

SHUXUE LILUN YU YINGYONG

数学理论与应用

殷先军 王秀国 主编



经济科学出版社
Economic Science Press

数学理论与应用

殷先军 王秀国 主编

经济科学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学理论与应用/殷先军, 王秀国主编. —北京:
经济科学出版社, 2011. 6
ISBN 978 - 7 - 5141 - 0746 - 3

I. ①数… II. ①殷…②王… III. ①数学理论 -
研究 IV. ①O1 - 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 104660 号

责任编辑: 王 丹
责任校对: 刘欣欣
版式设计: 代小卫
技术编辑: 王世伟

数学理论与应用

殷先军 王秀国 主编

经济科学出版社出版、发行 新华书店经销

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮编: 100142

总编部电话: 88191217 发行部电话: 88191540

网址: [www. esp. com. cn](http://www.esp.com.cn)

电子邮件: [esp@ esp. com. cn](mailto:esp@esp.com.cn)

北京中科印刷有限公司印装

787 × 1092 16 开 18.25 印张 310000 字

2011 年 6 月第 1 版 2011 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5141 - 0746 - 3 定价: 40.00 元

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

(版权所有 翻印必究)

编 委 会

主 编：殷先军 王秀国

编委会成员：殷先军 王秀国 于伟红
王德华 孙晓伟

前 言

中央财经大学应用数学学院成立于2006年7月，它的前身是经济数学系和数学教学部。学院下设基础数学、概率统计、经济数学三个教学机构，以及院办公室、信息资料室等管理与教辅机构。学院拥有一支结构合理、教学和科研水平一流的高素质专业师资队伍和高效率的管理团队。

希尔伯特（David Hilbert, 1862 ~ 1943）曾经指出：只要一门科学分支充满大量的问题，它就充满了生命力。缺少问题意味着死亡或独立发展的终止。正如人类的每种事业都为了达到某种最终目的一样，数学研究需要问题。问题的解决锻炼了研究者的力量，通过解决问题，他发现新方法及新观点并扩大他的眼界。学院教师注重数学理论和应用的学术研究，主持国家自然科学基金、省部级科研项目和校级研究课题，研究主要围绕：（1）微分方程、控制理论及其应用；（2）运筹学、投资组合、计算方法及应用；（3）概率统计、计量和数量经济学；（4）数学在相关学科中的应用等研究项目和课题展开，得到了很多具有理论研究和应用前景的成果，本书科研篇是这些研究成果的一部分。

作为中央财经大学唯一的理科学院，应用数学学院肩负着提高全校本科生数学素质的重任。通过学习数学，不但使学生具备学习后续专业课程所需要的基本数学知识，而且还使学生在数学的抽象性、逻辑性与严密性等方面受到必要的训练和熏陶。数学课的教学质量，既关系到学生在整个大学期间甚至研究生期间的学习质量，又影响到学生的思辨能力、创造潜能和文化素养的培养。要提高数学课的教学质量，必须不断引入好的教学方法，探

索行之有效的教学方式。我院全体教师，注重教学方法的创新及多种教学手段的综合应用，在课程建设、分层次教学、实践教学等方面，进行了不懈的探索和研究，及时总结经验、分析形势，在教学内容、课程体系、教学手段等方面进行了一系列的改革与实践，积极承担教学改革项目。“教有法而无定法”，要达到较高的教学境界，必须是教师在了解和掌握各教学法及其特点的基础上，将各教学法加以灵活运用，通过长时间的努力而实现的，不断充实完善才是教学法历久弥新的真谛。收录在本书教学篇中的有关教学管理与教学研究的相关论文，或在理论上有所创新，或在实践上有所突破，是教师们研究成果的部分体现。

学院致力于培养全方位的、具有较高综合素质和竞争能力的人才。在培养目标、学生的知识构成、教学管理与学生工作领域进行了有益的探索和实践，取得了较为丰富的育人研究成果和工作经验。我们从中选录了部分有代表性的论文构成本书的管理篇，以展现学院人才培养工作的新思路和新观点。

本书由殷先军、王秀国主编，并负责全书的审校。王秀国主要负责科研篇，于伟红负责教学篇，王德华负责管理篇，孙晓伟负责文稿的初审。

本书的出版得到了学校学科建设基金的资助，在此对学校研究生部和相关职能部门表示衷心地感谢。同时本书的出版也得到了学院教职工的积极参与和支持，编者和作者欢迎同行专家来交流。

编者

2011年6月

目 录

科 研 篇

带退化粘性和引力的 Navier-Stokes 方程

陈 静 孙 博 (3)

参数变量函数系数半参数回归方程

陈乃辉 闫璟鸿 (13)

中国古代洛书文化中的数字玄机

葛斌华 (22)

情感动态规律分析方法

何 童 (27)

特征值理论在自行车租赁管理中的应用

黄惠青 (32)

重调和特征值问题的 Q_k 元外推

贾尚晖 (37)

隐马尔可夫模型在客户群分类中的应用

李冬红 (41)

2 数学理论与应用

Burgers 方程组的强 Feller 性	
李慧斌	(44)
奇异核的 Dunkl 变换	
刘丽敏	(49)
向量值热方程的全局估计	
刘书茂	(52)
热流形变及不定号椭圆方程	
刘书茂	(59)
一个房屋市场价格系统的可控可观性分析	
穆淑梅	(70)
对抛物型微分方程解的振动性研究成果的综述	
屈 英	(77)
关于 KdV 流问题的一个先验估计	
孙晓伟	(83)
基于多属性决策的供应商评价模型	
孙昭旭	(88)
一种新的姿态估计算法	
王成章	(92)
一种新的彩色人脸特征子空间的计算方法	
王成章	(97)
技术进步下的动态投入产出模型及其应用	
王守楦	(102)

动态环境下的均值 - CVaR 投资组合模型

王秀国 (107)

与企业提留比例相关的退休金保证的数学模型

王义东 贺 今 (115)

金融风险度量中的 Copula 方法研究综述

武修文 (119)

我国居民消费与 GDP 关系的计量分析

谢 安 (124)

具有代数轨线的微分方程系统的研究

殷先军 (130)

浅谈宏观经济系统中控制理论的应用

于伟红 (137)

教 学 篇

如何提高大学生对数学的学习兴趣

陈 静 (145)

推广鲁金 (Luzin) 定理

陈乃辉 闫璟鸿 (149)

两种点估计方法的比较

付小芹 (155)

向量组线性相关性的几种证明方法

付小芹 (159)

4 数学理论与应用

趣谈两个定理的证明

葛斌华 (162)

浅谈矩阵特征值与特征向量的几种求法

何 童 (166)

浅谈积分定义在极限计算中的应用

贾尚晖 (171)

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 在微积分学习中的重要应用

姜玲玉 (174)

浅析导数极限定理

李冬红 (178)

浅谈定积分概念中的哲学思想

李慧斌 (181)

二阶变系数微分方程的解法

刘丽敏 (184)

微分学中的两个例子

穆淑梅 (187)

美国教育多元化对我国大学数学教学的启示

屈 英 (193)

高等数学教学中的哲学思想

孙昭旭 (197)

浅谈大学数学教学中的互动教学

王守祯 (202)

关于基础课分层分类教学的一些思考

王义东 贺 今 (205)

浅论数学对于经济学研究的意义

武修文 (211)

利用二次型定性判别 n 元函数极值

尹 创 (218)

管 理 篇

从项目的角度浅析高校学生会组织架构的合理性

——以中央财经大学应用数学学院学生会为例

陈思佳 (225)

高校辅导员队伍稳定和发展研究

付华伟 武 红 (230)

《数学实验》课应在文科院校中普及的建议

姜玲玉 (236)

我国高校德育现状和问题分析

李丽新 王浩高 (243)

数学专业本科生的培养与发展前景探讨研究

孙 博 李鑫宇 (248)

高校辅导员专业化素质的模糊综合评判

王德华 王秀国 (254)

QS 世界大学排名数据的来源与分析

殷先军 (264)

6 数学理论与应用

浅谈新形势下本科金融数学专业的发展

尹 创 (270)

经济管理类数学课程与教材一体化建设的实践与思考

于伟红 (274)

科

研

篇

带退化粘性和引力的 Navier-Stokes 方程

陈 静 孙 博*

中央财经大学应用数学学院

摘 要：在本篇文章中，我们研究带引力和固定边界条件的一维可压缩 Navier-Stokes 方程的等熵流。我们感兴趣的是当粘性系数依赖于密度时，气体由真空连续连接的情况。通过处理模型中的退化系数、真空、引力、边界等因素，我们可以得出系列的先验估计，从而我们可以得到模型的整理弱解的存在性。

关键词：真空 先验估计 整体弱解 存在性

1. 模型的建立和转化

我们考虑一维可压缩 Navier-Stokes 方程的等熵流在欧拉坐标下的形式如下：

$$\begin{cases} \rho_\tau + (\rho u)_\xi = 0, \\ (\rho u)_\tau + (\rho u^2 + P(\rho))_\xi = (\mu u_\xi)_\xi + \rho g, \quad \gamma(\tau) < \xi < 0, \quad \tau > 0. \end{cases} \quad (1)$$

初始条件为

$$\rho(\xi, 0) = \rho_0(\xi), \quad u(\xi, 0) = u_0(\xi), \quad \gamma(0) \leq \xi \leq 0. \quad (2)$$

边值条件为

$$u(0, \tau) = 0. \quad (3)$$

其中未知函数 $\rho = \rho(\xi, \tau)$, $u = u(\xi, \tau)$ 和 $P(\rho)$ 分别表示密度，速度和压力； $\mu = \mu(\rho) \geq 0$ 是速度系数，满足 $\mu(0) = 0$ 。为了简化模型，我们考虑多方气体 $P(\rho) = A\rho^\gamma$ ，其中 $\gamma > 1$, $A > 0$ 是常数。我们假设速度系数 $\mu = c\rho^\theta$ ，其中 c 和 θ 是正常数。 $g > 0$ 是引力常数。 $\gamma(\tau)$ 是真空边界，满足

* 作者简介：陈静，中央财经大学应用数学学院讲师，理学博士。孙博，中央财经大学应用数学学院讲师，理学博士。本文由中央财经大学“121 人才工程”青年博士发展基金、中央财经大学学科建设基金资助。

$$\frac{dy}{d\tau} = u(y(\tau), \tau), \quad \rho(y(\tau), \tau) = 0. \quad (4)$$

选取坐标变换 $x = \int_{y(\tau)}^{\xi} \rho(z, \tau) dz$, $t = \tau$, i. e., $\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} - \rho u \frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial \xi} = \rho \frac{\partial}{\partial x}$.

由边界条件 $X(\tau) = x(0, \tau) = \int_{y(\tau)}^0 \rho(z, \tau) dz$, (1) 式、(3) 式和 (4) 式,

我们可以得到 $\frac{dX}{d\tau} = 0$, 也即是 X 与 τ 无关, 因此我们可以令 $X \equiv \int_{y(0)}^0 \rho(z, 0)$

dz . 我们考虑 $y(0) > -\infty$ 和 $X > -\infty$ 时的情况, 通过上述的坐标变换, 问题 (1) ~ (4) 可以转化为固定边值问题:

$$\begin{cases} \rho_t + \rho^2 u_x = 0, \end{cases} \quad (5)_1$$

$$\begin{cases} u_t + P(\rho)_x = (\mu \rho u_x)_x + g, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \end{cases} \quad (5)_2$$

$$\text{边值条件为} \quad \rho(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (6)$$

$$\text{初值条件为} \quad (\rho, u)(x, 0) = (\rho_0(x), u_0(x)), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

$$\text{相容性条件为} \quad \rho_0(0) = 0, \quad u_0(1) = 0. \quad (8)$$

其中, $P(\rho) = A\rho^\gamma$, $\mu = c\rho^\theta$. 不失一般性, 我们可以令 $A = 1$, $c = 1$. 在本篇文章中, 我们假设权函数 $\varphi(x)$ 满足如下几个条件:

(C1) 当 $0 < x \leq 1$ 时, $1 > \varphi(x) > 0$, $\varphi(0) = 0$;

(C2) $\varphi(x)' \in L^\infty([0, 1])$;

(C3) $x \leq C\varphi(x)$.

由条件 (C1) ~ (C3), 容易得到对任意 $\alpha > -1$, $\varphi(x)^\alpha \in L^1([0, 1])$. 我们对初值条件以及 θ 和 γ 做如下假设:

$$(A1) \quad 0 < \theta < \frac{1}{2}, \quad \gamma > 1;$$

(A2) $(\rho_0(x))^{-1} \in L^1([0, 1])$, $\varphi^{\frac{\gamma}{2}}(x)(\rho_0^\theta(x))_x \in L^2([0, 1])$, 其中 $\nu = \left(\frac{1}{2} - \theta\right)\left(1 + \frac{\theta}{20}\right)$, $u_0(x) \in L^\infty([0, 1])$, 当 $\frac{39}{40} + \frac{\theta}{20} \leq \alpha \leq \frac{1}{2\theta}$ 时, $0 \leq \rho_0(x) \leq C\varphi^\alpha(x)$, 存在 k_1 , $\nu < k_1 < \min\{(2\gamma - 3\theta + 1)\alpha,$

$$\frac{80(1-2\theta)}{21(1+\theta)} - 2\nu, \frac{120(1-2\theta)}{21(1+3\theta)} - 2\nu\},$$

$$k_1 < \begin{cases} 1 + (1-3\theta)\alpha, & 0 < \theta < \frac{1}{3}, \\ \frac{40(1-2\theta)}{19-17\theta} + \frac{42(1-3\theta)}{19-17\theta}\nu, & \frac{1}{3} \leq \theta < \frac{1}{2}, \end{cases}$$

使得

$$\varphi^{k_1} \rho_0^{2\theta-2}(x) \in L^1([0, 1]);$$

(A3) 对任意正整数 n ,

$$(\rho_0^\gamma(x))_x \in L^{2n}([0, 1]), (\rho_0^{1+\theta}(x)u_{0x})_x \in L^{2n}([0, 1]).$$

定义 1 如果对任意的 $T > 0$, 存在函数对 $(\rho(x, t), u(x, t))$, 使得

$$\rho, u \in L^\infty([0, 1] \times [0, T]) \cap C^1([0, T]; L^2([0, 1])), \quad (9)$$

$$\rho^{1+\theta}u_x \in L^\infty([0, 1] \times [0, T]) \cap C^2([0, T]; L^2([0, 1])). \quad (10)$$

并且对任意试验函数 $\phi(x, t), \psi(x, t) \in C_0^\infty(\Omega)$,

其中 $\Omega = \{(x, t): 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$,

$$\text{我们有} \quad \int_0^\infty \int_0^1 (\rho\phi_t - \rho^2u_x\phi) dx dt + \int_0^1 \rho_0(x)\phi(x, 0) dx = 0, \quad (11)$$

$$\int_0^\infty \int_0^1 (u\psi_t + (P(\rho) - \mu\rho u_x)\psi_x - g\psi) dx dt + \int_0^1 u_0(x)\psi(x, 0) dx = 0, \quad (12)$$

则称函数对 $(\rho(x, t), u(x, t))$ 为初边值问题 (5) ~ (8) 的弱解。

我们将证明在假设条件 (A1) ~ (A3) 成立的情况下, 初边值问题 (5) ~ (8) 存在唯一满足定义 1 的整体弱解, 在给出整体弱解的存在性和唯一性的证明之前, 我们先在下面一节中给出几个重要的引理。

2. 先验估计

引理 1 对任意 $0 < x < 1, t > 0$, 我们有

$$(\rho^\theta)_t(x, t) = -\theta\rho^{1+\theta}u_x(x, t), \quad (13)$$

$$(\rho^{1+\theta}u_x)(x, t) = \rho^\gamma(x, t) + \int_0^x u_t dy - gx, \quad (14)$$

$$\rho^\theta(x, t) + \theta \int_0^t \rho^\gamma ds = \rho_0^\theta(x) + \theta gxt - \theta \int_0^t \int_0^x u_t dy ds. \quad (15)$$

证明 由 (5)₁ 式, 我们有

$$(\rho^\theta)_t(x, t) = \theta\rho^{\theta-1}\rho_t(x, t) = -\theta\rho^{1+\theta}u_x(x, t),$$

这就证明了 (13) 式。将 (5)₂ 式在 $[0, x]$ 上积分, 并且运用边值条件 (6), 我们有

$$\int_0^x u_t dy + \rho^\gamma(x, t) = (\rho^{1+\theta}u_x)(x, t) + gx,$$

这就证明了 (14) 式。将 (13) 式在 $[0, t]$ 上积分, 我们有

$$\rho^\theta(x, t) = -\theta \int_0^t \rho^{1+\theta}u_x ds + \rho_0^\theta(x),$$