中学高等数学
数学参考书

廈門數學通訊

（增　刊）

基础数学概要

（下）

中国数学学会厦门分会编辑

目　录

第七章　定积分

定积分学起源于求图形的面积和一些其它的实际问题。早在公元前225年，希腊人阿基米得就采用穷竭法计算抛物线弓形的面积，中国的祖日恒用球的横截面积求球的体积；刘徽用增加内接多边形的边数计算园周率π的近似值等等，这些都是定积分思想的萌芽。后来，定积分的概念逐渐形成，它被定义为“无穷小量之和”的极限。但因当时尚未得到计算定积分的一般方法，以致使定积分学的产生与发展极其迟缓，直到十七世纪中叶，牛顿和莱布尼兹各自发现了积分与微分之间的内在联系之后，定积分学才真正成为解决各种实际问题的有力工具并得到迅速发展。

本章着重谈定积分的概念和如何计算定积分及其应用等问题。对于超出目前中学教学大纲的有关内容，诸如定积分的存在定理等则从略。

§7·1　定积分的概念及其简单性质

一　定积分的概念

在初等数学中，我们已经知道计算三角形和矩形的面积的方法，并且一切多边形的面积都可以分成有限个三角形来计算。但是由曲线围成的图形的面积就不能用初等数学的方法来计算。例如曲边梯形（即三边是直线，一边是曲线，如图7—1所示）的面积应如何计算？我们就从解决这个问题出发来引出定积分的概念。

设 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant 0$，则 $y=f(x)$ 的图形是上半平面上的一根连续曲线（图7—1）。我们来求由这根曲线，x 轴以及直线 $x=a$ 和 $x=b(a<b)$ 所围成的图形——**曲边梯形**的面积 A。为此，把区间 $[a,b]$ 用点

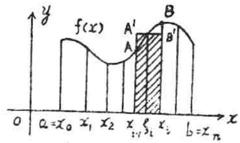

图 7—1

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots$$
$$<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

分为 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$。在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上各选定一点 ξ_i，以 $f(\xi_i)$ 为高，小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长 x_i-x_{i-1} 为底作一小矩形（图7—1中打阴影的部分）。它的面积是

$$f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})。$$

因 $f(x)$ 连续，故只要底 x_i-x_{i-1} 很小，则 $f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ 便可作为小曲边梯形 $x_{i-1}x_iBA$ 面积的近似值。若对所分得的每个小区间都按照上述的做法，则可得 n 个小矩形和 n 个小曲边梯形。再注意到我们所要求的曲边梯形的面积 A 正好等于各个小曲边梯形面积的和，于是 n 个小矩形面积的和

$$A_n=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots$$
$$+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

可作为 A 的一个近似值。而且从直观看出，把区间分得越细，则 A_n 就越接近于 A。由此可知，若把 $[a,b]$ 分成越来越细的小区间而作出一连串这样的图，则 A_n 将趋于 A，即 A_n

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.

的极限（若存在的话）就是A的准确值。

因为$[a,b]$是可以分作不相等的小区间的，我们还得明确一下，所谓分得“越来越细”应当怎样理解。我们要假定，不仅n无限增大，而且连各小区间的长度（$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$）中最长者，记作$\|\Delta x\|$，也趋于零。于是

$$A=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (1)$$

曲边梯形的面积的计算已归结为极限（1）的寻求。这个极限称为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上所取的**定积分**，记作

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

并称函数$f(x)$在$[a,b]$上**可积**；(2)式中$f(x)dx$叫做**被积表达式**；a和b叫做定积分的**下限**和**上限**；“$\int$”叫做**积分号**，它原先是“Sum”（和）的第一个字母拉长的；$[a,b]$叫做**积分区间**；$A_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$叫做**积分和**。

如果所说的积分和（1）的极限不存在，那么就说$f(x)$在$[a,b]$上不可积或$f(x)$的定积分不存在。

到此我们已经从计算曲边梯形的面积引出定积分的定义。但是如果我们认为考虑函数的定积分只是为了求曲边梯形的面积那就不对了。事实上，许多几何问题和物理、力学等等问题的解决也都常常归结到求某个积分和的极限，即归结为某一函数的定积分的计算。这方面的内容放在§7·6定积分的应用来谈。

对于定积分的定义，我们还应注意如下几点：

1°若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的值只与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a,b]$ 有关而与积分变量 x 无关。这是因为把积分变量 x 改写为另一个变量符号 t 时，（2）式右端的极限值不变，所以记号 $\int_a^b f(t)\,dt$ 也表示同一极限值，即

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx.$$

2°若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且 $f(x)>0$，则定积分的几何意义是一个以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积。当 $f(x)<0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 x 轴下方。因为 $f(\xi_i)<0$ 而 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}>0$，$i=1,2,\cdots n$，所以 $f(x)$ 的积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<0$，于是在取极限时得到的定积分是负的，但其绝对值等于 x 轴下方的一个以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积。因此，当 $f(x)<0$ 时，我们把定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的几何意义解释为一个曲边梯形的负面积；在一般情形下，当 $f(x)$ 的取值可正也可负时，即曲线 $y=f(x)$ 有一部分在 x 轴上方，有一部分在 x 轴下方时，定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的几何意义可解释为在 x 轴上方的曲边梯形的正面积与在 x 轴下方的曲边梯形的负面积的代数和。

让我们再来看一看下面这个具有根本重要性的问题。对于怎样一些在区间 $[a,b]$ 上给定的函数 $f(x)$，我们可以保证

定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在，也就是可以保证有这样一个数存在，使当 $\|\Delta x\|\to 0$ 时，和式 $\sum_1^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 就趋于这个数？我们要注意，这个数，不管区间 $[a,b]$ 分划怎样，也不管点 ξ_i 怎样取法，都应当是相同的。

上一世纪的相应研究已经显示所有的连续函数的定积分也就是（1）的极限确实存在，即所有的连续函数都是可积的。

也有不连续而可积的函数。例如，在 $[a,b]$ 上单调而有界的函数属于这种函数之列。

在 $[a,b]$ 上的有理点上等于 0、无理点上等于 1 的函数可以作为不可积函数的一个例子，因为不管把 $[a,b]$ 怎样分划，只要我们取作 ξ_i 的点都是有理数或无理数，则积分和 A_n 将等于 0 或 1。因此它的极限不存在。

例1. 求 $\int_0^1 xdx$。

因 $f(x)=x$ 连续，故定积分 $\int_0^1 xdx$ 存在，分 $[0,1]$ 为 n 等分，分点为：

$$0=\frac{0}{n}<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1$$

在子区间 $\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$ 上取点 $\xi_i=\frac{i}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$，则积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^n\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n i=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},$$

当$\|\Delta x\|=\frac{1}{n}\to 0$时，上式的极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{2}.$$

因$\int_0^1 xdx$存在，故$\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$.

例2. 求以曲线$y=\sin x$，$x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$为曲边的曲边梯形的面积.

所求的面积是定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$. 把$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$分为$n$等分，每分长$\|\Delta x\|=|\Delta x|=\frac{\pi}{2n}$，分点为：

$$0=\frac{0}{2n}\pi<\frac{\pi}{2n}<\frac{2\pi}{2n}<\cdots<\frac{i\pi}{2n}<\cdots<$$
$$\frac{(n-1)\pi}{2n}<\frac{n\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}.$$

在子区间$\left[\frac{(i-1)\pi}{2n},\ \frac{i\pi}{2n}\right]$上取分点$\xi_i=\frac{i\pi}{2n}$, $i=1,2,\cdots,n$,

当$\|\Delta x\|=\frac{\pi}{2n}\to 0$时$n\to\infty$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2\pi}.$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}=\sin\frac{\pi}{2n}+\sin 2\cdot\frac{\pi}{2n}+\cdots$$

$$+\sin(n-1)\frac{\pi}{2n}+\sin n\cdot\frac{\pi}{2n}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{4n}-\cos\frac{2n+1}{4n}\pi}{2\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{4n}+\sin\frac{\pi}{4n}}{2\sin\frac{\pi}{4n}}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{4n}+\sin\frac{\pi}{4n}}{2\sin\frac{\pi}{4n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{4n}}\cdot\cos\frac{\pi}{4n}+\frac{\pi}{4n}\right]=1.$$

例3. 把和式的极限化为定积分。以求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

为例，我们把上式之和改写为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}.$$

最后一个和式可以看成是把区间 [0,1] 分为 n 等分，并在每

个子区间$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$上取点$\xi_i=\frac{i}{n}$后对函数$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$所作的积分和。又因$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$在$[0,1]$上连续，故知它可积，于是

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$$

这样便把和式的极限表示为某一函数的定积分。

二　定积分的简单性质

下面我们所考虑的函数都假定是可积的。

1．常数因子可以提到积分号外。即若k为常数，则

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx.$$

因为

$$\int_a^b kf(x)dx=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}{}^{*}\sum_{i=1}^{n}kf(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=k\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=k\int_a^b f(x)dx.$$

2．函数代数和的积分等于它们积分的代数和。即

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx.$$

---

*注意：　当$\|\Delta x\|\to 0$，必有$n\to\infty$，即表示插入$[a,b]$的分点无限增大；反之，若$n\to\infty$，则未必有$\|\Delta x\|\to 0$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

因为 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$

$$= \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\pm \lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3 交换定积分的上下限时，定积分的绝对值不变，但要改变符号. 即

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

我们定义定积分时，总是假定 $a<b$，于是 $x_i>x_{i-1}$，$\Delta x_i>0$. 现在假设 $a>b$，则 $f(x)$ 从 a 到 b 的定积分仍然象以前一样定义为积分和的极限，不过这时的分点是：

$$a=x_0>x_1>x_2>\cdots>x_{n-1}>x_n=b,$$

可见 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}<0$，$i=1,2,\cdots n$. 故这时 $f(x)$ 的积分和与 $a<b$ 时 $f(x)$ 的积分和相差一个符号，于是它们取极限后得到的定积分也相差一个符号. 特别当定积分的上下限相等时，即当 $a=b$ 时，由于 $\Delta x_i=0$，$i=1,2,\cdots n$. 所以其积分和为零，故规定

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

4 若 c 是 $[a,b]$ 内的任一点，它把 $[a,b]$ 分为 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 两部分，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

因为 $f(x)$ 可积，所以在作积分和时不论对 $[a,b]$ 的那一个划分以及对某一划分而得的每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的点 ξ_i 如何选取，只要 $\|\Delta x\|\to 0$，其积分和的极限不变。因此，我们在划分 $[a,b]$ 时可把点 c 当作一个分点。于是对这样的划分，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分和可分为在 $[a,c]$ 上与在 $[c,b]$ 上两部分的积分和，即

$$\sum_{[a,b]} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{[a,c]} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{[c,b]} f(\xi_i)\Delta x_i$$

上式经取极限后则得性质4.

5 若在 $[a,b]$ 上有 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx.$$

这只要从

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$$

取极限后即得所要证的不等式.

由于

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$$

故由性质5知

$$-\int_a^b|f(x)|dx\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b|f(x)|dx,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx.$$

这就是说，**函数积分的绝对值不大于其绝对值的积分.**

6 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)^*. \qquad (3)$$

因为 $m\leqslant f(x)\leqslant M$, $x\in[a,b]$. 由性质5有

$$\int_a^b mdx\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b Mdx.$$

又

$$\int_a^b mdx=m\int_a^b dx=m\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^n \Delta x_i$$

$$=m\lim_{\|\Delta x\|\to 0}(b-a)=m(b-a),$$

同理, $\int_a^b Mdx=M(b-a)$. 于是性质6得证.

7 定积分第一中值定理 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则在 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ, 使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

由 $f(x)$ 的连续性可设它在 $[a,b]$ 上的最大值为 M, 最小值为 m. 于是有性质6的不等式(3), 以 $b-a$ 除不等式(3)的两边, 得

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leqslant M.$$

这就是说, 数 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 介于 $f(x)$ 的最大值与最小值之间, 根据连续函数的中间值定理, 在 $[a,b]$ 上存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)$ 等于这个数, 即

---

* 等号仅当 $f(x)\equiv M$ 或 $f(x)\equiv m$, $x\in[a,b]$ 时成立.

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

上式两边乘以 $b-a$ 后，则得所要证的定理。

定积分第一中值定理的几何意义是：以区间 $[a,b]$ 为底边，以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积等于同一底而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形的面积，如图 7—2所示。

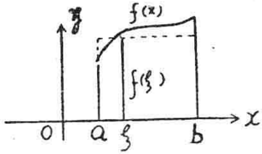

图 7—2

例4. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则从 $\int_a^b f(x)dx=0$ 的条件不能断定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒等于零。为了说明这个问题，我们只要举一个反例就够了。比如，若 $f(x)=\sin x$，我们已在例 2 求得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1.$$

因为由曲线 $y=\sin x$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$x$ 轴以及直线 $x=0$ 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的曲边梯形的面积与由曲线 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$，$x$ 轴以及直线 $x=-\frac{\pi}{2}$ 和 $x=0$ 所围成的曲边梯形的面积相同（图7—3），但当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 时，$\sin x\leqslant 0$，根据定积分的几何意义知

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin xdx=-1.$$

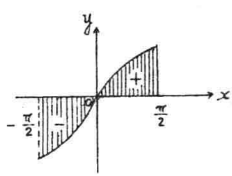

图 7—3

由此 $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-1+1=0$$

但这时 $\sin x\not\equiv 0$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$。

例5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则

$$\int_a^b f(x)dx>0$$

由定积分的第一中值定理知，在 $[a,b]$ 上存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

因为 $f(\xi)>0$，故 $\int_a^b f(x)dx>0$。

例6 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、非负（即 $f(x)\geqslant 0$），而且

$$\int_a^b f(x)dx=0$$

则 $f(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$。

证明： 假若不然，则至少存在一点 $c\in[a,b]$，使得 $f(c)\neq 0$。因 $f(x)$ 非负，故 $f(c)>0$。根据 $f(x)$ 的连续性，存在包含 c 点的领域 $[d,e]\subset[a,b]$，使得在 $[d,e]$ 上 $f(x)>0$。于是由例5知

$$\int_d^e f(x)dx>0.$$

又因 $f(x)$ 在区间 $[a,d]$ 和 $[e,b]$ 上非负，故由性质5知

$$\int_a^d f(x)dx\geqslant 0,\qquad \int_e^b f(x)dx\geqslant 0.$$

再由性质4，有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^d f(x)dx+\int_d^e f(x)dx+\int_e^b f(x)dx$$
$$\geqslant\int_d^e f(x)dx>0$$

但这与$\int_a^b f(x)dx=0$发生矛盾。所以$f(x)\equiv 0$，$x\in[a,b]$。证毕。

例7. 设$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$连续，则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

这个不等式叫做柯西-许瓦兹（Cauchy-Schwarz）不等式

（$f(x)$、$g(x)$只要在$[a,b]$可积，则不等式仍然成立）。

因为$f(x)$，$g(x)$是$[a,b]$上的连续函数，所以$f(x)\cdot g(x)$，$f^2(x)$，$g^2(x)$，$\lambda f(x)+g(x)$，$(\lambda f(x)+g(x))^2$也都是$[a,b]$上的连续函数，式中λ是任一实数。因此它们都可积。由

$$\int_a^b(\lambda f(x)+g(x))^2dx\geqslant 0$$

有
$$\int_a^b[\lambda^2f^2(x)+2\lambda f(x)\cdot g(x)+g^2(x)]dx$$
$$=\lambda^2\int_a^b f^2(x)dx+2\lambda\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx\geqslant 0.$$

根据二次函数$A\lambda^2+2B\lambda+C$只在$A>0$和$AC\geqslant B^2$的条件下，才有

$$A\lambda^2+2B\lambda+C\geqslant 0$$

的事实，则有

$$\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\geqslant\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2.$$

这就是所要证明的不等式。

特别地，若$g(x)\equiv 1$，并将a和b换成0和1，则由柯

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com