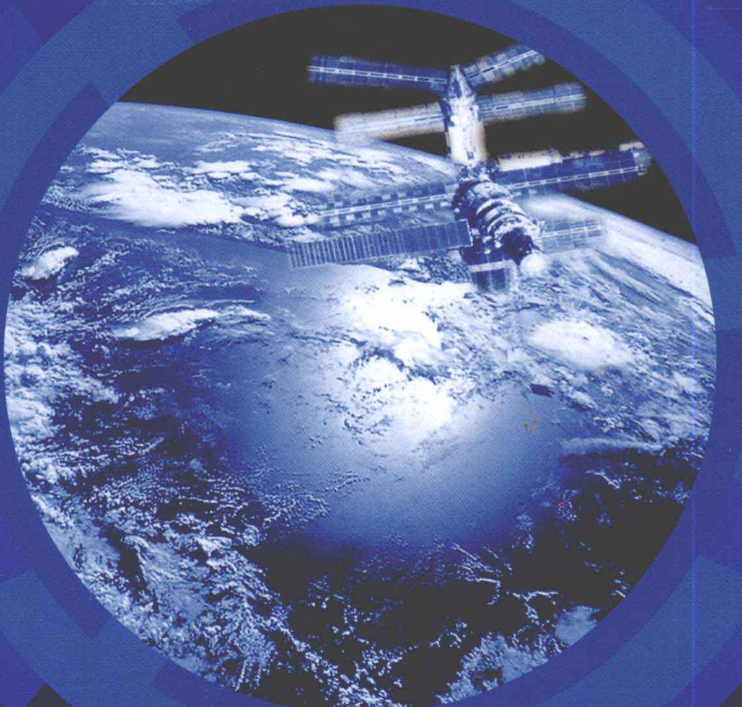
普通高等教育“十二五”规划教材

# 大学物理（上册）

主 编 万 雄 余达祥



科 学 出 版 社

普通高等教育"十二五"规划教材

# 大 学 物 理

## （上册）

主　编　万　雄　余达祥
副主编　熊文林　易江林　程小金
主　审　陈学岗

科 学 出 版 社
北　京

## 内 容 简 介

本书分为上、下两册，共 6 篇，17 章. 上册内容包括力学、电磁学、相对论及天体物理学，下册内容包括波动光学、热学、量子物理. 本书针对大学物理传统内容进行适当的调整，删减及压缩了经典力学部分，补充了流体力学的内容，增加了广义相对论、天体物理、粒子物理的基础知识，阅读材料紧跟大学物理在现代热点科研方向的应用，丰富了教材的内容.

本书层次分明、突出应用，适合工科院校各专业“大学物理”教学的需要，书中各章节均有相应的难易程度不同的例题，可作为工科院校“大学物理”课程的教材.

**图书在版编目(CIP)数据**

大学物理. 上册/万雄，余达祥主编. —北京：科学出版社，2012
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-033102-1

Ⅰ.①大… Ⅱ.①万… ②余… Ⅲ.①物理学-高等学校-教材 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 269552 号

责任编辑：窦京涛 杨 然 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：张克忠 / 封面设计：迷底书装

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新科印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 1 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012 年 1 月第一次印刷 印张：26 1/2
字数：660 000

**定价：52.00 元(上、下册)**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前 言

现代科技的迅速发展，使传统物理学各分支焕发了新的生机，出现了许多新的物理现象与进展. 本书正是为了适应物理学的这种迅速发展而编写的.

本书在透彻讲解基本理论的基础上，强调物理学与工程应用的结合，注重物理学与当代科技进展的关系. 在编写的过程中，我们力求做到系统性强、概念清楚、简明易懂. 全书共 6 篇，17 章.

第一～三章为力学篇，包括质点力学、刚体力学与流体力学基础，精减了质点力学的内容，补充了流体力学的内容.

第四～七章为电磁学篇，包括电场、恒定磁场、电磁感应、电磁场与电磁波的基本原理及实际应用.

第八、九章为相对论及天体物理篇，包括狭义与广义相对论基本内容及天体物理（简介），本篇避免了复杂的数学推导，力求用简明的语言，让学生接受物理知识.

第十～十三章为波动光学篇，包括振动与波动，光的干涉、衍射与偏振等内容，突出物理理论知识与当代科技应用的关系.

第十四、十五章为热学篇，包括气体动理论及热力学基础，增加了耗散结构、热泵技术等新内容，增强了可读性.

第十六、十七章为量子物理篇，包括量子力学基础与粒子物理简介. 本篇旨在为非物理类专业学生普及量子物理的基本原理与观点，减少了复杂的数学推演.

本书由南昌航空大学大学物理实验国家级教学示范中心及大学物理教研部的教师共同完成. 万雄教授编写了绪论和第三、十、十一、十二、十三章；余达祥副教授编写了第五、六、七章；易江林教授和颜超博士编写了第八、九章；熊文林副教授、陈敏教授和肖文波副教授共同编写了第十四、十五章；陈学岗教授编写了第十六、十七章，并审阅了书稿；乐淑萍和程小金同志编写了第一章第二、三、四节和第二章；肖慧荣教授编写了第一章第一节和阅读材料一、二；张志敏同志、赵莉萍同志参与了各章习题编写；张巍巍副教授编写了第十三章阅读材料；甘月红老师编写了第四章.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请读者赐教.

编　者

2011 年 8 月于南昌航空大学

# 目　录

## 第三篇　相对论及天体物理学

# 绪　论

物理学(physics)最早属于哲学范畴，即研究物质世界最一般规律的学科，因此早期的物理学家大都是哲学家，最早提出 physics 的是古希腊著名哲学家亚里士多德(Aristotle，公元前 384～前 322 年). 希腊文中 physics 含义为自然，即物理学是研究自然的科学. 英国物理学家艾萨克·牛顿(Isaac Newton，1643～1727 年)于 1687 年所著《自然哲学的数学原理》提出了经典力学的牛顿三定律及万有引力定律，成为物理学史的经典之作.

物理学在最初引入中国的时候，曾被译为"格致"或"格物"，取自儒家的"致知在格物，格物而后知至"思想. 此后，physics 被译为物理学并逐渐为国人所接受. 中文"物"的含义为"物质"，"理"即为"原理、规律"，意思是物理学是研究物质世界及其基本规律的学科. 按所研究的物质运动形态和具体对象，它涉及的范围包括：力学、声学、热学和分子物理学、电磁学、光学、原子和原子核物理学、基本粒子物理学、固体物理学以及对气体和液体的研究等.

物理学包括实验和理论两大部分，经过实践检验被证实为可靠的理论物理包括：理论力学、热力学和统计物理学、电动力学、相对论、量子力学和量子场论. 当然这些理论也只能是相对真理，有各自的局限性. 运用物理学的基本理论和实验方法研究各种专门问题，使物理学中各种新的分支不断涌现和形成，如流体力学、弹性力学、无线电电子学、物理电子学、金属物理学、半导体物理、电介质物理、超导体物理、等离子物理、固体发光、液晶及激光等. 一些边缘学科也随物理的广泛应用而陆续形成，如化学物理、生物物理、天体物理及海洋物理等等.

## 一、物理学研究的范围——物质世界的层次和数量级

### (一) 空间尺度：质子 $10^{-15}$m～类星体 $10^{26}$m

物理学研究的物质世界从微观、介观到宏观世界. 目前在粒子物理学中，标准模型理论认为的基本粒子可以分为夸克、轻子(lepton)、规范玻色子(boson)和希格斯粒子(Higgs)四大类. 此外有理论认为可能存在质量非常大的超粒子. 例如目前已知的夸克(quark)有六类(up、down、strange、charm、bottom、top)，每类夸克又有三色，共十八种. 当然还有一些被认为是"变异型夸克"，目前还没有确定它们的性质. 夸克在质子内部活动得非常频繁且剧烈，但是从一个物体的整体上看，它们却显得非常稳定.

类星体距离地球极其遥远(几亿到几十亿光年)，被称为"宇宙深处的灯塔". 我们观测到类星体的光线至少是数亿年前发出的，很有可能所观察到的类星体现在已经不存在. 从宇宙演化的角度上来说，类星体可能是星系演化的早期阶段，可帮助人们进一步认识星系黑洞的来源.

### (二) 时间尺度：基本粒子寿命 $10^{-25}$s～宇宙寿命 $10^{18}$s

铯可以做成最准确的计时仪器——原子钟. 1963 年第 13 届国际计量大会决定：铯原子 Cs133 基态的两个超精细能级间跃迁辐射震荡 9192631770 周所持续的时间为 1s. 2011 年 8 月 4 日，日本东京大学对外宣布已研究成功光晶格钟. 光晶格钟属于原子钟的一种，利用原子发射出的电磁波作为振子，并通过激光来稳定电磁波. 实验证明，"光晶格钟"在 6500 万年中仅产生 1s 误差，而且其理论精度为 100 亿年中仅产生 1s 误差.

美国斯坦福大学天体物理学家安德雷·林德领导的研究小组根据暗物质理论建立了一

个估计宇宙年龄的模型. 根据该模型,宇宙最终将坍塌,并估算出宇宙的寿命. 他们利用哈勃望远镜观察到了一些超新星,发现其远去的速度比以前观察到的超新星更快,这意味着宇宙的膨胀速度比我们预计的更快. 根据这些新发现,林德小组认为,宇宙目前只度过了其生命的三分之一,它还能存在 240 亿年左右. 不过鉴于人类迄今尚未直接观察到暗物质,也不清楚宇宙膨胀速度如何变化,因此上述结论只是在假设之上的理论推算.

(三) 速率尺度:静止状态 0m/s～真空中的光速 299 792 458m/s

2011 年 9 月 22 日,意大利格兰萨索国家实验室 OPERA 项目组,利用一套称为 OPERA 的装置,探测来自 730 公里外瑞士日内瓦欧洲核子研究中心(European Centre for Nuclear Research,ECNR)发射的中微子(neutrino)束时,发现中微子比光子快 60.7ns 到达. 实验结果一经公布即受到广泛质疑. 2011 年 10 月底,OPERA 项目组再次进行了实验,11 月 17 日公布了第二次实验结果,新的实验不仅提高了实验精度,还进行了更强的数据分析以及不同小组对数据的重复验证. 结果发现,中微子的速度依然超过光速. 在 OPERA 项目实施的 9 年前,复旦大学倪光炯教授发现了可支持中微子有可能是超光速粒子假说的实验证据.

虽然以上实验结果还未得到确认,但是可以说明,物理学所研究的物质世界尺度范围随着人类的认知深入会越来越广泛.

## 二、物理学的进展及其对现代科技的贡献

物理学的发展推动了科学技术的进步,并在世界三次大工业革命中起了关键作用. 牛顿力学和热力学的发展导致了 18 世纪 60 年代第一次工业革命,其标志是蒸汽机的广泛应用;法拉第电磁感应定律的发现及麦克斯韦的电磁场理论的发展导致了 19 世纪 70 年代第二次工业革命,其标志是电力和无线电技术的广泛应用;20 世纪初,量子力学和相对论的发展促进了第三次工业革命,使得核技术、激光、光纤、信息、超导、红外、纳米等新技术得到广泛应用. 物理学与其他学科一样,也处在不断发展过程中.

(一) 在实验物理研究中出现许多新进展

通过观测超新星红移,发现宇宙在加速膨胀,且宇宙常数不为零;引力波探测技术取得新进展,有望实现引力波的直接探测;分数量子霍尔(Hall)效应,证明二维电子系统在强磁场下形成一种不可压缩的量子流体,可带分数电子电量;高温超导取得新进展,铜基氧化物超导材料在常压下其临界温度达到 138K,世界上首条高温超导磁悬浮列车示范线已在湖北随州建设;激光技术取得新进展,出现了原子激光器、随机激光器、阿秒超快激光器等;超流体技术在环保、化工、食品、医药等领域得到应用;出现了光计算及量子干涉器件等.

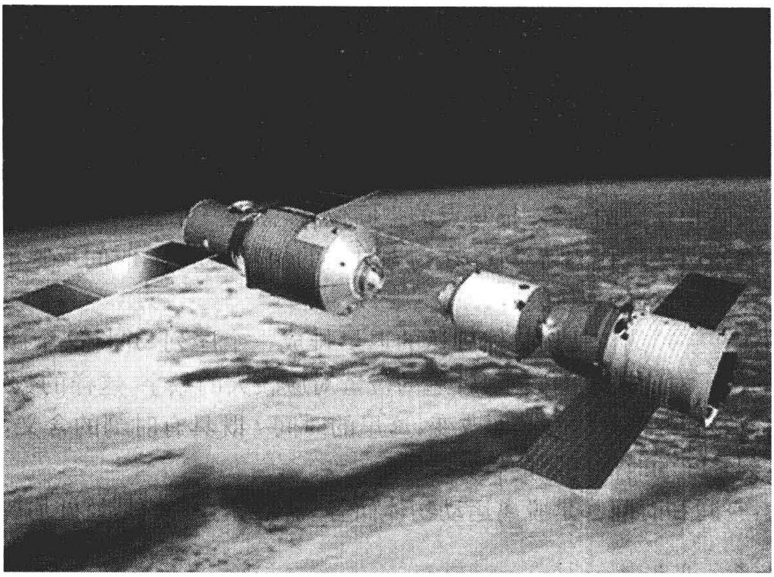
(二) 在理论物理中出现一些新理论

超对称(SUSY),超引力(supergravity),超弦(superstring),M 理论等;Loop 量子引力理论;Milton 通过修正牛顿力学(MOND)来解释暗物质;Hall 效应中的拓朴相变理论;Twister 理论等等.

总之,物理学是一门基础科学,它的基本概念和基本定律是自然科学的很多领域和工程技术的基础. 物理学也是一门覆盖极其广泛的学科,涉及许多分支领域. 本课程提供物理学若干重要分支的基本知识的学习,可为工科其他专业的学习及物理学的深入研究打下基础.

# 第一篇　力　　学

## 第一章　质点力学



中国于2011年9月29日成功发射首个目标飞行器“天宫一号”，11月1日，成功发射“神舟八号”飞船，11月3日凌晨，“天宫一号”和“神舟八号”成功进行首次交会对接，11月14日20时，在北京航天飞行控制中心的精确控制下，“天宫一号”和“神舟八号”第二次交会对接圆满成功，中国由此成为继美国、俄罗斯之后，世界上第三个独立掌握空间交会对接技术的国家.

空间交会与对接技术是指两个航天器在空间轨道上会合并在结构上连成一个整体的技术.航天器之间交会，即相互接近，也就是在太空飞行中，两个或两个以上的航天器通过轨道参数的协调，在同一时间到达空间同一位置的过程.两个航天器在太空进行对接时，要求两者保持对接机构的同轴接近方式和确定的纵向速度，以及在其他线坐标和角坐标上的相对速度为零，但两个航天器之间的实际相对运动参数总是有偏差.一般情况下，两个航天器之间的相对位置及其平动速度通常是靠主动航天器运动控制系统和两个航天器的定向与稳定系统来维持，前者适用于控制质心的平动，后者适用于控制绕质心的转动.

# 第一节　质点运动学

质点运动学研究物体运动过程中位置随时间变化的规律,它是从几何观点来研究和描述物体的机械运动.实际的物体结构复杂,大小各异,为了从简单情况入手研究,引入了质点模型,即具有质量而大小为几何点的物体.本节首先介绍经典时空的概念和参考系,然后介绍位置矢量、速度矢量及加速度矢量,并给出在直角坐标系和自然坐标系下质点运动的描述.

## 一、空间和时间　参考系和坐标系

### (一) 空间　时间

描述物体的运动,要用到时间和空间这两个概念.空间表征物质的广延.在物理事件的相互关系中,空间反映了事件发生的位置上的秩序.空间是三维的,经过空间一点,能够作出也只能作出三条互相正交的直线.描写点的空间位置,需要三个独立的参数.

时间表征物质运动过程的持续性.在物理时间的相互关系中,时间反映了物理事件发生的先后次序.时间是一维的连续变量.

将运动物体在空间的位置按物体到达的迟早排成一个序列,并将这个序列与数字联系起来,令较早的位置对应较小的数字,较迟的位置对应较大的数字,这样的数字称为时刻.运动物体的空间位置随时间 $t$ 的改变而改变,这里的时间 $t$ 既具有时刻的含义,又具有与某起始位置的零时刻之间的时间间隔的含义.

牛顿认为:空间和时间都是脱离运动物体而客观存在的,它们是处处均匀的.

### (二) 参考系　坐标系

宇宙中所有的物体都在不停地运动着,绝对静止的物体是没有的,这就是运动的绝对性;同时,运动还具有相对性.要确定一个质点的位置,或要描述一个质点的运动,都必须选取一个或几个彼此没有相对运动的物体作为参考,这些被选出来作为参考的物体称为参考系.

在运动学中,参考系的选择原则上可以是任意的,主要依据问题的特点和研究的方便而定.例如,研究地面上物体的运动,一般是以地面和相对于地面静止的物体作参考系较方便;在描述太阳系中行星的运动时,则选太阳作参考系较方便.同一个物体的运动,选取的参考系不同,物体的运动形式也不相同,这就是运动描述的相对性.

在动力学中,参考系一般是不能任意选取的.对此,将在下一节作进一步说明.

确定了参考系之后,为了定量地说明一个质点相对于此参考系的空间位置,就要在此参考的空间位置上建立固定的坐标系.常用的坐标系有:直角坐标系、球坐标系、柱坐标系和自然坐标系.在大学物理中,最常用的是直角坐标系;在平面问题中,也常采用极坐标系;当质点运动的轨迹已知时,如火车沿铁轨的运动、空中缆车沿索道的运动等,一般采用自然坐标系.

## 二、位矢和位移　速度和加速度

### （一）位矢

为了描述质点在 $t$ 时刻空间的位置，我们引入位置矢量的概念（简称位矢）。在如图 1-1 所示的直角坐标系中，从坐标系原点 $O$ 到 $t$ 时刻质点位置 $P$ 引出的矢量 $\boldsymbol{r}$ 就称为质点在该位置的位矢，质点 $P$ 在某一时刻位于直角坐标系中的 $(x,y,z)$ 位置，其位矢 $\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

式中，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是沿坐标轴 $(x,y,z)$ 正方向的单位矢量，位矢的大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1-2}$$

其方向由方向余弦确定

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r} \tag{1-3}$$

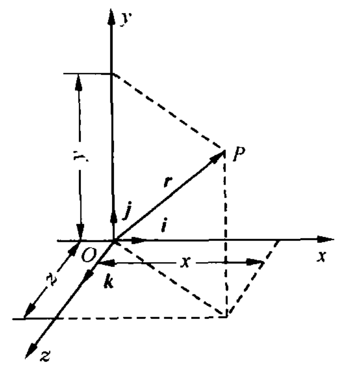


图 1-1

式中，$\alpha,\beta,\gamma$ 分别是 $\boldsymbol{r}$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴之间的夹角。

### （二）位移　路程

设质点沿轨道 $AB$ 做曲线运动，如图 1-2 所示。在 $t$ 时刻质点在 $A$ 处的位置矢量为 $\boldsymbol{r}(t)$，$t+\Delta t$ 时刻在 $B$ 处的位置矢量为 $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$。在 $[t,t+\Delta t]$ 这段时间内，质点位置的变化量 $\Delta\boldsymbol{r}$ 称为位移，记作

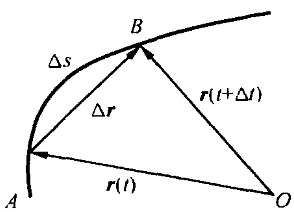


图 1-2

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1-4}$$

位移是矢量，描述了一段时间内质点运动的净效果，与参考点 $O$ 的选择无关。它不代表质点在该段时间内的实际路程。因此，位移和路程是两个完全不同的概念。用 $\Delta s$ 表示在 $\Delta t$ 时间内质点沿轨迹所走过的路程，一般情况下 $\Delta s\neq|\Delta\boldsymbol{r}|$。当一质点经历一个闭合路经回到原来的初始位置，$|\Delta\boldsymbol{r}|=0$，但 $\Delta s\neq 0$。只有在 $\Delta t\to 0$ 的极限条件下，位移的模与路程满足关系 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{|\Delta\boldsymbol{r}|}{\Delta s}=1$，即 $|\Delta\boldsymbol{r}|$ 与 $\Delta s$ 是等价无穷小。

### （三）速度　速率

在图 1-3 中，若质点按运动规律 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 沿曲线轨道 $C$ 运动，$\Delta t$ 时间内完成了位移 $\Delta\boldsymbol{r}$，为了说明质点位置改变的快慢和方向，我们把位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 与所需时间 $\Delta t$ 之比 $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ 定义为质点在时间 $t$ 到 $t+\Delta t$ 内的平均速度，以 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示，即

$$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-5}$$

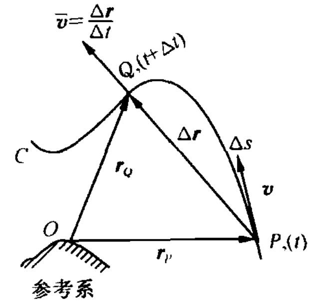


图 1-3

因位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是矢量，除以标量 $\Delta t$（恒大于零的正值）后，所得的平均速度显然也是矢量：其方向与位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向相同，其大小等

于$|\Delta \boldsymbol{r}|/\Delta t$.

平均速度只是粗略地反映了在某段时间内质点位置变动的快慢和方向.为了精确地描述质点的运动快慢和方向,可将时间 $\Delta t$ 无限减小,并使之趋近于零,即 $\Delta t\to 0$,这样质点的平均速度就会趋向于一个确定的极限矢量,这个极限矢量称为 $t$ 时刻的瞬时速度,简称速度,用$\boldsymbol{v}$表示,即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-6}$$

由于矢量导数仍是一个矢量,故速度是矢量,其方向沿着轨道上质点所在点的切线,并指向质点运动前进的一方,其大小为

$$|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t} \tag{1-7}$$

速度$\boldsymbol{v}$的大小和方向分别表示质点在某时刻的运动快慢和方向.若$\boldsymbol{v}$是恒矢量,其大小和方向皆不随时间 $t$ 的变化而改变;或者说,质点运动时保持方向不变和快慢均匀,则质点做匀速直线运动.

质点在任一时刻的位矢和速度,表明了质点在该时刻位于何处,朝着哪个方向离开该处的快慢.所以,位矢 $\boldsymbol{r}$ 和速度$\boldsymbol{v}$是全面描述质点运动状态的两个物理量,缺一不可.

速度的大小称为速率,速率是标量,恒取正值,定义为单位时间内质点所经历的路程,即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-8}$$

由于瞬时速度的大小为

$$|\boldsymbol{v}|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v \tag{1-9}$$

所以,瞬时速率就是瞬时速度的大小.

(四)加速度

质点运动时,它的速度大小和方向都可能随时间变化,加速度就是描述速度大小和方向变化情况的物理量.

设质点沿曲线 $LM$ 运动,如图 1-4 所示,在时刻 $t$ 质点位于 $A$,速度为$\boldsymbol{v}_A$;在时刻 $t+\Delta t$,质点位于 $B$,速度为$\boldsymbol{v}_B$,则 $\Delta t$ 时间间隔内,速度的增量,即速度矢量的变化为

$$\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A \tag{1-10}$$

速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 和$\boldsymbol{v}_A$,$\boldsymbol{v}_B$ 之间的关系如图 1-5 所示.

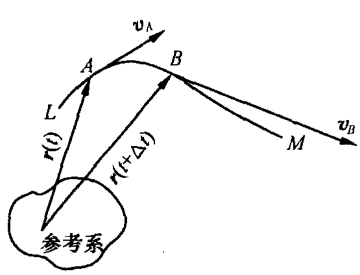



图 1-4

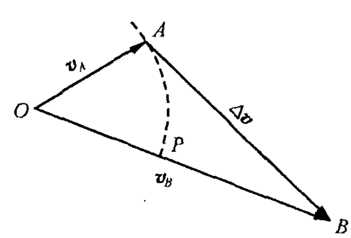



图 1-5

质点速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 与其所经历的时间 $\Delta t$ 之比称为这一段时间内质点的平均加速度,用

$\bar{a}$ 表示，即

$$\bar{a}=\frac{\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A}{\Delta t}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-11}$$

平均加速度只是粗略地反映了在某段时间内质点速度变化的快慢和方向. 为了精确地描述质点速度的变化情况，可将时间 $\Delta t$ 无限减小，并使之趋近于零，即 $\Delta t\to 0$，这样，质点的平均加速度就会趋向于一个确定的极限矢量，这个极限矢量称为 $t$ 时刻的瞬时加速度，简称加速度，用 $\boldsymbol{a}$ 表示，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-12}$$

即加速度等于速度对时间的一阶导数，或位矢对时间的二阶导数.

加速度是矢量，其方向就是当 $\Delta t\to 0$ 时，速度增量 $\Delta \boldsymbol{v}$ 的极限方向. 质点做曲线运动时，加速度的方向总是指向轨迹曲线凹的一面，与同一时刻速度的方向一般是不同的.

## 三、直角坐标系中的运动方程、速度和加速度

当质点运动时，位矢 $\boldsymbol{r}$ 是时间 $t$ 的函数，可表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-13}$$

式(1-13)称为质点的运动方程，其直角坐标分量为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$$

则速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

用 $v_x,v_y,v_z$ 分别表示$\boldsymbol{v}$ 沿坐标轴 $x,y,z$ 的投影，则有

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}++v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{1-14}$$

速度的大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

速度矢量的三个投影式及它的三个方向余弦分别为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad \cos\alpha_v=\frac{v_x}{v}$$

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \cos\beta_v=\frac{v_y}{v}$$

$$v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},\quad \cos\gamma_v=\frac{v_z}{v}$$

加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

用 $a_x,a_y,a_z$ 分别表示加速度 $\boldsymbol{a}$ 沿坐标轴 $x,y,z$ 的投影，则有

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \tag{1-15}$$

加速度的大小为

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

加速度是速度对时间的一阶导数，是位置矢量对时间的二阶导数，即

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

它们的投影式也满足相应的关系

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

可见,如果已知用直角坐标系表示的质点运动学方程,就可以求出质点在任意时刻速度的大小和方向;如果已知用直角坐标系表示的质点运动学方程,或已知速度矢量在 $x,y,z$ 坐标轴上的三个投影随时间的变化函数,就可以求出质点在任意时刻加速度的大小和方向.

## 四、运动学中的两类问题

质点运动学所研究的问题一般可分为两类.

(1) 已知运动学方程,通过求导可求出质点的速度和加速度.

设 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

(2) 已知速度$\boldsymbol{v}$ 或加速度 $\boldsymbol{a}$ 及初始条件($t=0$ 时的初位置和初速度),通过积分可求出质点的运动学方程.

根据$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$, $\int_{r_0}^{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ 可得

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$$

根据 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$, $\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$ 可得

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$$

下面通过实例来说明以上两类问题的解法.

**例 1.1**　已知一质点运动方程为:$\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(2-t^2)\boldsymbol{j}$,求:(1) $t=1\mathrm{s}$ 到 $t=2\mathrm{s}$ 质点的位移;(2) $t=2\mathrm{s}$ 时的$\boldsymbol{v}$ ,$\boldsymbol{a}$;(3) 轨迹方程.

**解**　(1) 由运动方程可得 $t=1\mathrm{s}$ 和 $t=2\mathrm{s}$ 时的位矢分别为

$$\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$$

则位移

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(4-2)\boldsymbol{i}+(-2-1)\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$$

(2)
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-2\boldsymbol{j}$$

当 $t=2\mathrm{s}$ 时

$$\boldsymbol{v}_2=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{a}_2=-2\boldsymbol{j}$$

(3)
$$x=2t,\quad y=2-t^2$$

轨迹方程为

$$y=2-x^2/4$$

**例 1.2** 一质点从静止开始做直线运动，开始时加速度为 $a_0$，此后加速度随时间均匀增加，经过时间 $\tau$ 后，加速度为 $2a_0$，经过时间 $2\tau$ 后，加速度为 $3a_0$，求经过时间 $n\tau$ 后，该质点的速度和走过的距离.

**解** 设质点的加速度为

$$a = a_0 + \alpha t$$

因为 $t=\tau$ 时，$a=2a_0$，所以 $\alpha=a_0/\tau$，即 $a=a_0+a_0 t/\tau$，由 $a=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ 得

$$\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t,\quad \int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t (a_0 + a_0 t/\tau)\mathrm{d}t$$

所以

$$v=a_0 t+\frac{a_0}{2\tau}t^2$$

由 $v=\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}s=v\mathrm{d}t$ 得

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t v\mathrm{d}t = \int_0^t \left(a_0 t + \frac{a_0}{2\tau}t^2\right)\mathrm{d}t,\quad s = \frac{a_0}{2}t^2 + \frac{a_0}{6\tau}t^3$$

$t=n\tau$ 时，质点的速度为

$$v_{n\tau} = \frac{1}{2}n(n+2)a_0\tau$$

质点走过的距离为

$$s_{n\tau} = \frac{1}{6}n^2(n+3)a_0\tau^2$$

## 五、自然坐标系中的速度和加速度

### （一）自然坐标系

自然坐标系常用来描述轨迹已知的平面曲线运动. 某质点运动的轨迹如图 1-6 所示，在该轨迹上任取一点为自然坐标系的原点，以质点所在位置 $P$ 点与 $O$ 点间轨迹的长度 $s$ 来确定质点的位置，则称 $s$ 为质点的自然坐标，即

$$s = s(t) \tag{1-16}$$

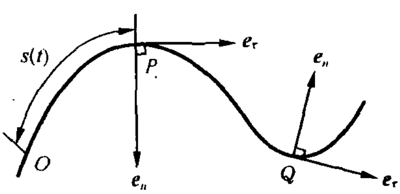


图 1-6

当质点经 $\Delta t$ 从 $P$ 点到达 $Q$ 点时，质点运动的路程为

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t) \tag{1-17}$$

设 $t$ 时刻质点处于 $P$ 点，在该点作相互垂直的两个坐标轴，一个轴沿轨道切向指向质点前进方向，其单位矢量用 $\boldsymbol{e}_\tau$ 表示，称为切向；另一轴沿轨道法向指向轨道凹侧，其单位矢量用 $\boldsymbol{e}_n$ 表示，称为法向. 由于切向和法向坐标轴随质点沿轨道的运动自然变换位置和方向，通常称这种坐标系为自然坐标系(natural coordiates).

### （二）自然坐标系中的速度

当质点沿平面曲线运动时，其速度矢量的大小为

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-18}$$

速度方向为轨道的切向，故速度可表示为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau = v\boldsymbol{e}_\tau \tag{1-19}$$

当$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}>0$时，速度指向切线正方向；当$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}<0$时，速度指向切线负方向.

$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$是速度矢量沿切线方向的投影，它是一个代数量.

只要已知用自然法表示的质点运动学方程$s=f(t)$，就可以求出质点在任意时刻速度的大小和方向.

(三) 自然坐标系中的加速度

如图 1-7 所示，质点加速度$\boldsymbol{a}$在自然坐标系中应为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{e}_\tau)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\tau}{\mathrm{d}t} \tag{1-20}$$

一般的平面曲线运动，可以分解为一系列无穷小的圆弧运动. 为了表示曲线$A$点的弯曲程度，可以将$A$点附近无穷小曲线逼近成为无穷小的圆段，相应的这个圆称为$A$点的曲率圆，其半径称为$A$点的曲率半径，用$\rho$表示，如图 1-8 所示.

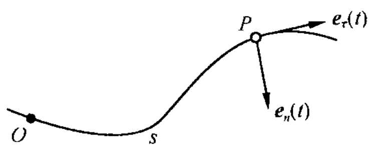



图 1-7

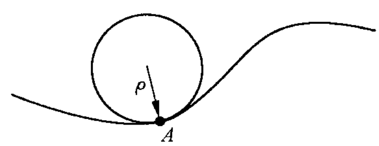



图 1-8

对应于圆心角$\mathrm{d}\varphi$的曲线元弧长$\mathrm{d}s$，曲率圆的曲率为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} \tag{1-21}$$

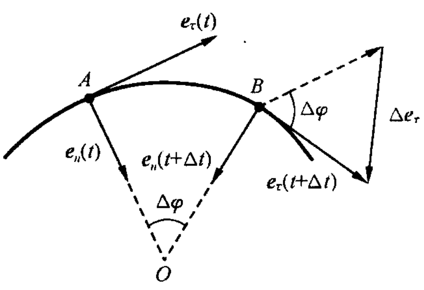



图 1-9

设某物体沿一曲线轨迹运动，如图 1-9 所示，当质点从$A$点沿平面曲线轨道到$B$点时，$\Delta\varphi$表示$\boldsymbol{e}_\tau$和$\boldsymbol{e}_n$转过的角度. 当$\Delta t$很小时，$B$点接近$A$点，$\Delta\varphi$很小，有

$$|\Delta\boldsymbol{e}_\tau| = |\boldsymbol{e}_\tau|\Delta\varphi = \Delta\varphi$$

当$\Delta t\to 0$时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\tau|=\mathrm{d}\varphi$，且由于$\mathrm{d}\varphi\to 0$时，$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\tau$沿$\boldsymbol{e}_n$方向，于是有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\tau = \mathrm{d}\varphi\boldsymbol{e}_n \tag{1-22}$$

将式(1-22)代入式(1-20)得

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau + v\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_n$$

又由式(1-21)，有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\rho}v$$

于是

$$a = \frac{dv}{dt}e_\tau + \frac{v^2}{\rho}e_n = a_\tau + a_n \tag{1-23}$$

上式中

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}e_\tau = a_\tau e_\tau$$

称为切向加速度，它反映了质点速率的变化快慢.

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}e_n = a_n e_n$$

称为法向加速度，它反映了质点速度方向的变化快慢.

加速度的大小为

$$a = |a| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \tag{1-24}$$

加速度的方向可用它与切线方向的夹角表示，即

$$\theta = \arctan\frac{a_n}{a_\tau} \tag{1-25}$$

**例 1.3** 一辆汽车在半径 $R=200$m 的圆弧形公路上行驶，其运动学方程为 $s=20t-0.2t^2$，式中 $s$ 以 m 计，$t$ 以 s 计，试求汽车在 $t=1$s 时的速度和加速度.

**解** 根据速度和加速度在自然坐标系中的表示形式，有

$$v = \frac{ds}{dt} = 20 - 0.4t$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -0.4$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(20-0.4t)^2}{R}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(0.4)^2 + \frac{(20-0.4t)^2}{R}}$$

$t=1$s 时

$$v = 20 - 0.4 = 19.6(\text{m/s})$$

$$a = \sqrt{(-0.4)^2 + \frac{(19.6)^2}{200}} = 1.96(\text{m/s}^2)$$

**例 1.4** 如图 1-10 所示，一颗子弹以初速率 $v_0$、仰角 $\theta$ 射出，分别求子弹在出射点、最高点及飞行中 $t$ 时刻的法向和切向加速度以及轨道的曲率半径.

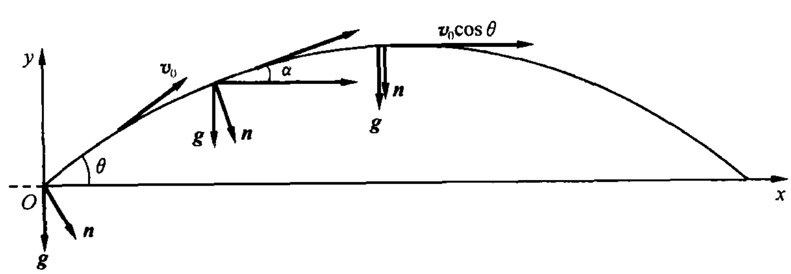



图 1-10

**解** 在子弹的整个飞行过程中，只有重力加速度，切向与法向加速度是重力加速度在自