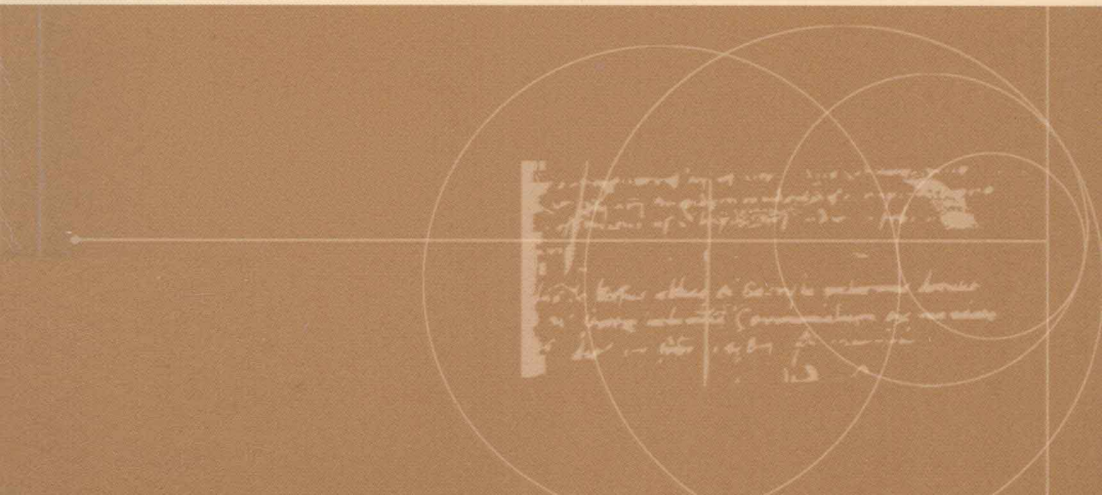
SHUXUE LILUN YU YINGYONG

数学理论与应用

殷先军 王秀国 主编



经济科学出版社
Economic Science Press

数学理论与应用

殷先军　王秀国　主编

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学理论与应用／殷先军，王秀国主编．—北京：经济科学出版社，2011.6
ISBN 978-7-5141-0746-3

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①殷…②王…　Ⅲ.①数学理论-研究　Ⅳ.①01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 104660 号

责任编辑：王　丹
责任校对：刘欣欣
版式设计：代小卫
技术编辑：王世伟

数学理论与应用
殷先军　王秀国　主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
北京中科印刷有限公司印装
787×1092　16 开　18.25 印张　310000 字
2011 年 6 月第 1 版　2011 年 6 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5141-0746-3　定价：40.00 元

编　委　会

主　　编：殷先军　王秀国

编委会成员：殷先军　王秀国　于伟红
王德华　孙晓伟

前　言

中央财经大学应用数学学院成立于2006年7月，它的前身是经济数学系和数学教学部。学院下设基础数学、概率统计、经济数学三个教学机构，以及院办公室、信息资料室等管理与教辅机构。学院拥有一支结构合理、教学和科研水平一流的高素质专业师资队伍和高效率的管理团队。

希尔伯特（David Hilbert，1862～1943）曾经指出：只要一门科学分支充满大量的问题，它就充满了生命力。缺少问题意味着死亡或独立发展的终止。正如人类的每种事业都为了达到某种最终目的一样，数学研究需要问题。问题的解决锻炼了研究者的力量，通过解决问题，他发现新方法及新观点并扩大他的眼界。学院教师注重数学理论和应用的学术研究，主持国家自然科学基金、省部级科研项目和校级研究课题，研究主要围绕：（1）微分方程、控制理论及其应用；（2）运筹学、投资组合、计算方法及应用；（3）概率统计、计量和数量经济学；（4）数学在相关学科中的应用等研究项目和课题展开，得到了很多具有理论研究和应用前景的成果，本书科研篇是这些研究成果的一部分。

作为中央财经大学唯一的理科学院，应用数学学院肩负着提高全校本科生数学素质的重任。通过学习数学，不但使学生具备学习后续专业课程所需要的基本数学知识，而且还使学生在数学的抽象性、逻辑性与严密性等方面受到必要的训练和熏陶。数学课的教学质量，既关系到学生在整个大学期间甚至研究生期间的学习质量，又影响到学生的思辨能力、创造潜能和文化素养的培养。要提高数学课的教学质量，必须不断引入好的教学方法，探

索行之有效的教学方式。我院全体教师，注重教学方法的创新及多种教学手段的综合应用，在课程建设、分层次教学、实践教学等方面，进行了不懈的探索和研究，及时总结经验、分析形势，在教学内容、课程体系、教学手段等方面进行了一系列的改革与实践，积极承担教学改革项目。“教有法而无定法”，要达到较高的教学境界，必须是教师在了解和掌握各教学法及其特点的基础上，将各教学法加以灵活运用，通过长时间的努力而实现的，不断充实完善才是教学法历久弥新的真谛。收录在本书教学篇中的有关教学管理与教学研究的相关论文，或在理论上有所创新，或在实践上有所突破，是教师们研究成果的部分体现。

学院致力于培养全方位的、具有较高综合素质和竞争能力的人才。在培养目标、学生的知识构成、教学管理与学生工作领域进行了有益的探索和实践，取得了较为丰富的育人研究成果和工作经验。我们从中选录了部分有代表性的论文构成本书的管理篇，以展现学院人才培养工作的新思路和新观点。

本书由殷先军、王秀国主编，并负责全书的审校。王秀国主要负责科研篇，于伟红负责教学篇，王德华负责管理篇，孙晓伟负责文稿的初审。

本书的出版得到了学校学科建设基金的资助，在此对学校研究生部和相关职能部门表示衷心地感谢。同时本书的出版也得到了学院教职工的积极参与和支持，编者和作者欢迎同行专家来交流。

编者

2011 年 6 月

目　　录

科　研　篇

教　学　篇

管 理 篇

科研篇

带退化粘性和引力的 Navier-Stokes 方程

陈　静　孙　博*

中央财经大学应用数学学院

摘　要：在本篇文章中，我们研究带引力和固定边界条件的一维可压缩 Navier-Stokes 方程的等熵流。我们感兴趣的是当粘性系数依赖于密度时，气体由真空连续连接的情况。通过处理模型中的退化系数、真空、引力、边界等因素，我们可以得出一系列的先验估计，从而我们可以得到模型的整理弱解的存在性。

关键词：真空　先验估计　整体弱解　存在性

1. 模型的建立和转化

我们考虑一维可压缩 Navier-Stokes 方程的等熵流在欧拉坐标下的形式如下：

$$\begin{cases}\rho_\tau+(\rho u)_\xi=0,\\(\rho u)_\tau+(\rho u^2+P(\rho))_\xi=(\mu u_\xi)_\xi+\rho g,\ \ y(\tau)<\xi<0,\ \ \tau>0.\end{cases}\tag{1}$$

初始条件为

$$\rho(\xi,\ 0)=\rho_0(\xi),\ \ u(\xi,\ 0)=u_0(\xi),\ \ y(0)\leqslant\xi\leqslant0.\tag{2}$$

边值条件为

$$u(0,\ \tau)=0.\tag{3}$$

其中未知函数 $\rho=\rho(\xi,\ \tau)$，$u=u(\xi,\ \tau)$ 和 $P(\rho)$ 分别表示密度，速度和压力；$\mu=\mu(\rho)\geqslant0$ 是速度系数，满足 $\mu(0)=0$. 为了简化模型，我们考虑多方气体 $P(\rho)=A\rho^\gamma$，其中 $\gamma>1$，$A>0$ 是常数。我们假设速度系数 $\mu=c\rho^\theta$，其中 c 和 θ 是正常数。$g>0$ 是引力常数。$y(\tau)$ 是真空边界，满足

* 作者简介：陈静，中央财经大学应用数学学院讲师，理学博士。孙博，中央财经大学应用数学学院讲师，理学博士。本文由中央财经大学“121 人才工程”青年博士发展基金、中央财经大学学科建设基金资助。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}=u(y(\tau),\ \tau),\ \rho(y(\tau),\ \tau)=0. \tag{4}$$

选取坐标变换 $x=\int_{y(\tau)}^{\xi}\rho(z,\ \tau)\mathrm{d}z$，$t=\tau$，i.e.，$\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial t}-\rho u\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial\xi}=\rho\frac{\partial}{\partial x}$.

由边界条件 $X(\tau)=x(0,\ \tau)=\int_{y(\tau)}^{0}\rho(z,\ \tau)\mathrm{d}z$，(1) 式、(3) 式和 (4) 式，我们可以得到 $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau}=0$，也即是 X 与 τ 无关，因此我们可以令 $X\equiv\int_{y(0)}^{0}\rho(z,\ 0)\mathrm{d}z$. 我们考虑 $y(0)>-\infty$ 和 $X>-\infty$ 时的情况，通过上述的坐标变换，问题 (1)～(4) 可以转化为固定边值问题：

$$\begin{cases}\rho_t+\rho^2u_x=0, & (5)_1\\ u_t+P(\rho)_x=(\mu\rho u_x)_x+g,\ 0<x<1,\ t>0, & (5)_2\end{cases}$$

边值条件为 $$\rho(0,\ t)=0,\ u(1,\ t)=0, \tag{6}$$

初值条件为 $$(\rho,\ u)(x,\ 0)=(\rho_0(x),\ u_0(x)),\ 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{7}$$

相容性条件为 $$\rho_0(0)=0,\ u_0(1)=0. \tag{8}$$

其中，$P(\rho)=A\rho^{\gamma}$，$\mu=c\rho^{\theta}$. 不失一般性，我们可以令 $A=1$，$c=1$. 在本篇文章中，我们假设权函数 $\varphi(x)$ 满足如下几个条件：

(C1) 当 $0<x\leqslant 1$ 时，$1>\varphi(x)>0$，$\varphi(0)=0$；

(C2) $\varphi(x)'\in L^{\infty}([0,\ 1])$；

(C3) $x\leqslant C\varphi(x)$.

由条件 (C1)～(C3)，容易得到对任意 $\alpha>-1$，$\varphi(x)^{\alpha}\in L^1([0,\ 1])$. 我们对初值条件以及 θ 和 γ 做如下假设：

(A1) $0<\theta<\frac{1}{2}$，$\gamma>1$；

(A2) $(\rho_0(x))^{-1}\in L^1([0,\ 1])$，$\varphi^{\frac{\nu}{2}}(x)(\rho_0{}^{\theta}(x))_x\in L^2([0,\ 1])$，其中 $\nu=\left(\frac{1}{2}-\theta\right)\left(1+\frac{\theta}{20}\right)$，$u_0(x)\in L^{\infty}([0,\ 1])$，当 $\frac{39}{40}+\frac{\theta}{20}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2\theta}$ 时，$0\leqslant\rho_0(x)\leqslant C\varphi^{\alpha}(x)$，存在 k_1，$\nu<k_1<\min\{(2\gamma-3\theta+1)\alpha,$

$$\frac{80(1-2\theta)}{21(1+\theta)}-2\nu,\ \frac{120(1-2\theta)}{21(1+3\theta)}-2\nu\},$$

$$k_1<\begin{cases}1+(1-3\theta)\alpha,\ 0<\theta<\frac{1}{3},\\ \frac{40(1-2\theta)}{19-17\theta}+\frac{42(1-3\theta)}{19-17\theta}\nu,\ \frac{1}{3}\leqslant\theta<\frac{1}{2},\end{cases}$$

使得 $$\varphi^{k_1}\rho_0^{2\theta-2}(x)\in L^1([0,\ 1]);$$

(A3) 对任意正整数 n,

$$(\rho_0^\gamma(x))_x \in L^{2n}([0,1]),\ (\rho_0^{1+\theta}(x)u_{0x})_x \in L^{2n}([0,1]).$$

定义 1 如果对任意的 $T>0$, 存在函数对 $(\rho(x,t),\ u(x,t))$, 使得

$$\rho,\ u \in L^\infty([0,1]\times[0,T]) \cap C^1([0,T];L^2([0,1])), \tag{9}$$

$$\rho^{1+\theta}u_x \in L^\infty([0,1]\times[0,T]) \cap C^2([0,T];L^2([0,1])). \tag{10}$$

并且对任意试验函数 $\phi(x,t)$, $\psi(x,t)\in C_0^\infty(\Omega)$,

其中 $$\Omega = \{(x,t):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0\},$$

我们有 $$\int_0^\infty\int_0^1 (\rho\phi_t - \rho^2 u_x\phi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^1 \rho_0(x)\phi(x,0)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{11}$$

$$\int_0^\infty\int_0^1 (u\psi_t + (P(\rho) - \mu\rho u_x)\psi_x - g\psi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^1 u_0(x)\psi(x,0)\,\mathrm{d}x = 0, \tag{12}$$

则称函数对 $(\rho(x,t),\ u(x,t))$ 为初边值问题 (5)~(8) 的弱解。

我们将证明在假设条件 (A1)~(A3) 成立的情况下, 初边值问题 (5)~(8) 存在唯一满足定义 1 的整体弱解, 在给出整体弱解的存在性和唯一性的证明之前, 我们先在下面一节中给出几个重要的引理。

2. 先验估计

引理 1 对任意 $0<x<1$, $t>0$, 我们有

$$(\rho^\theta)_t(x,t) = -\theta\rho^{1+\theta}u_x(x,t), \tag{13}$$

$$(\rho^{1+\theta}u_x)(x,t) = \rho^\gamma(x,t) + \int_0^x u_t\,\mathrm{d}y - gx, \tag{14}$$

$$\rho^\theta(x,t) + \theta\int_0^t \rho^\gamma\,\mathrm{d}s = \rho_0^\theta(x) + \theta gxt - \theta\int_0^t\int_0^x u_t\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \tag{15}$$

证明 由 $(5)_1$ 式, 我们有

$$(\rho^\theta)_t(x,t) = \theta\rho^{\theta-1}\rho_t(x,t) = -\theta\rho^{1+\theta}u_x(x,t),$$

这就证明了 (13) 式。将 $(5)_2$ 式在 $[0,x]$ 上积分, 并且运用边值条件 (6), 我们有

$$\int_0^x u_t\,\mathrm{d}y + \rho^\gamma(x,t) = (\rho^{1+\theta}u_x)(x,t) + gx,$$

这就证明了 (14) 式。将 (13) 式在 $[0,t]$ 上积分, 我们有

$$\rho^\theta(x,t) = -\theta\int_0^t \rho^{1+\theta}u_x\,\mathrm{d}s + \rho_0{}^\theta(x),$$