数与泛函分析基础(第三版)是数学类专业重要的一门基础课。程其襄等主编的《实变函数与泛函分析基础》(第三版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《实变函数与泛函分析基础(第三版)同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到"实变函数与泛函分析基础"这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. **学习导引**。说明本章包括的主要内容,学习的重点以及需要掌握的知识点。

2. **知识点归纳**。对每章知识点做了简练概括,梳理了各知识点之间的脉络联系,突出各章主要定理及重要公式,使读者在各章学习过程中目标明确,有的放矢。

3. **答疑解惑**。归纳各章的重、难点,帮助学生进一步理解各章的重要知识点。

4. **典型例题与解题技巧**。该部分选取了一些具有启发性或综合性较强的经典例题,对所给例题先进行分析,再给出详细解答,意在抛砖引玉。

5. **课后习题全解**。教材中课后习题丰富、层次多样,许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论,促其掌握基本解题方法。我们对教材的课后习题给了详细的解答。

由于时间较仓促,编者水平有限,难免书中有疏漏之处,敬请各位同行和读者给予批评、指正。

编者

2011 年 9 月

目　录

第一章
集　合

学习导引

集合这个概念是数学中的原始概念之一,于19世纪70年代由康托尔首先提出,而后集合的观点和方法迅速渗透到数学的各个分支,对现代数学的发展起了巨大的推动作用,集合论不仅是实变函数与泛函分析的基础,同时也是其他数学分支的基本工具.

本章介绍了一些集合理论,把集合的并与交运算推广到了无限多个的情形,并引入了集合列的上限集与下限集的运算,集合对等与集合基数的概念,并对集合运算规则作了仔细的讨论,这些内容也可以为读者学习其他近代数学理论作一些准备.

知识点归纳

一、集合

1. 集合概念

在一定范围内的个体事物的全体,当将它们看作一个整体时,我们把这个整体称为一个集合,其中每个个体事物叫做该集合的元素.我们用符号属于“$\in$”和不属于“$\overline{\in}$”表示集合和它的元素间的关系.

集合可用列举法或描述法表示,如:

$$A = \{1,2,3,4,5\} \text{ 或 } A = \{x \mid x < 6, x \in \mathbf{N}\}.$$

(1) 对于两个集合A与B,若$x \in A$必有$x \in B$,则称A包含于B或B包含A,记做$A \subset B$,或$B \supset A$,若$A \subset B$,且B中含有不属于A的元素,则称A是B的真子集,记做$A \subsetneqq B$或$B \supsetneqq A$.

(2) 设A,B是两个集合,若$A \subset B$且$B \supset A$,则称集合A与B相等,记做$A = B$.

(3) 设A是任给的一个集合,对于每一个$a \in A$,我们指定一个集合A_a,这样得到的集合的总体称为集合族,记为$\{A_a \mid a \in A\}$.A称为指标集,当$A = N$时,$\{A_a\}$也称集合列,记做$\{A_k\}$.

集合可分为空集、有限集与无限集.

2. 集合的运算

(1) 集合的并和交运算

设 A,B 是两个集合,则称集合 $\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 为 A 与 B 的并集或和集,记做 $A \cup B$.

设 A,B 是两个集合,则称集合 $\{x \mid x \in A, x \in B\}$ 为 A 与 B 的交集或通集,记做 $A \cap B$,若 $A \cap B = \varnothing$,称 A 与 B 不相交.

运算性质

① 交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

② 结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

③ 分配律　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cap (\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} (A \cap B)$;

④$A \cup A = A, A \cap A = A$;

⑤$(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$;

⑥ 若 $A_\alpha \subset B_\alpha, \alpha \in A$,则 $\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha$.

(2) 集合的差和余运算

设 A,B 是两个集合,则称集合 $\{x \mid x \in A, x \overline{\in} B\}$ 为 A 与 B 的差集,记做 $A\backslash B$ (读做 A 减 B).

当 A 是 S 的子集时,称 $S\backslash A$ 是集合 A 关于 S 的补集或余集,记做$\complement_S A = S\backslash A$.

$A\backslash B$ 运算有以下性质:

①$A \cup \complement_S A = S$(全集),$A \cap \complement_S A = \varnothing, \complement_S(\complement_S A) = A, \complement_S S = \varnothing, \varnothing_S \varnothing = S$;

②$A\backslash B = A \cap \complement_S B$;

③ 若 $A \subset B$,则$\complement_S A \subset \complement_S B$;若 $A \cap B = \varnothing$,则 $A \subset \complement_S B$;

④ 德·摩根(De MorgA_n) 律:$\complement_S(\bigcup_{\alpha \in A} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} \complement_S A_\alpha$;

⑤$\complement_S(\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} \complement_S A_\alpha$.

(3) 集合列的上极限和下极限

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是任意一列集,由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一集列的上限集或上极限,记为$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ 或 $\lim_{n\to\infty} \sup A_n$;对集列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 那种除有限个下标外,属于集列中每个集的元素全体所组成的集称为这一集列的下限集或下极限,记为 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ 或 $\lim_{n\to\infty} \inf A_n$.

$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid$ 存在无穷多个 A_n,使 $x \in A_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$;

$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{x \mid$ 当 n 充分大以后都有 $x \in A_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

一般地,$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$;如果$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$,则称集列 $\{A_n\}$ 收敛,将这一集称为 $\{A_n\}$ 的极限,记为$\lim_{n\to\infty} A_n$.

(4) 集合的直积

设 X、Y 是两个集合,称一切有序"元素对"(x,y)(其中 $x \in X, y \in Y$) 构成的集合为 X 与 Y 的直积集,记做 $X \times Y$,即

$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$.

二、对等与基数

1. 映射

(1) 映射的定义：设X,Y为两个非空集合，若对每个$x\in X$，都有唯一的$y\in Y$与之对应，则称这个对应为映射（变换或函数），记做$f:x\to Y$，并称f是从X到Y的一个映射. $x\in X$在Y中对应的y称为x在映射f下的（映）像，x称为y的一个原像，记做$y=f(x)$.

若对每一个$y\in Y$，均有$x\in X$，使得$y=f(x)$，则称此f为从X到Y的满射（也定义为：如果映射f满足$f(X)=y$，称f是X到y的满射）.

设$f:X\to Y$. 当$x_1,x_2\in X$，且$x_1\neq x_2$时，有$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f是从X到Y的一个单射.

若f既是单射又是满射，则称f是X到Y上的一一映射. 在一一映射下，映射$\psi:Y\to X$称为φ的逆映射，记做$\varphi-1$，其中x由关系$y=\varphi(x)$确定. 一一映射又称双射.

设$f:X\to Y,g:Y\to W$，则由$h(x)=g[f(x)],x\in[x]$定义的$h:X\to W$称为g与f的复合映射.

(2) 映射的性质

对于$f:X\to Y$以及$A\subset X$，记

$f(A)=\{y\in Y\mid x\in A,y=f(x)\}$,

称$f(A)$为集合A在映射f下的映像集（$f(\varnothing)=\varnothing$）. 有

$f(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha),f(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f(A_\alpha)$.

对于$f:X\to Y$以及$B\subset Y$，记

$f^{-1}(B)=\{x\in X:f(x)\in B\}$,

称$f^{-1}(B)$为集合B关于f的原像集，有：若$B\subset A$，则

$f^{-1}(B)\subset f^{-1}(A);f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(B_\alpha)$;

$f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(B_\alpha);f^{-1}(B^C)=\complement_S(f^{-1}(B))$.

2. 集合的对等

(1) 对等的定义

设A、B是两个非空集合，如果存在某甲$\varphi:A\xrightarrow{1-1}B$，则称$A$和$B$对等，记为$A\sim B$，此外规定$\varnothing\sim\varnothing$.

(2) 对等关系的性质

① 自反性$A\sim A$;

② 对称性 若$A\sim B$，则$B\sim A$;

③ 传递性 若$A\sim B,B\sim C$，则$A\sim C$.

设$\{A_n\}$和$\{B_n\}$为两集列. 集列$\{A_n\}$中任何两个集不相交，集列$\{B_n\}$中的集亦两两不相交，即$A_n'\cap A_n''=\varnothing,B_n'\cap B_n''=\varnothing$（当$n'\neq n''$），如果$A_n\sim B_n(n=1,2,3,\cdots)$，则$\cup A_n\sim\cup B_n$.

(3) 两个集合对等的判定方法

（伯恩斯坦定理）设A、B是两个非空集合. 如果A对等于B的一个子集，B又对等于A的一个子集，那么A对等于B.

基本方法主要有以下三种：

一是根据对等的定义来进行论证，即构造两个集合之间的1－1对应关系；二是利用伯恩斯坦定理来论证，即欲证$A \sim B$，只需证明A、B各与对方的一个子集对等即可；三是利用对等的传递性来进行证明.

3. 集合的基数

设$M_n=\{1,2,\cdots,n\}$，A是一个集合. 如果A是一个空集或与某个M_n对等，则称A为有限集，并称n为A的基数. 空集的基数规定为零，不是有限集的集称为无限集.

M_n不能与它的真子集对等.

集合A为有限集的充要条件是A决不与其真子集对等，集合A为无限集的充要条件是$\bar{\bar{A}}$必能与其某些真子集对等.

有限集的基数是唯一的.

在对一切集合进行分类时，规定彼此对等的集归为一类，不对等的集属于不同的类. 我们赋予每一个这样的类一个记号，称之为这类集合中任一集合的基数(或势)，用$\bar{\bar{A}}$来表示.

三、可数集合

凡和全体正整数所成之集合$\mathbf{N}$对等的集合都称为可数集合或可列集合.

从定义出发，可得到一个集合A是可数集合的充要条件为：A可以排成一个无穷序列：$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$.

任一无限集必含一可数集合.

同时，若$A_n(n=1,2,\cdots,n)$为可数集，则并集$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$或$A=\bigcup_{n=1}^{m}A_n$都是可数集.

如果集A是由有限个指标决定的元素$a_{x_1,x_2\cdots x_n}$的全体，其中每个指标$x_k(k=1,2,\cdots,n)$在有限集或可数集上独立变化，则A必为有限集或可数集.

可数集合的任何无限子集必为可数集合，从而可数集合的任何子集或者是有限集或者是可数集.

有理数全体和代数的全体各成一可数集.

四、不可数集合

1. 不可数集合的定义

不是可数集合的无限集合称为不可数集合，如全体实数所成集合$\mathbf{R}$.

2. 连续基数与可数基数

连续基数指全体实数所成集合$\mathbf{R}$的基数，用c表示；

可数基数指全体正整数所成集合$\mathbf{N}$的基数，用a表示. 其中$a<c$.

3. 无最大基数定理

若A是非空集合，则A与其幂集(由A的一切子集所构成的集合族)不对等.

答疑解惑

1. 证明一个集合是可数集常用的方法

求得一可数集 B，使得所判定的集合 A 与 B 对等，通常取 B 为有理数集或有理端点区间所构成的集合；分解集合 A 为可数个可数集之并或有限个可数集之并，此时分解集的技巧是最重要的；利用教材中定理 6 判断集合是否可数.

2. 对等概念的数学意义

利用映射概念给两个集合的对等下的定义是：如果 A,B 是非空集合，存在一个从 A 到 B 的一一对应（双射），则称 A 和 B 对等，对等意味着两个集合有同样多的元素.

对于有限集，它的元素一定不能与其真子集有同样多的元素是显然的，所以有限集必不与其真子集对等. 对于无限集，则必与其某些真子集对等，即无限集与其真子集有相同多的元素，这似乎不好理解，但却是可以证明的事实.

3. 正确理解集合族的概念

集合族也称集族，即若有任意集合 Λ（有限集或无限集）. 如果对 Λ 中每个元素 α，都有一个集合 A_α 与之对应，则所有的 A_α 组成一个集合（此时集合 A_α 作为一个元素）称为以 Λ 为指标集的集族，记做 $\{A_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 或 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

集族即以集合为元素的集合.

若 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是任意集族，则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 是 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的并集，$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 是 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的交集.

4. $\in$ 和 $\subset$ 的区别

“$\in$”表示集合与其元素之间的从属关系，而“$\subset$”表示集合与集合之间的包含关系. $a\in A$ 不能写成 $a\subset A$，但可以写做 $\{a\}\subset A$，此时 $\{a\}$ 表示只含元素 a 的“单元素集”.

5. 上极限与下极限的概念

设 $A_1,A_2\cdots,A_k,\cdots$ 是任意一列集合，则由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一列集合的上限集，记做 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$ 或 $\lim\limits_{k\to\infty}\sup A_k$，即

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k = \{x \mid 存在无限多个 A_k,使 x\in A_k\}.$$

而由属于集列中从某指标 $k(x)$（指标与 x 有关）以后的所有集合 A_k 的那种元素 x 的全体（即除去有限多个集以外的所有集合 A_k 都含有的那种元素）组成的集称为这一列集合的下限集，记做 $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k$ 或 $\lim\limits_{k\to\infty}\inf A_k$，即

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}A_k = \{x \mid 当 k > k(x) 时, x\in A_k\},$$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k,\quad \underline{\lim_{k\to\infty}}A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

6. 关于连续基数的几个基本结论

(1) 任意区间 (a,b)，$[d,b)$，$(a,b]$，$(0,\infty)$，$[0,\infty)$ 均具有连续基数 c（这里 $a<b$）. 实数列全

体 E_∞ 和 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的基数也是 c.

(2) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列互不相交的集合,它们的基数都是 c,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的基数也是 c.

(3) 设有 c 个(c 表示连续基数) 集的并集,若每个集的基数都是 c,则其和集的基数也是 c.

(4) 存在基数大于 c 的集合,确切地讲,任意一个集合的所有子集作成新的集合的基数一定大于原集合的基数,从而得到没有最大的基数.

7. 可数集合的相关性质

(1) 任一无限集 E 必包含一可数子集.

(2) 若 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 为可数集,则并集 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 或 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{m}A_n$ 都是可数集.

(3) 可数集的任何子集,若不是有限集,便是可数集,则称其子集是至多可数的.

(4) 设 A 是无限集且其基数为 a,若 B 是可数集,则 $A\cup B$ 的基数仍为 a.

8. 不可数集合的相关问题

(1) $[0,1]=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 是不可数集.

(2) 设 A 是一个不可数集,B 是 A 的有限子集或可数子集,则 $A\backslash B\sim A$.

因而,开区间 $(0,1)$ 的基数也是 c(也记做 $\aleph$)

(3) $c=2^{\aleph_0}$.

(4) 闭区间 $[a,b]$ 的基数是 c,因而 (a,b),$[a,b)$,$(a,b]$ 均有基数 c.

(5) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一列两两互不相交的集合,且它们的基数都是 c,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的基数也是 c,$(0,\infty)$,$[0,\infty)$,$(-\infty,0)$,$(-\infty,0]$ 的基数都是 c.

9. 注意不要不加证明地把代数恒等式搬到集合运算中

例如,在代数运算中有等式 $(a+b)-a=b$,但对集合 A 及 B,等式 $(A\cup B)-A=B$ 却不一定成立,这个等式成立的充要条件为 A 与 B 不相交.

另外,可数集是所有无限集中基数最小的无限集,这一点必须引起注意. 所以从一无限集中去掉一个可数子集后,若剩下的仍为无限集,则剩下无限集的基数与原无限集的基数相等. 类似地,无限集并上一可数集后,其基数也不变. 而且,我们要知道存在不可数无限集,事实上,没有最大的基数.

典型例题与解题技巧

例 1 设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数列. 试用点集 $\{x\mid f_n(x)\geqslant k\}$,$k=1,2,\cdots$ 表示点集 $\{x\mid f_n(x)\to\infty,(n\to\infty)\}$.

【逻辑推理】 从极限的定义出发,找出点集 $\{x\mid f_n(x)\geqslant A\}$,$k=1,2,\cdots$ 中的点(不妨设为 x_0)所满足的条件.

【解题过程】 $\{x\mid f_n(x)\to\infty\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}\{x\mid f_n(x)\geqslant k\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{k\to\infty}\{x\mid f_n(x)\geqslant k\}$

事实上,若 $x_0\in\{x\mid f_n(x)\to\infty\}$,对任意自然数 k,存在自然数 m,使得对任意 $n\geqslant m$,成立

$f_n(x_0) \geqslant k$. 因此,对任意 $n \geqslant m, x_0 \in \{x \mid f_n(x) \geqslant k\}$,从而

$$x_0 \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \mid f_n(x) \geqslant k\}.$$

则

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \mid f_n(x) \geqslant k\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{k \to \infty} \{x \mid f_n(x) \geqslant k\}.$$

反之,若 $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=m}^{\infty} \{x \mid f_n(x) \geqslant k\}$ 则对任意自然数 k,有

$$x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{x \mid f_n(x) \geqslant k\}.$$

因此存在自然数 m,使得 $x_0 \in \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} \{x \mid f_n(x) \geqslant k\}$. 所以对任意 $n \geqslant m$,均有 $x_0 \in \{x \mid f_n(x) \geqslant k\}$,即 $f_n(x_0) \geqslant k$. 这样,对任意自然数 k,都存在自然数 m,使得对任意 $n \geqslant m$,成立 $f_n(x_0) \geqslant k$. 所以 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x_0) = \infty$,即 $x_0 \in \{x \mid f_n(x) \to \infty\}$.

由集合的包含关系,即得

$$\{x \mid f_n(x) \to \infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \underline{\lim}_{n \to \infty} \{x \mid f_n(x) \geqslant k\}.$$

例 2　作出实数全体与无理数全体间的 1 - 1 映射.

【解题过程】　在 $\mathbf{R}$ 中取出可数子集 $A = \{\mathrm{e}, \mathrm{e}^2, \mathrm{e}^3, \cdots, \mathrm{e}^n, \cdots\}$,则 $A \cup \mathbf{Q}$ 也是可数集,其中 $\mathbf{Q}$ 表示有理数全体. 所以 $A \cup \mathbf{Q} \sim A$,因而存在 A 到 $A \cup \mathbf{Q}$ 上的 1 - 1 映射,例如,设 $\mathbf{Q} = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$,则可取

$$\varphi(\mathrm{e}^{2k-1}) = \mathrm{e}^k, \varphi(\mathrm{e}^{2k}) = r_k, k = 1, 2, \cdots$$

则 φ 是 A 到 $A \cup \mathbf{Q}$ 上的 1 - 1 映射. 令

$$f(x) = \begin{cases} x, x \in \mathbf{R}/(A \cup \mathbf{Q}) \\ \varphi(x), x \in A \end{cases}$$

则 f 是 $\mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的 1 - 1 映射.

例 3　设 A 是一集合, $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ 是两个集列,证明:

(1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$;

(2) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) \subset (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$;

(3) $A \cap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n)$.

【证明】　(1) 因为对任意 $k \in \mathbf{N}$,恒有 $(A_k \cup Bk) \subset (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$,所以

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n).$$

又设 $x \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n)$,则对任意 n 恒有 $x \overline{\in} A_n \cup B_n$,即对任意 n 恒有 $x \overline{\in} A_n$,且 $x \overline{\in} B_n$,亦即 $x \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 且 $x \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$,故 $x \overline{\in} (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$. 综上所述,命题成立.

(2) 因为对任意 $k \in \mathbf{N}$,恒有 $A_k \cap B_k \subset (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n)$,所以

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n).$$

(3) 设 $x \in \overline{A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)}$,则 $x \in A$,且 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$,从而存在 $n_0 \in \mathbf{N}$,若 $x \in B_{n_0}$ 且 $x \in A$,即 $x \in A \cap B_{n_0}$,于是 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)$,故 $A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)$.

设 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n)$,则必有 B_{n_k},使 $x \in A \cap B_{n_k}$,而 $B_{n_k} \subset \cup B_n$,从而 $x \in A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$,即 $A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \supset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cup B_n)$.

综上所述,命题成立.

例 4 对于每个自然数 n,A_n 表示分母为 n 的有理数全体,证明

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_n = \mathbf{Q}$,$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} A_n = \mathbf{Z}$. 式中 $\mathbf{Q}$ 表示有理数全体,$\mathbf{Z}$ 表示整数全体.

【逻辑推理】 本题主要考察有理数意义和上极限、下极限的性质,从有理数的表示形式 q/p(p、q 均为整数,$p > 0$)出发,结合上、下极限的性质.

【证明】 对一切自然数 n,显然有 $\mathbf{Q} \supset A_n \supset A_1 = \mathbf{Z}$,所以 $\mathbf{Q} \supset \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \supset \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \supset \mathbf{Z}$.

因为对任一有理数 q/p,其中 p,q 均为整数,$p > 0$,且 $q/p = (qn)/(pn) \in A_{pn}$,$n = 1,2,\cdots$. 所以 q/p 属于无穷多个 A_n,即属于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$,从而 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Q}$.

又对 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 中的任一元素均可写成既约分数 q/p 的形式,其中 p,q 是整数,$p > 0$ 且 p,q 互质. 因为 $q/p \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$,所以必有 $N \in \mathbf{N}$,使 $n > N$ 时,$q/p \in A_n$. 若取质数 $n_0 \geqslant N$,因 $q/p \in A_n$,一定有整数 m,使 $q/p = m/n_0$,从而 $n_0 q = mp$. 于是 n_0 必能被 p 整除,由于 n_0 为质数,所以 $p = 1$,即 $q/p = q \in \mathbf{Z}$,故证得 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \mathbf{Z}$.

例 5 证明下列集合对等:

【逻辑推理】 可以根据对等的定义来进行论证,即构造两个集合之间的 1 - 1 对应关系.

【解题过程】 因为存在以下双射:

$f: x \to a + bx$,是从 $(0,1)$ 到 (a,b) 的双射,

$f: x \to \tan \frac{\pi x}{2}$,是从 $(0,1)$ 到 $(0,\infty)$ 的双射,

$f: x \to \tan \frac{\pi x}{2}$,是从 $(-1,1)$ 到 $(-\infty,\infty)$ 的双射.

所以 $(0,1) \sim (a,b)$,$(0,1) \sim (0,\infty)$,$(-1,1) \sim (-\infty,\infty)$.

例 6 设 $E \subset \mathbf{R}$ 是不可数的无限集. 令 $D = \{x \mid x \in E$ 且 $\forall \delta > 0$,$(x-\delta, x+\delta) \cap E$ 是不可数无限集$\}$. 试证 D 是不可数无限集.

【逻辑推理】 要证 D 是不可数无限集,只需证明 $E \backslash D$ 为互多可数集,由 D 的定义可知,对任意 $x \in E \backslash D$,存在 $\delta > 0$,使 $(x-\delta, x+\delta) \cap E$ 至多是可数集. 而有限或可数个至多可数集的并仍为至多可数集,可证得 $E \backslash D$ 是至多可数集. 结论得证.

【证明】 先证 $E \backslash D$ 为到多可数集,事实上,对任意 $x \in E/D$,由 D 定义,存在 $\delta > 0$,使 $(x-\delta, x+\delta) \cap E$ 至多是可数集,由于 $x \in E$,所以存在有理数 r'_x 与 r''_x 使 $x - \delta < r'_x < x < r''_x < x + \delta$,于是 $(r'_x, r''_x) \cap E$ 也至多可数. 但 $\{(r'_x, r''_x) \mid x \in E/D\}$ 至多为可数集,设 $\{(r'_x, r''_x) \mid x \in E \backslash D\} = \{(r'_{x_1}, r''_{x_1}), (r'_{x_2}, r''_{x_2}), \cdots, (r'_{x_n}, r''_{x_n}), \cdots\}$,则

$$E/D \subset \bigcup_{x\in E/D} [(r'_x, r''_x) \cap E] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(r'_{x_n}, r''_{x_n}) \cap E].$$

由于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} [(r'_{x_n}, r''_{x_n}) \cap E]$ 为有限个或可数个至多可数集的并，所以仍为至多可数集. 因此 $E\backslash D$ 是至多可数集. 于是 $D = E/(E\backslash D)$ 为无限不可数集.

课后习题全解

1. 证明：

(1) $(A-B)-C = A-(B\cup C)$；

(2) $(A\cup B)-C = (A-C)\cup(B-C)$；

(3) $(A-B)\cap(A-C) = A-(B\cup C)$.

【证明】 (1) $(A-B)-C = (A\cap \complement_S B)\cap \complement_S C$

$= A\cap \complement_S(B\cup C)$

$= A-(B\cup C)$；

(2) $(A\cup B)-C = (A\cup B)\cap \complement_S C$

$= (A\cap \complement_S C)\cup(B\cap \complement_S C)$

$= (A-C)\cup(B-C)$；

(3) $(A-B)\cap(A-C) = (A\cap \complement_S B)\cap(A\cap \complement_S C)$

$= A\cup \complement_S B\cap \complement_S C$

$= A\cap \complement_S(B\cup C)$

$= A-(B\cup C)$.

2. 证明：

(1) $(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)-B = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha - B)$；

(2) $(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)-B = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha - B$.

【证明】 (1) $(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)-B = (\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)\cap \complement_S B = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\cap \complement_S B) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha - B)$；

(2) $(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)-B = (\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)\cap \complement_S B = \bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\cap \complement_S B = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha - B$.

3. 设 $\{A_n\}$ 是一列集合，作 $B_1 = A_1, B_n = A_n - (\bigcup_{v=1}^{n-1} A_v), n>1$. 证明 $\{B_n\}$ 是一列互不相交的集，而且 $\bigcup_{v=1}^{n} A_v = \bigcup_{v=1}^{n} B_v, 1\leqslant n\leqslant\infty$.

【证明】 若 $i\neq j$，不妨设 $i<j$，显然 $B_i\subset A_i(1\leqslant i\leqslant n)$.

$B_i\cap B_j\subset A_i\cap(A_j - \bigcup_{n=1}^{j-1} A_n)$

$= A_i\cup A_j\cap \complement_S A_1\cap \complement_S A_2\cap\cdots\cap \complement_S A_i\cap\cdots\cap \complement_S A_{j-1} = \varnothing$

由 $B_i\subset A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 得 $\cup B_i\subset A_i$.

设 $x\in\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，若 $x\in A_1$，则 $x\in B_1\subset\bigcup_{i=1}^{n} B_i$. 若 $x\,\overline{\in}\,A_1$，令 i_n 是最小自然数，使 $x\in A_{i_n}$，即 $x\,\overline{\in}\,\bigcup_{i=1}^{i_n-1} A_i$，而 $x\in A_{i_n}$. 所以 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

4. 设 $A_{2n-1}=(0,\frac{1}{n}),A_{2n}=(0,n),n=1,2,\cdots$,求出集列$\{A_n\}$的上限集和下限集.

【解题过程】 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_n=(0,+\infty)$.

设 $x\in(0,+\infty)$,则 $\exists N$,使得$\frac{1}{N}\leqslant x<N$,当$n>N$时,有$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}\leqslant x<N<n$,即$0<x<n$,即 $x\in A_{2n}$,可知 x 属于无限多 A_n,有 $x\cap\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,因此$(0,+\infty)\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

显然有$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset(0,+\infty)$,所以$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=(0,+\infty)$.

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\varnothing$;

若 $\exists x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,则 $\exists N$,使得 $\forall n>N$,有 $x\in A_n$. 因此,若$2n-1>N$时,$x\in A_{2n-1}$,即$0<x<\frac{1}{n}$. 当 $n\to\infty$ 时,有 $0<x\leqslant 0$,这显然是不可能的,所以$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\varnothing$.

5. 证明$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$.

【证明】 设$x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,则 $\exists N$,使一切$n>N$,$x\in A_n$,所以$x\in\bigcap\limits_{m=n+1}^{\infty}A_m\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$,则可知$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$. 设 $x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$,则有 n,使 $x\in\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$,所以 $x\in\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$.

因此 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{m=n}^{\infty}A_m$.

6. 设$f(x),g(x)$是定义在 E 上的函数,证明:

(1) $\{x:f(x)>g(x)\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x:f(x)>g(x)+\frac{1}{n}\}$;

(2) $\{x:f(x)>g(x)\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x:f(x)\geqslant g(x)+\frac{1}{n}\}$.

【证明】 (1) 由于$\{x:f(x)>g(x)+\frac{1}{n}\}(n=1,2\cdots)$是单调增集合列,故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f(x)>g(x)+\frac{1}{n}\}=\lim_{n\to\infty}\{x:f(x)>g(x)+\frac{1}{n}\}$$

$$\{x:f(x)>g(x)\}$$

(2) 由于$\{x:f(x)\geqslant g(x)+\frac{1}{n}\}(n=1,2\cdots)$是单调增集合列,故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f(x)\geqslant g(x)+\frac{1}{n}\}=\lim_{n\to\infty}\{x:f(x)\geqslant g(x)+\frac{1}{n}\}$$

即 $\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,使 $n>N$ 时,有

$$\lim_{n\to\infty}\{x:f(x)\geqslant g(x)+\frac{1}{n}\}=\{x:f(x)\geqslant g(x)+\varepsilon\}$$
$$=\{x:f(x)>g(x)\}$$

则证毕.

7. 设$f(x),g(x)$是定义在 E 上的函数,证明:对任意 $\varepsilon>0$,

$\{x:|f(x)+g(x)|>2\varepsilon\}\subset\{x:|f(x)|>\varepsilon\}\cup\{x:|g(x)|>\varepsilon\}$.

【证明】 对任意 $\varepsilon > 0$，$\forall x \in \{x: |f(x)+g(x)| > 2\varepsilon\}$，则 x 满足

$$|f(x)+g(x)| > 2\varepsilon$$

则 $|f(x)|+|g(x)| \geqslant |f(x)+g(x)| > 2\varepsilon$，可知 $x \overline{\in} \{x: |f(x)| \leqslant \varepsilon\} \cap \{x, |g(x)| \leqslant \varepsilon\}$，则

$x \in \{x: |f(x)| > \varepsilon\} \cup \{x: |g(x)| > \varepsilon\}$

则可知

$\{x: |f(x)+g(x)| > 2\varepsilon\} \subset \{x: |f(x)| > \varepsilon\} \cup \{x: |g(x)| > \varepsilon\}$

反之不成立，因为取 $f(x) = \dfrac{3}{2}\varepsilon$，$g(x) = 0$，则 $|f(x)+g(x)| < 2\varepsilon$.

8. 证明：若 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的一列函数，则对任意 $c \in \mathbf{R}$，

(1) $\{x: \inf f_n(x) < c\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) < c\}$；

(2) $\{x: \inf f_n(x) \geqslant c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) \geqslant c\}$.

【证明】 略

9. 证明：若 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 E 上的一列函数，且对任意 $x \in E$，$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$，$n = 1,2,\cdots$，则对任意 $c \in \mathbf{R}$，$A_n = \{x: f_n(x) > c\}$ 是单调增集合列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \{x: \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) > c\}$.

【证明】 先证明 A_n 为单调集合列，$\forall x \in A_n$，均有 $f_n(x) > c$，则有

$$f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x) > c$$

即 $x \in A_{n+1}$，故 $A_n \subset A_{n+1}$，而反之不成立，故 A_n 是单调增集合列，故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) > c\} \\ &= \{x: \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(x) > c\} \\ &= \{x: \lim_{n\to\infty} f_n(x) > c\}\end{aligned}$$

10. 证明：若 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的一列函数，令 $E = \{x: \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$，则

【证明】 略

11. 作出一个 $(-1,1)$ 和 $(-\infty, +\infty)$ 的 $1-1$ 对应，并写出这一对应的解析表达式.

【解题过程】 令 $\varphi: (-1,1) \to (-\infty, +\infty)$；$x \to \tan \dfrac{\pi}{2}x$. 则 φ 是 $(-1,1)$ 到 $(-\infty, +\infty)$ 的 $1-1$ 对应.

12. 证明：将球面去掉一点以后，余下的点所成的集合和整个平面上的点所成的集合是对等的.

【证明】 只要证明球面 $S: x^2+y^2+(z-\dfrac{1}{2})^2 = (\dfrac{1}{2})^2$ 去掉 $(0,0,1)$ 点后与 xOy 平面 M 对等即可. 此可由球极投影来做到：对任意 $(x,y,z) \in S\backslash(0,0,1)$，$\varphi(x,y,z)$：$(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}) \in M$，不难验证 φ 是 $1-1$ 映射，因此 S 与 M 是对等的.

13. 证明：所有系数为有理数的多项式组成一可数集.

【证明】 设 A_n 是 n 次有理系数多项式的全体，$n = 1,2,\cdots$，则 $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$. 即 n 次多项式的 $n+$

1 个有理数系数,其中首项系数可取除 0 以外的一切有理数,其他系数可取一切有理数,因此每个记号独立地跑遍一个可数集,因此 $\overline{\overline{A}} = a$.

14. 设 A 是平面上以有理点(即坐标都是有理数)为中心,有理数为半径的圆的全体,则 A 是可数集.

【证明】 设 $A = \{S_{r,x,y} \mid r,x,y$ 为有理数$\}$,其中 r 表示圆的半径,x、y 分别表示圆心的坐标. 显然 A 中的每个元素由三个独立记号所决定,且每个记号跑遍所有有理数. 类似于第 12 题的证明,则 A 是可数集.

15. 证明:增函数的不连续点最多只有可数多个.

(提示:$x0$ 是增函数 $f(x)$ 的不连续点的充分必要条件是 $f(x_0+0)-f(x_0-0)>0$. 若 x_1 和 x_2 是 $f(x)$ 的不同间断点,则 $(f(x_1-0),f(x_1+0))\cap(f(x_2-0),f(x_2+0))=\varnothing$.)

【证明】 设 f 是 $(-\infty,\infty)$ 上的增函数. 记不连续点全体为 E,可知:

(1) 任意 $x\in(-\infty,\infty)$,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x+0)$ 及 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}f(x-\Delta x)=f(x-0)$ 都存在.

(2) $x\in E$ 的充分必要条件为 $f(x+0)>f(x-0)$.

(3) 任意 $x_1,x_2\in E$,若 $x_1<x_2$,则 $f(x_1-0)<f(x_1+0)\leqslant f(x_2-0)<f(x_2+0)$,因此每一个 $x\in E$,对应于直线上的开区间 $(f(x-0),f(x+0))$,且由(3)可知 E 点 x 对应的这样的开区间是互相不交的. 因此至多是可数的.