



文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计



FOCUS
聚焦图书

考研数学 题型集粹 与练习题集

陈文灯 黄先开 曹显兵
编 著

题型集训 以一敌百
技巧丰富 好题荟萃

2008版
(理工类)

世界图书出版公司



FOCUS
聚焦图书

聚骄公司全
文灯教育集

考研数学 题型集粹

与练习题集

陈文灯 黄先开 曹显兵 编著

**2008版
(理工类)**

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学题型集粹与练习题集. 理工类 / 陈文灯, 黄先开, 曹显兵编著. —10版. —北京: 世界图书出版公司北京公司, 2004. 1

ISBN 978-7-5062-5212-6

I. 数... II. ①陈... ②黄... ③曹... III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002) 第 015003 号

数学题型集粹与练习题集(理工类) (2008 版)

主 编: 陈文灯 黄先开 曹显兵

责任编辑: 高玉兵

封面设计: 耕者工作室

出 版: 世界图书出版公司北京公司

发 行: 世界图书出版公司北京公司

(北京朝内大街 137 号 电话: 88861708 邮编: 100089)

销 售: 各地新华书店

印 刷: 廊坊人民印刷厂

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16

印 张: 28.75

字 数: 460 千字

版 次: 2007 年 2 月第 10 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-5212-6/O · 333

定价: 39.80 元

服务热线: 010 - 88861708

前 言

《题型集粹与练习题集》(理工类)作为《数学复习指南》(理工类)的姐妹篇,自第一版问世以来已近十载,受到越来越多的读者欢迎。许多考生选择将本书和《数学复习指南》配套使用,作为考研数学复习的主要参考书籍,被有的读者戏称“双剑合璧”。

《题型集粹与练习题集》旨在强化读者对《数学复习指南》中知识点的理解和运用,将知识点与考查题型结合起来,锻炼读者的实际解题能力。本书是作者多年评阅试卷和在文登培训学校考研辅导的经验之作,所讲例题及所选习题都是从多年教学中总结出来的有代表性的试题。通过本书的学习和训练,能帮助读者达到吃透规律,举一反三的目的。

本书特点以及使用建议:

题型归纳和精讲:

本书将考研数学所要求的知识点按题型进行归类。针对每种题型,给出相应的方法和规律,同时给出若干道典型例题进行精讲,帮助读者理解具体的解题技巧。同时配合了题型演练,强化读者的理解和实际答题能力。建议读者仔细体会方法和规律部分,在做题的过程中有意识地加以应用。

阶梯化训练题:

根据难度及综合性把习题分为基础能力题和综合提高题,题量适中,选题科学,适合读者在复习的不同阶段进行训练,逐步提高解题能力。建议读者能独立去解答这些习题,有意识地应用例题中学到的方法去解题,尽量不要从一开始就依赖答案,养成独立思考的习惯。在参考答案部分,我们给出了题型训练和阶梯化训练的详细解答,读者可以借鉴和参考其中的思路和方法。

四套模拟试题:

依据大纲的难度和要求,我们为读者精编了四套模拟试卷。每套试卷都给出了详细的解答,包括分析、详解和评注,建议读者严格按照考试时间完成试卷并及时查缺补漏,以达到模拟演练的目的。

本书如有不当和错误之处,恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

编者
2007年2月

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续 1

题型归纳与精讲 1

题型 1 函数奇偶性的判别 1

题型 2 函数有界性的判别 1

题型 3 求复合函数表达式 2

题型 4 已知数列的前几项数值及通项的表达式,
求数列的极限 2

题型 5 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限 3

题型 6 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限 4

题型 7 通项为积分形式的数列的极限 4

题型 8 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限 5

题型 9 求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限 5

题型 10 求 $\infty - \infty$ 型未定式的极限 6

题型 11 求 $0 \cdot \infty$ 型未定式的极限 6

题型 12 求 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式的极限 7

题型 13 无穷小量的比较 8

题型 14 极限式中常数值的确 定 8

题型 15 函数连续性的讨论(重点) 9

题型 16 确定函数的间断点及其类型 9

题型 17 分段函数式中参数的确定(重点)
..... 10

阶梯化训练题 11

基础能力题 11

综合提高题 13

参考答案 15

题型演练答案 15

基础能力题答案 18

综合提高题答案 22

第二章 导数与微分 29

题型归纳与精讲 29

题型 1 求函数在某点处的导数 29

题型 2 求函数方程 29

题型 3 求复合函数的导数 30

题型 4 求参数方程所确定的函数的导数 31

题型 5 隐函数求微分 31

题型 6 分段函数求导 32

题型 7 高阶导数的计算 33

阶梯化训练题 34

基础能力题 34

综合提高题 36

参考答案 37

题型演练答案 37

基础能力题答案 38

综合提高题答案 42

第三章 不定积分 46

题型归纳与精讲 46

题型 1 分式有理函数的积分 46

题型 2 简单无理函数的积分 46

题型 3 三角有理式的积分 47

阶梯化训练题 48

基础能力题 48

综合提高题 49

参考答案 50

题型演练答案 50

基础能力题答案 51

综合提高题答案 53

第四章 定积分 59

题型归纳与精讲 59

题型 1 含变上限积分的题型求解 59

题型 2 含有绝对值符号的定积分的计算 60

题型 3 含奇偶函数与周期函数的定积分计算

.....	60
题型 4 含三角有理式的定积分计算.....	61
题型 5 分母为两项,而分子为分母中其中一项的积分.....	61
题型 6 含定积分等式的证明.....	62
题型 7 定积分不等式的证明.....	63
题型 8 反常积分的计算.....	65
阶梯化训练题	66
基础能力题	66
综合提高题	67
参考答案.....	69
题型演练答案	69
基础能力题答案	71
综合提高题答案	73
第五章 中值定理	80
题型归纳与精讲	80
题型 1 结论为 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的命题的证明.....	80
题型 2 含 $f^{(n)}(\xi)$ 等式的证明	81
题型 3 区间 (a, b) 内 $\exists \xi, \eta$ 满足某种关系式的命题的证明.....	82
阶梯化训练题	83
基础能力题	83
综合提高题	83
参考答案.....	85
题型演练答案	85
基础能力题答案	86
综合提高题答案	87
第六章 一元微积分的应用	92
题型归纳与精讲	92
题型 1 函数不等式的证明.....	92
题型 2 求函数的极值与最值.....	93
题型 3 关于方程根的讨论.....	93
题型 4 函数图形在区间 I 上凹凸性的判别.....	95
题型 5 渐近线的计算.....	95
题型 6 求平面图形的面积.....	96
题型 7 求立体体积.....	97

阶梯化训练题	98
基础能力题	98
综合提高题	100
参考答案	101
题型演练答案	101
基础能力题答案	104
综合提高题答案	107

第七章* 向量代数与空间解析几何

.....	115
题型归纳与精讲	115
题型 1 向量的运算	115
题型 2 求平面方程	116
题型 3 求空间直线方程	116
题型 4 平面与平面、平面与直线、直线与直线的关系	117
题型 5 线性代数中线性相关性在解析几何中的应用	118
题型 6 投影线方程	119
题型 7 旋转面方程	119
阶梯化训练题	120
基础能力题	120
综合提高题	121
参考答案	121
题型演练答案	121
基础能力题答案	124
综合提高题答案	124

第八章 多元函数微分学

题型归纳与精讲	128
题型 1 讨论极限的存在性	128
题型 2 讨论可导函数的可微性	128
题型 3 求抽象的复合函数的偏导数	129
题型 4 隐函数方程组求微分	130
题型 5 多元函数微分学在几何中的应用	131
题型 6 多元微分学的有关证明题	132
题型 7 多元函数的极值	133
阶梯化训练题	134
基础能力题	134

综合提高题	134
参考答案	135
题型演练答案	135
基础能力题答案	137
综合提高题答案	138
第九章 重积分	143
题型归纳与精讲	143
题型1 更换积分次序	143
题型2 积分域为圆环或扇域的二重积分	143
题型3 分段函数的二重积分	144
题型4* 三重积分的计算	144
阶梯化训练题	146
基础能力题	146
综合提高题	148
参考答案	149
题型演练答案	149
基础能力题答案	151
综合提高题答案	154
第十章* 曲线曲面积分	159
题型归纳与精讲	159
题型1 对弧长的曲线积分的计算	159
题型2 对坐标的曲线积分计算(重点)	160
题型3 对面积的曲面积分计算	162
题型4 对坐标系的曲面积分计算	163
题型5 曲面面积的计算	165
题型6 场论的相关计算	166
阶梯化训练题	167
基础能力题	167
综合提高题	168
参考答案	169
题型演练答案	169
基础能力题答案	172
综合提高题答案	174
第十一章* 无穷级数	179
题型归纳与精讲	179
题型1 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq 0)$ 的判敛	179

题型2 任意项级数收敛性的判断	180
题型3 有关数项级数的命题的证明	181
题型4 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 求收敛域, 幂级数求收敛域、收敛半径 R	182
题型5 求函数的幂级数展开式	183
题型6 级数求和	184
题型7 傅立叶级数	185
阶梯化训练题	187
基础能力题	187
综合提高题	187
参考答案	189
题型演练答案	189
基础能力题答案	191
综合提高题答案	192
第十二章 常微分方程	196
题型归纳与精讲	196
题型1 一阶微分方程求解	196
题型2 可降阶的高阶微分方程的求解	197
题型3 高阶常系数线性微分方程的求解	198
题型4* 欧拉方程的求解	200
题型5 微分方程在几何和力学中的应用	201
阶梯化训练题	202
基础能力题	202
综合提高题	203
参考答案	204
题型演练答案	204
基础能力题答案	206
综合提高题答案	209

第二篇 线性代数

第一章 行列式	215
题型归纳与精讲	216
题型1 确定用行列式表示的多项式 $f(x)$ 中, 关于 x 的最高次数及 x 的各次幂前的系数	216

题型 2 3~5 阶行列式的计算	216
题型 3 证明抽象行列式等于零	217
题型 4 n 阶行列式的计算	218
阶梯化训练题	219
基础能力题	219
综合提高题	221
参考答案	222
题型演练答案	222
基础能力题答案	223
综合提高题答案	226
第二章 矩阵	229
题型归纳与精讲	229
题型 1 关于矩阵的基本性质及初等变换的命题	229
题型 2 有关 $\alpha^T \alpha$ 与 $\alpha \alpha^T$ 命题的求解与论证	230
题型 3 求 n 阶方阵 A 的 k 次幂 A^k	231
题型 4 求满秩矩阵的逆矩阵	232
题型 5 求解矩阵方程	233
题型 6 关于矩阵 A 存在逆矩阵的证明	234
题型 7 与方阵 A 的伴随矩阵 A^* 有关的命题的计算与证明	234
题型 8 矩阵秩的求法及有关矩阵秩的等式与不等式的证明	236
阶梯化训练题	237
基础能力题	237
综合提高题	238
参考答案	239
题型演练答案	239
基础能力题答案	242
综合提高题答案	244
第三章 向量	247
题型归纳与精讲	247
题型 1 有关向量的概念及其性质的命题	247
题型 2 有关线性表出判别的命题	248
题型 3 向量线性相关性的证明	249
题型 4 向量组的极大线性无关组及向量组秩的	

相关命题	250
题型 5* 求过渡矩阵与向量的坐标	251
题型 6* 有关正交矩阵命题的证明	252
阶梯化训练题	252
基础能力题	252
综合提高题	254
参考答案	254
题型演练答案	254
基础能力题答案	256
综合提高题答案	258
第四章 线性方程组	261
题型归纳与精讲	261
题型 1 含有参数的线性方程组解的讨论	261
题型 2 有关基础解系的命题证明	262
题型 3 涉及两个方程组解之间关系的命题的讨论	263
阶梯化训练题	264
基础能力题	264
综合提高题	267
参考答案	269
题型演练答案	269
基础能力题答案	270
综合提高题答案	274
第五章 矩阵的特征值与特征向量	279
题型归纳与精讲	280
题型 1 特征值的计算与相关证明	280
题型 2 矩阵 $(kE - A)$ 是否可逆的证明	281
题型 3 矩阵相似的证明	281
题型 4 已知 $P^{-1}AP = \Lambda$ 中两者求第三者	282
阶梯化训练题	283
基础能力题	283
综合提高题	285
参考答案	286
题型演练答案	286
基础能力题答案	288

综合提高题答案	293
第六章 二次型	297
题型归纳与精讲	298
题型 1 有关二次型概念及性质的命题	298
题型 2 将二次型化为标准形	299
题型 3 二次型与其标准形中参数的确定及正交变换	300
题型 4 有关正定矩阵命题的证明	301
阶梯化训练题	302
基础能力题	302
综合提高题	303
参考答案	303
题型演练答案	303
基础能力题答案	306
综合提高题答案	308

第三篇* 概率论与数理统计初步

第一章 事件的概率	311
题型归纳与精讲	311
题型 1 利用条件概率与乘法公式概率计算	311
题型 2 利用全概公式和逆概公式(贝叶斯公式)计算概率	312
阶梯化训练题	313
基础能力题	313
综合提高题	314
参考答案	315
题型演练答案	315
基础能力题答案	316
综合提高题答案	317
第二章 随机变量及其分布	320
题型归纳与精讲	320
题型 1 求一维随机变量的分布函数及分布密度	320
题型 2 求二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及其密度	321
题型 3 求一维随机变量函数 $Y = g(X)$ 分布律	

(分布密度)	322
题型 4 求二维随机变量 (X, Y) 函数 $g(X, Y)$ 的分布律(分布密度)	323
阶梯化训练题	325
基础能力题	325
综合提高题	327
参考答案	327
题型演练答案	327
基础能力题答案	328
综合提高题答案	332
第三章 随机变量的数字特征	336
题型归纳与精讲	336
题型 1 求一维随机变量的数字特征	336
题型 2 求一维随机变量函数的数字特征	337
题型 3 求二维随机变量的数字特征	338
题型 4 求二维随机变量 (X, Y) 函数 $Z = g(X, Y)$ 的数字特征	340
题型 5 求多维随机变量的数字特征	340
阶梯化训练题	342
基础能力题	342
综合提高题	342
参考答案	343
题型演练答案	343
基础能力题答案	345
综合提高题答案	346
第四章 大数定律和中心极限定理 ...	350
题型归纳与精讲	350
题型 1 估算随机事件的概率	350
题型 2 试验次数 n 的确定	351
阶梯化训练题	352
基础能力题	352
综合提高题	353
参考答案	354
题型演练答案	354
基础能力题答案	355
综合提高题答案	355

第五章 数理统计初步	358
题型归纳与精讲	358
题型 1 样本容量 n , 样本均值 $\bar{X}$ 及样本方差 S^2 的数字特征和概率的计算	358
题型 2 求抽样分布	360
题型 3 统计量的点估计	360
题型 4 正态总体均值与方差的区间估计	361
题型 5 估计量的相关命题	363
题型 6 一个正态总体均值的假设检验	364
题型 7 一个正态总体方差 $D(X) = \sigma^2$ 的假设检 验	365
题型 8 两个正态总体均值的检验	366
阶梯化训练题	368
基础能力题	368
综合提高题	369

参考答案	370
题型演练答案	370
基础能力题答案	372
综合提高题答案	373

第四篇 模拟题及参考答案

数学一模拟试卷(一)及参考答案	377
数学一模拟试卷(二)及参考答案	389
数学二模拟试卷(一)及参考答案	405
数学二模拟试卷(二)及参考答案	416

附录

2007 年硕士研究生入学考试数学试题 三、四及参考答案	427
---------------------------------------	-----

注:带 * 篇、章,数二考生不作要求。

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续

命题特点:

函数部分一般和其他考点联合出题,如求函数的表达式;关于函数的性质出单项选择题的可能性较大;极限部分一般出填空题或其他部分联合出题,函数的连续部分一般出单项选择题或计算题.

题型归纳与精讲

题型1 函数奇偶性的判别

方法和规律: 判别函数奇偶性的方法:(1) 主要依据奇偶性的定义.有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;偶函数之积为偶函数;偶数个奇函数之积为偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数.(2) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若函数的定义域关于原点不对称,则函数就无奇偶性可言.

典例精析

判别函数的奇偶性:

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续的偶函数.

【分析】 利用变量代换求出 $F(-x)$, 然后比较 $F(x)$ 与 $F(-x)$ 的关系.

【解】 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t = -u} \int_0^x f(-u) (-du) \xrightarrow{\substack{f(x) \text{ 为} \\ \text{偶函数}}} - \int_0^x f(u) du,$

$$\therefore F(x) + F(-x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = 0,$$

$\therefore F(x)$ 为奇函数.

题型2 函数有界性的判别

方法和规律: 证明或判别函数有界性的思路:(1) 利用有界性定义.(2) 闭区间上连续函数的有界性.(3) 有极限数列必有界.(4) $x \rightarrow x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

**典例精析**

设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (l 为有限数), 试证: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【分析】本题运用闭区间上的连续函数必有界, 即可得证.

【证】 $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l, \therefore$ 对于取 $\varepsilon = \frac{|l|}{2}, \exists X > a,$

当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2},$

又 $|f(x) - l| \geq |f(x)| - |l|$, 所以 $|f(x)| - |l| < \frac{|l|}{2},$

即 $|f(x)| < \frac{3}{2}|l|.$

$\because f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 由闭区间上连续函数有界性, 可知 $\exists S$, 使 $\forall x \in [a, X]$, 恒有 $|f(x)| < S.$

取 $M = \max\left\{S, \frac{3}{2}|l|\right\}$, 则对 $\forall x \in [a, +\infty)$ 恒有 $|f(x)| \leq M,$

即 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

※ 题型演练 2 试证 $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x te^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

题型3 求复合函数表达式

方法和规律: 利用函数性质, 可采用代入法, 分析法或图示法等求解.

典例精析

设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)], f\left[\frac{1}{f(x)}\right].$

【分析】本题为初等函数复合, 可采用代入法.

【解】 $f[f(x)] = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)},$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)-1} = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【评注】如果是初等函数与分段函数的复合, 或两个分段函数的复合, 可采用分析法; 如果是两个分段函数的复合, 可采用图示法.

$$f(f(x)) = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)}$$

※ 题型演练 3 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)))}_{n\text{次}},$ 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$ 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)].$

题型4 已知数列的前几项数值及通项的表达式, 求数列的极限

方法和规律: 利用单调有界数列必有极限定理求解 (求解程序: ① 判断极限的存在性)



{单调性, 方法可用数学归纳法或不等式的放缩法; ② 先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后通过解关于 l 的方程, 求得 l 的值, 从而得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. 或者利用数列极限的定义求解 (先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后在通项的两边取极限得出 l 的数值, 再证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

典例精析

设 $x_1 = 2, x_2 = 2 - \frac{1}{x_1}, \dots, x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【分析】利用数列的单调有界性判断数列极限的存在性, 然后通过解方程求出极限.

【解】先证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性:

$x_1 = 2 > 1$, 若 $x_n > 1$, 则 $0 < \frac{1}{x_n} < 1$, 从而 $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n} > 1$, 因此 $x_{n+1} > 1$.

$x_2 - x_1 = -\frac{1}{x_1} = -\frac{1}{2} < 0$, 设 $x_n - x_{n-1} < 0$, 那么

$$2 - \frac{1}{1} = 1$$

$x_{n+1} - x_n = 2 - \frac{1}{x_n} - 2 + \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} \cdot x_n} < 0$,

因此 $x_{n+1} < x_n$,

即 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限得

$l = 2 - \frac{1}{l}$, 即 $l^2 - 2l + 1 = 0, l = 1$,

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$,

【评注】该类题目通常是先用数学归纳法证明数列极限的存在性.

※ 题型演练 4 设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1+x_1}, \dots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

题型 5 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限

方法和规律: 方法有: (1) 特殊级数求和法. (2) 利用幂级数求和法. (3) 利用定积分定义求极限. (4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 剩余的可用一个通项表示, 则用定积分定义求解数列的极限; 若数列的各项虽可提出一个因子 $\frac{1}{n}$, 而剩余的不能用一个通项表示, 但其各项是按递增或递减排列的, 则用夹逼定理求极限.

典例精析

求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2 + 1}{n}}$.

【分析】本题直接求解比较不便, 利用夹逼定理转换函数形式, 然后利用定积分的定义求解.

【解】 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n + \frac{i^2 + 1}{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2 + 1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}$,



$$\therefore \frac{i^2}{n^2} \leq \frac{i^2 + 1}{n^2} \leq \frac{(i+1)^2}{n^2},$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2 + 1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}.$$

$$\text{又} \quad \therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1 + \frac{(n+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + (n+1)^2} = \arctan x \Big|_0^1 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}, \quad \text{故} \quad \text{原极限} = \frac{\pi}{4}.$$

※ 题型演练 5 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$

题型 6 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限

方法和规律: 解法有: (1) 分子, 分母同乘以一个因子, 使之出现连锁反应; (2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式, 在整个相乘过程中中间项相消, 从而化简为易求极限; (3) 利用夹逼定理; (4) 利用对数恒等式化为 n 项和的形式.

典例精析

求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$

【分析】本题利用夹逼定理即可求解.

【解】

$$\begin{aligned} & \therefore \begin{cases} 1 \cdot 3 < 2^2 \\ 3 \cdot 5 < 4^2 \\ \dots\dots\dots \\ (2n-1)(2n+1) < (2n)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2 (2n+1) < 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdots (2n)^2 \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{2n+1} < 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \\ \dots\dots\dots \end{cases} \\ & \Rightarrow 0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0, \quad \text{故} \quad \text{由夹逼定理, 原极限} = 0.$$

※ 题型演练 6 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdots \frac{n^3-1}{n^3+1}.$

题型 7 通项为积分形式的数列的极限

方法和规律: 注意: 一般地 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx$, 求解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ 的方法:

(1) 利用不等式放缩法对 $I_n = \int_a^b f_n(x) dx$ 进行估值, 再用夹逼定理求极限. (2) 利用积分中值

定理求极限.

典例精析 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.**【分析】** 本题可利用放缩法对 $I_n = \int_a^b f(x) dx$ 进行估值.**【解】** $\because$ 在 $[0, 1]$ 上, $x^n \geq 0$, 且 $\frac{1}{1+x}$ 连续, $0 \leq \xi \leq 1$

$$\therefore 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{1+\xi} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1},$$

$$\text{其中 } 0 \leq \xi \leq 1, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi} \cdot \frac{1}{n+1} = 0.$$

※ 题型演练 7 求极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$.**题型 8 求 $\frac{0}{0}$ 型未定式的极限**

方法和规律: 求解 $\frac{0}{0}$ 型极限的方法: (1) 通过因式分解或根式有理化消去零因子, 然后用连续函数的性质求极限; (2) 利用等价无穷小和泰勒公式求极限; (3) 利用洛必达法则求极限 (这是求 $\frac{0}{0}$ 型极限最有效的方法); (4) 利用变量替换 (通常是令 $x = \frac{1}{t}$ 或 $x = \frac{1}{t^2}$).

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{e^x - 1}$ **【分析】** 本题可利用等价无穷小量的代换求解.**【解】** 将根式有理化, 于是有

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\tan x}{(e^x - 1)(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} \\ &\stackrel{\substack{\text{由等价无穷小} \\ \text{代换}}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} = 1. \end{aligned}$$

※ 题型演练 8 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$ **题型 9 求 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限**方法和规律: 求解 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限的方法: (1) 洛必达法则; (2) 变量替换.**典例精析** 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^{2x} e^{t^2} dt\right)^2}{\int_{3x}^0 e^{2t^2} dt}$.



【分析】本题可利用洛必达法则求解.

$$\begin{aligned} \text{【解】原极限} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^{2x} e^{t^2} dt \cdot 2e^{4x^2}}{-3e^{18x^2}} = -\frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{2x} e^{t^2} dt}{e^{14x^2}} \\ &= -\frac{4}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}} \\ &= -\frac{4}{3} \times \frac{1}{14} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^{10x^2}} = 0. \end{aligned}$$

【评注】求 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限,通常以“抓大头”的办法解决为好(所谓抓大头就是取分子、分母中趋向于 $+\infty$ 最快的项).

※ 题型演练 9 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (1+t^2)e^{t^2-x^2} dt}{x}.$

题型 10 求 $\infty - \infty$ 型未定式的极限

方法和规律: 转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$, 再运用洛必达法则求解, 或“抓大头”法求解.

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \cot^2 x).$

【分析】本题可转化为 $\frac{0}{0}$ 型极限.

$$\begin{aligned} \text{【解】原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x + x \cos x)}{x} \cdot \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

※ 题型演练 10 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

题型 11 求 $0 \cdot \infty$ 型未定式的极限

方法和规律: $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 再用法则求解.

设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则

$$\lim f(x)g(x) \quad (0 \cdot \infty) = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

注意: 一般讲, 对数函数和反三角函数一般不“下放”, 因为下放后的导数比原来的复杂, 违背数学运算的原则.

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}.$



【分析】本题可换成 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式.

$$\begin{aligned} \text{【解】原极限} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \frac{\pi}{2} x}{(1-x)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2} x} \cdot \frac{\pi}{2}}{(1-x)^{-2}} = \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)^2}{\cos^2 \frac{\pi}{2} x} \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(1-x)}{-2 \cos \frac{\pi}{2} x \sin \frac{\pi}{2} x \cdot \frac{\pi}{2}} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin \pi x} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\pi \cos \pi x} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

※ 题型演练 11 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{1+x})$

题型 12 求 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式的极限

方法和规律: 基本思路是通过恒等式将其化为 $0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{0}{\infty}$ 或 $\frac{\infty}{0}$, 再用法则.

关于 1^∞ 型极限有两种求法:

(1) 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ (适用于底为 $1 \pm f(x)$ 或易化为 $1 \pm f(x)$ 形式的幂指函数的极限. 其解法: 设 $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \infty$, 则 $\lim [1 \pm f(x)]^{g(x)} = e^{\lim g(x) \ln [1 \pm f(x)]} = e^{\lim g(x) [\pm f(x)]}$.

用语言叙述为: 括号中 1 后的变量 (包括符号) 与幂乘积的极限就是 1^∞ 这种未定式极限的幂, 其底为 e .

(2) 利用对数恒等式 $\Rightarrow e^{\infty \cdot \ln 1} = e^{\infty \cdot 0} \Rightarrow e^{(\frac{\infty}{\infty} \text{ 或 } \frac{0}{0})}$.

设 $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$, 则 $\lim [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim [f(x)]^{g(x)} \ln f(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}$

(适用于底为单因子的呈 1^∞ 型幂指函数的极限的求法).

典例精析 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\arcsin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$.

【分析】本题属于 1^∞ 型未定式, 可化为 $\frac{0}{0}$ 型求解.

$$\begin{aligned} \text{【解】原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\arcsin x - x}{x} \right]^{\frac{1}{x^2}}, \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{3x^2 \sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2 \sqrt{1-x^2} (1 + \sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{6} \\ \therefore \text{原极限} &= e^{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

※ 题型演练 12 求极限: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}}$