文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS
聚焦图书

# 考研数学题型集粹与练习题集

陈文灯　黄先开　曹显兵
编　著

题型集训　以一敌百
技巧丰富　好题荟萃

2008版
（理工类）

世界图书出版公司

FOCUS
聚焦图书

聚骄公司全
文灯教育集

# 考研数学题型集粹与练习题集

陈文灯 黄先开 曹显兵 编著

2008版

（理工类）

世界图书出版公司

## 图书在版编目(CIP)数据

数学题型集粹与练习题集．理工类／陈文灯，黄先开，曹显兵编著．—10版．—北京：世界图书出版公司北京公司，2004．1
ISBN 978-7-5062-5212-6

Ⅰ．数… Ⅱ．①陈…②黄…③曹… Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-习题 Ⅳ．013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第015003号

**数学题型集粹与练习题集(理工类)**

(2008版)

**主　　编**：陈文灯　黄先开　曹显兵
**责任编辑**：高玉兵
**封面设计**：耕者工作室

**出　　版**：世界图书出版公司北京公司
**发　　行**：世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街137号　电话：88861708　邮编：100089)
**销　　售**：各地新华书店
**印　　刷**：廊坊人民印刷厂

**开　　本**：787 × 1092毫米　1/16
**印　　张**：28.75
**字　　数**：460千字
**版　　次**：2007年2月第10版　2007年2月第1次印刷

**ISBN 978-7-5062-5212-6/O·333**　　**定价：39.80元**

**服务热线**：010 - 88861708

# 前　言

《题型集粹与练习题集》(理工类)作为《数学复习指南》(理工类)的姐妹篇,自第一版问世以来已近十载,受到越来越多的读者欢迎。许多考生选择将本书和《数学复习指南》配套使用,作为考研数学复习的主要参考书籍,被有的读者戏称“双剑合璧”。

《题型集粹与练习题集》旨在强化读者对《数学复习指南》中知识点的理解和运用,将知识点与考查题型结合起来,锻炼读者的实际解题能力。本书是作者多年评阅试卷和在文登培训学校考研辅导的经验之作,所讲例题及所选习题都是从多年教学中总结出来的有代表性的试题。通过本书的学习和训练,能帮助读者达到吃透规律,举一反三的目的。

## 本书特点以及使用建议:

### 题型归纳和精讲:

本书将考研数学所要求的知识点按题型进行归类。针对每种题型,给出相应的方法和规律,同时给出若干道典型例题进行精讲,帮助读者理解具体的解题技巧。同时配合了题型演练,强化读者的理解和实际答题能力。建议读者仔细体会方法和规律部分,在做题的过程中有意识地加以应用。

### 阶梯化训练题:

根据难度及综合性把习题分为基础能力题和综合提高题,题量适中,选题科学,适合读者在复习的不同阶段进行训练,逐步提高解题能力。建议读者能独立去解答这些习题,有意识地应用例题中学到的方法去解题,尽量不要从一开始就依赖答案,养成独立思考的习惯。在参考答案部分,我们给出了题型训练和阶梯化训练的详细解答,读者可以借鉴和参考其中的思路和方法。

### 四套模拟试题:

依据大纲的难度和要求,我们为读者精编了四套模拟试卷。每套试卷都给出了详细的解答,包括分析、详解和评注,建议读者严格按照考试时间完成试卷并及时查缺补漏,以达到模拟演练的目的。

本书如有不当和错误之处,恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

编者

2007年2月

# 目　　录

## 第一篇　高等数学





此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

## 第二篇　线性代数

## 第二章　矩阵 …………………………… 229



## 第三章　向量 …………………………… 247



## 第四章　线性方程组 …………………… 261



## 第五章　矩阵的特征值与特征向量 …………………………………………… 279

## 第三篇* 概率论与数理统计初步

注:带 * 篇、章,数二考生不作要求。

# 第一篇　高等数学

## 第一章　函数·极限·连续

**命题特点：**

函数部分一般和其他考点联合出题，如求函数的表达式；关于函数的性质出单项选择题的可能性较大；极限部分一般出填空题或其他部分联合出题，函数的连续部分一般出单项选择题或计算题.

## 题型归纳与精讲

### 题型1　函数奇偶性的判别

**方法和规律：**判别函数奇偶性的方法：(1) 主要依据奇偶性的定义. 有时也用其运算性质(奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数；偶函数之积为偶函数；偶数个奇函数之积为偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数. (2) $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法. (3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若函数的定义域关于原点不对称，则函数就无奇偶性可言.

**典例精析** 判别函数的奇偶性：

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\text{，其中 } f(x) \text{ 为连续的偶函数.}$$

【分析】利用变量代换求出 $F(-x)$，然后比较 $F(x)$ 与 $F(-x)$ 的关系.

【解】$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t \xlongequal{令\ t=-u} \int_0^x f(-u)(-\mathrm{d}u) \xlongequal[偶函数]{f(x)\text{ 为}} -\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$，

$$\because\quad F(x)+F(-x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0,$$

$\therefore\quad F(x)$ 为奇函数.

### 题型2　函数有界性的判别

**方法和规律：**证明或判别函数有界性的思路：(1) 利用有界性定义. (2) 闭区间上连续函数的有界性. (3) 有极限数列必有界. (4) $x\to x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 的充分小邻域中必有界.



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

**典例精析** 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$（$l$ 为有限数），试证：$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

**【分析】** 本题运用闭区间上的连续函数必有界，即可得证.

**【证】** $\because \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l, \quad \therefore \quad$ 对于取 $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2}$，$\exists X > a$，

当 $x > X$ 时，恒有 $|f(x) - l| < \dfrac{|l|}{2}$，

又 $|f(x) - l| \geqslant |f(x)| - |l|$，所以 $|f(x)| - |l| < \dfrac{|l|}{2}$，

即 $|f(x)| < \dfrac{3}{2}|l|$.

$\because$ $f(x)$ 在 $[a,X]$ 上连续，由闭区间上连续函数有界性，可知 $\exists S$，使 $\forall x \in [a,X]$，恒有 $|f(x)| < S$.

取 $M = \max\left\{S, \dfrac{3}{2}|l|\right\}$，则对 $\forall x \in [a, +\infty)$ 恒有 $|f(x)| \leqslant M$，

即 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

※ **题型演练 2** 试证 $f(x) = e^{-x^2}\int_0^x te^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

## 题型 3　求复合函数表达式

**方法和规律：** 利用函数性质，可采用代入法，分析法或图示法等求解.

**典例精析** 设 $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$，求 $f[f(x)]$，$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

**【分析】** 本题为初等函数复合，可采用代入法.

**【解】** $f[f(x)] = \dfrac{1}{1 - f^2(x)} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{(1 - x^2)^2}} = \dfrac{(1 - x^2)^2}{x^2(x^2 - 2)}$，

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x) - 1} = \frac{\left(\dfrac{1}{1 - x^2}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{1 - x^2}\right)^2 - 1} = \frac{1}{x^2(2 - x^2)}.$$

**【评注】** 如果是初等函数与分段函数的复合，或两个分段函数的复合，可采用分析法；如果是两个分段函数的复合，可采用图示法.

$f(f(x)) =$

※ **题型演练 3** 设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x))\cdots)}_{n\text{次}}$，若 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$，求 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n}\sin[f_n(x)]$.

## 题型 4　已知数列的前几项数值及通项的表达式，求数列的极限

**方法和规律：** 利用单调有界数列必有极限定理求解（求解程序：① 判断极限的存在性

$\begin{cases}\text{单调性}\\\text{有界性}\end{cases}$,方法可用数学归纳法或不等式的放缩法;② 先令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后通过解关于 $l$ 的方程,求得 $l$ 的值,从而得极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$). 或者利用数列极限的定义求解(先令$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,然后在通项的两边取极限得出 $l$ 的数值,再证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n-l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

**典例精析** 设 $x_1=2,x_2=2-\dfrac{1}{x_1},\cdots,x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**【分析】** 利用数列的单调有界性判断数列极限的存在性,然后通过解方程求出极限.

**【 解 】** 先证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 的存在性:

$x_1=2>1$,若 $x_n>1$,则 $0<\dfrac{1}{x_n}<1$,从而 $x_{x+1}=2-\dfrac{1}{x_n}>1$,因此 $x_{n+1}>1$.

$x_2-x_1=-\dfrac{1}{x_1}=-\dfrac{1}{2}<0$,设 $x_n-x_{n-1}<0$,那么　　$2-\frac{1}{l}=l$

$x_{n+1}-x_n=2-\dfrac{1}{x_n}-2+\dfrac{1}{x_{n-1}}=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}\cdot x_n}<0$,

因此 $x_{n+1}<x_n$,

即 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$,在 $x_{n+1}=2-\dfrac{1}{x_n}$ 的两边取 $n\to\infty$ 时的极限得

$l=2-\dfrac{1}{l}$,即 $l^2-2l+1=0,l=1$,

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,

**【评注】** 该类题目通常是先用数学归纳法证明数列极限的存在性.

※ **题型演练4**　设 $x_1=1,x_2=1+\dfrac{x_1}{1+x_1},\cdots,x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

## 题型5　求解 $n\to\infty$ 时,$n$ 项和的极限

**方法和规律:** 方法有:(1) 特殊级数求和法. (2) 利用幂级数求和法. (3) 利用定积分定义求极限. (4) 利用夹逼定理.

若数列的每一项可提出一个因子$\dfrac{1}{n}$,剩余的可用一个通项表示,则用定积分定义求解数列的极限;若数列的各项虽可提出一个因子$\dfrac{1}{n}$,而剩余的不能用一个通项表示,但其各项是按递增或递减排列的,则用夹逼定理求极限.

**典例精析** 求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}$.

**【分析】** 本题直接求解比较不便,利用夹逼定理转换函数形式,然后利用定积分的定义求解.

**【 解 】** $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\dfrac{i^2+1}{n}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2+1}{n^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$,

$$\because \quad \frac{i^2}{n^2} \leqslant \frac{i^2+1}{n^2} \leqslant \frac{(i+1)^2}{n^2},$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i^2+1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n}.$$

$$\text{又} \quad \because \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{1+\frac{(n+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{(i+1)^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+(n+1)^2} = \arctan x \Big|_0^1 + 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}, \quad \text{故} \quad \text{原极限} = \frac{\pi}{4}.$$

※ **题型演练5** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

## 题型6 求 $n\to\infty$ 时，$n$ 项乘积的极限

**方法和规律：** 解法有：(1) 分子，分母同乘以一个因子，使之出现连锁反应；(2) 拆通项、分解因式使之成为两因子乘积形式，在整个相乘过程中中间项相消，从而化简为易求极限；(3) 利用夹逼定理；(4) 利用对数恒等式化为 $n$ 项和的形式.

**典例精析** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}$.

**【分析】** 本题利用夹逼定理即可求解.

**【 解 】**

$$\left.\begin{aligned} &\because 1\cdot 3 < 2^2 \\ &\quad 3\cdot 5 < 4^2 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(2n-1)(2n+1) < (2n)^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow 1\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2(2n+1) < 2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2 \\ &\Rightarrow 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{2n+1} < 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad \because \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0, \quad \text{故} \quad \text{由夹逼定理，原极限} = 0.$$

※ **题型演练6** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

## 题型7 通项为积分形式的数列的极限

**方法和规律：** 注意：一般地 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b [\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x$，求解 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 的方法：(1) 利用不等式放缩法对 $I_n = \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$ 进行估值，再用夹逼定理求极限. (2) 利用积分中值

定理求极限.

**典例精析** 求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

【**分析**】本题可利用放缩法对 $I_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 进行估值.

【**解**】$\because$ 　在$[0,1]$上,$x^n\geqslant 0$,且$\dfrac{1}{1+x}$连续, $0<\xi<1$

$$\therefore\quad 0\leqslant\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1},$$

其中$0\leqslant\xi\leqslant 1$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\xi}\cdot\dfrac{1}{n+1}=0$.

※ **题型演练7** 　求极限:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

## 题型8　求$\dfrac{0}{0}$型未定式的极限

**方法和规律**:求解$\dfrac{0}{0}$型极限的方法:(1)通过因式分解或根式有理化消去零因子,然后用连续函数的性质求极限;(2)利用等价无穷小和泰勒公式求极限;(3)利用洛必达法则求极限(这是求$\dfrac{0}{0}$型极限最有效的方法);(4)利用变量替换(通常是令$x=\dfrac{1}{t}$或$x=\dfrac{1}{t^2}$).

**典例精析** 求极限:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\mathrm{e}^x-1}$

【**分析**】本题可利用等价无穷小量的代换求解.

【**解**】将根式有理化,于是有

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{(\mathrm{e}^x-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}$$

$$\xlongequal[\text{代换}]{\text{由等价无穷小}}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x})}=1.$$

※ **题型演练8** 　求极限:$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$

## 题型9　求$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式的极限

**方法和规律**:求解$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限的方法:(1)洛毕达法则;(2)变量替换.

**典例精析** 求极限:$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^{2x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_{3x}^0\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

【分析】本题可利用洛必达法则求解.

【　解　】原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^{2x}e^{t^2}dt\cdot 2e^{4x^2}}{-3e^{18x^2}}=-\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^{2x}e^{t^2}dt}{e^{14x^2}}$

$=-\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}}$

$=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{14}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{xe^{10x^2}}=0.$

【评注】求 $x\to+\infty$ 时的极限,通常以"抓大头"的办法解决为好(所谓抓大头就是取分子、分母中趋向于 $+\infty$ 最快的项).

※ 题型演练 9　求极限:$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt}{x}$.

## 题型 10　求 $\infty-\infty$ 型未定式的极限

**方法和规律:** 转化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$,再运用洛必达法则求解,或"抓大头"法求解.

典例精析　求极限:$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x)$.

【分析】本题可转化为$\dfrac{0}{0}$型极限.

【　解　】原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin x+x\cos x)}{x}\cdot\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}.$

※ 题型演练 10　求极限:$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})\right]$

## 题型 11　求 $0\cdot\infty$ 型未定式的极限

**方法和规律:** $0\cdot\infty\Rightarrow\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$再用法则求解.

设　$\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$,则

$$\lim f(x)g(x)\quad(0\cdot\infty)=\lim\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\quad(\frac{\infty}{\infty})=\lim\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\quad(\frac{0}{0})$$

**注意:** 一般讲,对数函数和反三角函数一般不"下放",因为下放后的导数比原来的复杂,违背数学运算的原则.

典例精析　求极限:$\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

【分析】本题可换成$\frac{\infty}{\infty}$的形式.

$$【\ 解\ 】原极限=\lim_{x\to1}\frac{\tan\frac{\pi}{2}x}{(1-x)^{-1}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi}{2}}{(1-x)^{-2}}=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to1}\frac{(1-x)^2}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to1}\frac{-2(1-x)}{-2\cos\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{\pi}{2}}=2\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\sin\pi x}=2\lim_{x\to1}\frac{-1}{\pi\cos\pi x}=\frac{2}{\pi}.$$

※ 题型演练 11　求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x})$

## 题型 12　求 $1^\infty,0^0,\infty^0$ 型未定式的极限

**方法和规律**：基本思路是通过对数恒等式将其化为$0\cdot\infty\Rightarrow\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$,再用法则.

关于$1^\infty$型极限有两种求法：

(1) 利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$或$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$(适用于底为$1\pm f(x)$或易化为$1\pm f(x)$形式的幂指函数的极限. 其解法：设$\lim f(x)=0,\lim g(x)=\infty$,则$\lim[1\pm f(x)]^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln[1\pm f(x)]}=e^{\lim g(x)[\pm f(x)]}$.

用语言叙述为：括号中1后的变量(包括符号)与幂乘积的极限就是$1^\infty$这种未定式极限的幂,其底为e.

(2) 利用对数恒等式$\Rightarrow e^{\infty\cdot\ln1}=e^{\infty\cdot0}\Rightarrow e^{(\frac{\infty}{\infty}或\frac{0}{0})}$.

设　$\lim f(x)=1,\lim g(x)=\infty$,则　$\lim[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\ln[f(x)]^{g(x)}}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$

(适用于底为单因子的呈$1^\infty$型幂指函数的极限的求法).

**典例精析** 求极限：$\lim\limits_{x\to0}(\frac{\arcsin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$.

【分析】本题属于$1^\infty$型未定式,可化为$\frac{0}{0}$型求解.

$$【\ 解\ 】原极限=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{\arcsin x-x}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}},$$

$$\because\quad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore\quad 原极限=e^{\frac{1}{6}}.$$

※ 题型演练 12　求极限：$\lim\limits_{x\to0^+}(\arctan x)^{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}}$



此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com