华腾教育

高等学校教材经典同步辅导丛书数学专业类(二)

配高教社《近世代数》第二版　杨子胥 编著

近世代数

(杨子胥 第二版)

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心

丛书主编 清华大学 戎晓政

本书主编 清华大学 宁　波

◈紧扣教材　◈知识精讲　◈习题全解

◈应试必备　◈联系考研　◈网络增值

中国矿业大学出版社

近世代数

同步辅导及习题全解

中国矿业大学出版社

内容提要

本书是高等教育出版社出版，杨子胥编著的《近世代数》(第二版)教材的配套辅导书。本书由课程学习指南、学习导引、知识点归纳、典型例题与解题技巧及课后习题全解等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学习分析问题和解决问题的方法技巧，并提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校近世代数课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

近世代数同步辅导及习题全解 / 宁波主编. 一徐州：中国矿业大学出版社，2008.1

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 978-7-81107-913-5

Ⅰ.近… Ⅱ.宁… Ⅲ.抽象代数一高等学校一教学参考资料 Ⅳ.O153

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 003076 号

书　　名　近世代数同步辅导及习题全解

主　　编　宁　波

责任编辑　罗　浩

选题策划　孙怀东

特约编辑　王丽娜

出版发行　中国矿业大学出版社

(江苏省徐州市中国矿业大学内　邮政编码 221008)

网　　址　http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com

印　　刷　北京市昌平百善印刷厂

经　　销　新华书店

开　　本　850×1168　1/32　**本册印张** 7.25　**本册字数** 245 千字

版次印次　2008 年 2 月第 1 版　2008 年 2 月第 1 次印刷

总 定 价　77.80 元

前言

PREFACE

近世代数是数学及其相关专业重要的基础课之一，也是报考该类专业硕士研究生的专业考试课程之一。杨子胥编著的《近世代数》(第二版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多的知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《近世代数同步辅导及习题全解》(第二版)。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本的解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性。考虑到近世代数这门课程的特点，我们在内容上做了以下安排：

1. 课程学习指南 从该课程的知识体系出发，对各个章节在全书的位置，以及与其他章节的联系作了简明扼要的阐述，使学习更有重点。

2. 学习导引 介绍本章的主要内容及其相互联系、重点难点，明确学习任务。

3. 知识点归纳 串讲概念，总结性质和定理，使得知识全面系统，便于掌握。

4. 典型例题与解题技巧 精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并

引导学生思考问题、能够举一反三,拓展思路。

5. 课后习题全解 本书给出了杨子胥编著的《近世代数》(第二版)各章课后习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程,而且对有难度或综合性较强的习题做了分析和小结,从而更好地帮助学生理解掌握每一知识点。

本书在编写时参考了大量的优秀教材和权威考题。在此,谨向有关作者和所选考试、考研试题的命题人以及对本书的出版给予帮助和指导的所有老师、同仁表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,本书难免出现不妥之处,恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网: http://www.huatengedu com.cn

电子邮件: huateng@huatengedu.com

华腾教育教学与研究中心

目 录

CONTENTS

课程学习指南

近世代数是数学及其相关专业重要的一门核心理论基础课，也是以后继续深化系统学习数学理论的基础，同时也是数学类各专业硕士研究生入学考试的科目之一.

学习近世代数课程的目的是掌握近世代数的基本理论，进而提高自己解决实际问题的能力. 在社会经济高速发展的今天，近世代数在工程方面的应用也越来越普遍.

近世代数课程具有很强的理论性和系统性，需要一定的理论分析能力与逻辑思维能力，因此在学习本课程之前最好有计划地进行适当的预习，并了解一下相关理论的发展历程，对所学的课程有一个体系性的把握. 同时本课程又是一门指导性的学科，对它的掌握直接关系到数学专业的其他后续课程.

高等代数 数学分析 概率论 解析几何 常微分方程	⇒	近世代数

本书包含六章内容，可分为三个部分. 第一部分，包括引言和第一章基本概念，它是全书的基础，在以后各章都要用到，应予以充分重视；第二部分，包括第二、三两章，介绍含一个代数运算的群的理论；第三部分，包括第四、五、六三章，介绍含有两个代数运算的环与域的理论.

近世代数是一门逻辑性很强的课程，因此学习这门课程有一定难度. 为

了学好这门课程，建议在学习过程中应按以下方法学习：

1. 理解掌握基本概念与定理，掌握基本方法.

2. 注意理论前后发展的系统性与关联性，做到融会贯通.

3. 注意应用所学的理论分析实际问题，做到理论与实际相结合.

4. 要养成综合分析，认真思考的良好学习习惯.

此外，为了帮助学生在考研、期末等考试中取得好成绩，我们提出以下建议：

1. 勤动脑、爱思考. 将课程中所学的理论知识与实际问题相结合，认识到知识的力量在应用实践.

2. 多阅读、善分析. 要重点阅读一些近世代数方面的书籍，提高自己的分析能力及综合理论素质，并归纳总结解题的思维方法，做到学为所用，举一反三.

第一章

基本概念

学习导引

本章所介绍的内容,是在以后各章中都要用到的基本概念,主要包括:集合、映射与变换、代数运算、运算律、同态与同构、等价关系与集合的分类等.

知识点归纳

一、集合

1. 证明集合相等

$A=B$ 当且仅当 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$. 因此,要证两个集合 A 与 B 相等,常需证明 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,即 A 与 B 互相包含.

2. 集合的交与并的性质

(1) $A\cap A=A,\quad A\cup A=A;$ (幂等性)

(2) $A\cap B=B\cap A,\quad A\cup B=B\cup A;$ (交换性)

(3) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C),$
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;$ (结合性)

(4) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$ (分配性)

(5) $A\cap(A\cup B)=A\cup(A\cap B)=A;$ (吸收律)

(6) 若 $A\subseteq C$, 则 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C.$ (模律)

3. 包含与排斥原理

(1) 设 I 是一个集合,A,B,C 是 I 的有限子集,则

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$|A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|$$
$$|A\cap B\cap C|=|A|+|B|+|C|-|A\cup B|-|A\cup C|$$
$$-|B\cup C|+|A\cup B\cup C|$$

(2) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 I 的有限子集,则

$$|\bigcap_{i=1}^{n}A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cup A_j|+\cdots+(-1)^{n-1}|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|$$
$$|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^{n-1}|\bigcap_{i=1}^{n}A_i|$$

二、映射与变换

1. 映射、变换的概念

(1) 映射、单射、满射以及双射的定义和例子.

(2) 变换、单射变换、满射变换以及双射变换的定义和例子. 含 n 个元素的集合有且仅有 $n!$ 个双射变换. 有限集合双射变换的特殊符号和名称 —— 置换.

(3) 映射下元素或子集的象和逆象,映射的相等及逆映射等概念.

2. 映射的复合

(1) 复合:设 A,B,C 为三个集合,有两个映射:$f_1:A\to B,f_2:B\to C$,则由 f_1,f_2 可确定一个 A 到 C 的映射 g

$$g(x)=f_2(f_1(x)),\qquad(\forall x\in A)$$

称 g 是 f_1 与 f_2 的复合,记作 $g=f_2f_1$.

(2) 映射的复合的性质:设有映射 $f:A\to B,g:B\to C,h:C\to D$,则有

$$h(gf)=(hg)f,$$
$$I_Bf=fI_A=f.$$

(3) 变换:当 f 是 A 到 A 自射的映射,则称 f 是 A 上的一个变换. 当 A 是有限集时,A 上的变换通常用"列表法"表示. 一般地,$A=\{1,2,\cdots,n\}$ 上的一个变换 f 可表示为

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\f(1)&f(2)&f(3)&\cdots&f(n)\end{pmatrix}.$$

(4) 恒等变换:设 I_A 是 A 上的一个变换,若 $\forall x\in A$ 有 $I_A(x)=x$,称 I_A 是 A 上的一个单位变换或恒等变换.

注:I_A 是指在 A 上的变换,而在其他集合时,则不一定成立.

3. 映射的相等

设σ与τ都是集合X到Y的映射，如果对X中每个元素x都有$\sigma(x)=\tau(x)$，则称σ与τ是X到Y的两个相等的映射，记为

$$\sigma=\tau.$$

注：必须是对X中每个元素，而对X中部分元素成立，此结论不成立.

4. 映射乘积的定义

若τ是集合M_1到集合M_2的一个映射，σ是集合M_2到集合M_3的一个映射，则

$$x\longrightarrow\sigma(\tau(x)),\quad(\forall x\in M_1)$$

是M_1到M_3的一个映射，记为$\sigma\tau$，即

$$\sigma\tau(x)=\sigma(\tau(x)),\quad(\forall x\in M_1)$$

并称其为映射的合成或映射的乘法，$\sigma\tau$称为τ与σ的乘积.

5. 双射的条件

必要条件　设X与Y为两个有限集合，则存在X到Y的一个双射的必要条件是$|X|=|Y|$，也就是二者包含的元素个数相等.

充要条件(1)　φ是集合X到集合Y的一个映射，则φ是X到Y的一个双射$\Longleftrightarrow\varphi$为“双方单值”，即$\varphi$对$X$中每个元素在$Y$中只有一个象，且对$Y$中每个元素在$X$中有且只有一个逆象.

充要条件(2)　设X与Y是两个有限集合，且$|X|=|Y|$，φ是从X到Y的一个映射，则φ是双射$\Longleftrightarrow\varphi$是满射(单射).

三、代数运算

(1) 代数运算定义. 设M是一个集合. 如果有一个法则，它对M中任意两个有次序的元素a与b，在M中都有一个惟一确定的元素d与它们对应，则称这个法则是集合M的一个代数运算.

(2) 变换的乘法. 设M是任意一个非空集合，用$T(M)$表示M的全体变换作成的集合. 任取$\sigma,\tau\in T(M)$，则根据映射的合成知，乘积$\sigma\tau$即

$$\sigma\tau(x)=\sigma(\tau(x))\quad(\forall x\in M)$$

也是M的一个变换，故$\sigma\tau\in T(M)$. 我们称其为变换的乘法.

(3) 一个集合M的全体变换的集合$T(M)$关于变换的乘法作成一个代数系统. 而M的全体双射变换的集合$S(M)$也作成一个代数系统，它是$T(M)$的一个

子系统,即:$S(M) \subseteq T(M)$.

四、运算律

(1) 代数运算满足结合律、交换律和分配律的定义(教材定义 1、定义 2、定义 3)

(2) 代数系统中代数运算满足结合律,交换律和分配律的重要意义(定理 1、定理 2 和定理 3).

(3) 左分配律与右分配律一般情况下是不相等的.

五、同态与同构

1. 同态映射与同构映射的定义

如果代数系统$(M, \circ)$ 到$(\overline{M}, \bar{\circ})$ 有映射 φ 满足

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \bar{\circ} \varphi(b) \quad (\forall a, b \in M),$$

则称 φ 是$(M, \circ)$ 到$(\overline{M}, \bar{\circ})$ 的一个同态映射.

如果 φ 又是双射,则称 φ 是$(M, \circ)$ 到$(\overline{M}, \bar{\circ})$ 的一个同构映射.

2. 同态映射与同构映射的性质

(1) 当代数系统$(M, \circ) \sim (\overline{M}, \bar{\circ})$,则

① 当 $\circ$ 满足结合律时,$\bar{\circ}$ 也满足结合律,

② 当 $\circ$ 满足交换律时,$\bar{\circ}$ 也满足交换律.

(2) 又当$(M, \circ, \oplus) \sim (\overline{M}, \bar{\circ}, \bar{\oplus})$,则

当 $\circ$ 对 $\oplus$ 满足左(右) 分配律时,$\bar{\circ}$ 对 $\bar{\oplus}$ 也满足左(右) 分配律.

3. 自同态及自同构

M 到自身的同态映射,称为 M 的自同态映射,或简称 M 的自同态,同样,M 到自身的同构映射,叫做 M 的自同构映射,简称 M 的自同构.

六、等价关系与集合的分类

(1) 等价关系定义. 如果集合 M 的一个关系 R 满足以下条件:

1° 对 M 中任意元素 a 都有 aRa;(反身性)

2° 如果 aRb,必有 bRa;(对称性)

3° 如果 aRb,bRc,必有 aRc,(传递性)

则称这个关系是 M 的一个等价关系.

(2) 等价关系与集合的分类的关系.(定理 1,定理 2) 集合 M 的元素的一个

分类决定M的一个等价关系(二元素等价 $\Longleftrightarrow$ 此二元素同在一类);反之,M的一个等价关系决定M的一个分类.

典型例题与解题技巧

例 1　设φ是双射,且$\varphi\psi$有意义.证明:

(1)ψ是单射 $\Longleftrightarrow \varphi\psi$是单射;

(2)ψ是满射 $\Longleftrightarrow \varphi\psi$是满射.

证　不妨设$\varphi: B \longrightarrow C, \psi: A \longrightarrow B$.

(1)"$\Rightarrow$"　当ψ是单射,则$\forall a,b \in A, a \neq b$时必有$\psi(a) \neq \psi(b)$,又显见$\varphi$也是单射,故

$$\varphi(\psi(a)) \neq \varphi(\psi(b)),$$

即$\varphi\psi(a) \neq \varphi\psi(b)$,所以$\varphi\psi$为单射.

"$\Leftarrow$"　当$\varphi\psi$是单射,则$\forall a,b \in A, a \neq b$时必有$\varphi\psi(a) \neq \varphi\psi(b)$,即

$$\varphi(\psi(a)) \neq \varphi(\psi(b)).$$

又φ是单射,故$\psi(a) \neq \psi(b)$,从而ψ为单射.

(2)"$\Rightarrow$"　设ψ是满射.$\forall a'' \in C$,由φ是满射可知$\exists a' \in B$,使

$$\varphi(a') = a''.$$

再由ψ是满射知,$\exists a \in A$,使

$$\psi(a) = a',$$

故

$$\varphi\psi(a) = \varphi(\psi(a)) = \varphi(a') = a'',$$

即$\varphi\psi$是满射.

"$\Leftarrow$"　设$\varphi\psi$是满射.$\forall b' \in B$,令$\varphi(b') = b'' \in C$,故$\exists b \in A$,使得$\varphi\psi(b) = b''$,故

$$\varphi(\psi(b)) = \varphi\psi(b) = b'' = \varphi(b').$$

由φ是单射知

$$\psi(b) = b',$$

即ψ是满射.

【小结】　在此题的证明过程中主要应用的单射、满射的定义.

单射:若$a \neq b \Longrightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$.

满射:每一个象都存在原象.

例 2　设A是一个非空集合,2^A是A的幂集,证明:2^A与A间不存在双射.

证 反证法 假设$\exists$双射$\varphi: x \to S_x (A \to 2^A)$，令$T=\{a \in A \mid a \notin S_a\}$，显然$T \in 2^A$，由于$\varphi$是双射$\exists b \in A$使$\varphi(b)=S_b=T$当$b \in S_b$，有$b \in T$，由$T$的定义知$b \notin S_b$，矛盾，当$b \notin S_b$，可知$b \in T$，又由$S_b=T$有$b \in S_b$，矛盾，所以，$2^A$与$A$之间不存在双射.

【小结】 幂集的定义：如果把集合A的每一个子集当成一个元素，则A的所有子集(包括空集)也作成一个集合，称为A的幂集.

例3 假定A和$\bar{A}$对于代数运算$\circ$和$\bar{\circ}$同态，而$\bar{A}$和$\bar{\bar{A}}$对于代数运算$\bar{\circ}$和$\bar{\bar{\circ}}$来说同态. 证明：A和$\bar{\bar{A}}$对于代数运算$\circ$和$\bar{\bar{\circ}}$来说同态.

【分析】 在此题中$\circ$与$\bar{\circ}$，$\bar{\circ}$与$\bar{\bar{\circ}}$分别是同态的题中所求的是一个"传递性". 同态的概念是保持运算：即：$\varphi(a \cdot b)=\varphi(a)\,\bar{\bar{\circ}}\,\varphi(b)$，且$\varphi$是满射.

证 依题意存在一个A到$\bar{A}$的同态满射

$$\varphi_1: a \longrightarrow \bar{a}=\varphi_1(a),(a \in A, \bar{a} \in \bar{A})$$

且$\forall a, b \in A$，有

$$\varphi_1(a \circ b)=\bar{a}\,\bar{\circ}\,\bar{b}=\varphi_1(a)\,\bar{\circ}\,\varphi_1(b)$$

同样$\exists \bar{A}$到$\bar{\bar{A}}$的一个同态满射

$$\varphi_2: \bar{a} \longrightarrow \bar{\bar{a}}=\varphi_2(\bar{a}),(\bar{a} \in \bar{A}, \bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}})$$

且$\forall \bar{a}, \bar{b} \in \bar{A}$，有

$$\varphi_2(\bar{a}\,\bar{\circ}\,\bar{b})=\bar{\bar{a}}\,\bar{\bar{\circ}}\,\bar{\bar{b}}=\varphi_2(\bar{a})\,\bar{\bar{\circ}}\,\varphi_2(\bar{b}).$$

定义

$$\varphi: a \longrightarrow \varphi_2(\varphi_1(a)).(a \in A)$$

下面证明φ是A到$\bar{\bar{A}}$的一个同态满射.

(1) 由φ_1, φ_2为同态满射知，对$\forall a \in A, \varphi_1(a)$是$\bar{A}$的一个惟一确定的元素，而$\varphi_2(\varphi_1(a))$是$\bar{\bar{A}}$的一个惟一确定的元素，故$\varphi$是$A$到$\bar{\bar{A}}$的一个映射.

(2) 由φ_1, φ_2为同态满射，故当$\bar{\bar{a}} \in \bar{\bar{A}}$，$\exists$一个元素$\bar{a} \in \bar{A}$，使$\varphi_2(a)=\bar{\bar{a}}$，且$\exists$一个元素$a \in A$，使$\varphi_1(a)=\bar{a}$，故在$\varphi$之下

$$a \longrightarrow \varphi_2(\varphi_1(a))=\varphi_2(\bar{a})=\bar{\bar{a}},$$

即φ是从A到$\bar{A}$的一个满射.

(3) 同样由φ_1, φ_2为同态满射知，$\forall a, b \in A$，有

$$\begin{aligned}\varphi(a \circ b) &= \varphi_2(\varphi_1(a \circ b))=\varphi_2(\varphi_1(a)\,\bar{\circ}\,\varphi_1(b)) \\ &= \varphi_2(\varphi_1(a))\,\bar{\bar{\circ}}\,\varphi_2(\varphi_1(b))\end{aligned}$$

$$=\varphi(a)\bar{\circ}\varphi(b),$$

故 φ 是从 A 到 $\bar{A}$ 的一个同态满射.

例 4　教材中指出,对代数系统 M 中任意 n 个元素共有

$$s=\frac{(2n-2)!}{n!\cdot(n-1)!}$$

种加括号的方法.对此加以证明.

证　用 $d(n)$ 表示 n 个元素的各种不同加括号方法的总数,特别 $d(1)=d(2)=1$.于是有

$$d(n)=d(n-1)\cdot d(1)+d(n-2)\cdot d(2)+\cdots+d(1)\cdot d(n-1).\quad ①$$

为给出一个求 $d(n)$ 的公式,故考虑以下幂级数

$$y=d(1)x+d(2)x^2+\cdots+d(n)x^n+\cdots.\quad ②$$

由 ① 与 ② 可知

$$\begin{aligned}y^2&=d(1)d(1)x^2+[d(2)d(1)+d(1)d(2)]x^3+\cdots\\&=d(2)x^2+d(3)x^3+\cdots+d(n)x^n+\cdots,\end{aligned}\quad ③$$

由 ② 与 ③ 得

$$y^2-y+x=0.$$

故有

$$\begin{aligned}y&=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}=\frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\\&=\sum_{n=1}\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}\cdot2^{n-1}x^n.\end{aligned}\quad ④$$

(此等式是根据以下二项式级数得到的:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdot\cdots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

又 $y=\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2}$ 不可能,因为此式当 $x=0$ 时 $y=1$.与 ③ 矛盾).

比较 ②、④ 两式即得

$$d(n)=\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}\cdot2^{n-1}.\quad ⑤$$

又因

$(2n-2)!=(2n-2)(2n-3)(2n-4)\cdot\cdots\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$