雏鹰文库

CHUYING WENKU

学生成长百卷读本 22

学习新方法

中国档案出版社

雏鹰文库——学生成长百卷读本㉒

点　石　成　金

李成吾　　编著

中国档案出版社

目 录

第一章　让数学思维腾飞

一、如何提高运算能力

具备准确、迅速、合理、灵巧的运算能力，是数学能力的基础。为了最大幅度地开发运算技能，在平时学习中需不断强化缜密、逆向、发散、整体、构造、直觉等思维训练，以确保运算的准确、合理、高效、创新，确保思维质量不断升级。

1. 训练缜密思维，保证准确度。

例1　判断 $f(x)=\lg(\sqrt{X^2+1}+x)+\lg(\sqrt{x^+1}-x)$ 的奇偶性；

此题粗看很熟，很多同学信手解得：

$\because f(-x)=\lg[\sqrt{(-X)^2+1}+(-x)]+\lg[\sqrt{(-X)^2+1}-(-x)]=\lg(\sqrt{X^2+1}-X)+\lg(\sqrt{X^2+1}+X)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是偶函数。

上述解法的错误原因是：其一，没从本质上理解奇偶函数的定义，认识不全面、不深刻；其二，忽视了题设中的隐含条件。正确解法为：

易得 $f(x)$ 的定义域为 R，故当 $X\in R$ 时有 $-X\in R$，又 $f(x)=\lg[(\sqrt{X^2+1}+X)(\sqrt{X^2+2}-X)]=\lg(X^2+1-X^2)=$

0，∵$f(-x)=0=f(x)$且$f(-x)=0=-f(x)$，∴$f(x)$既是奇函数，又是偶函数。

例2　已知点$P(x_。,y_。)$是圆$x^2+y^2=R^2$内的一点，则直线$X、X+Y、Y=R^2$与圆的交点的个数是(　)。

很多学生一瞧“$X、X+Y、Y=R^2$”这种直线方程的形式就误认为直线与圆相切；有的学生由$P(X_。,Y_。)$是圆内一点，错断直线与圆相交。然而，真正决定直线与圆位置关系的是圆心到直线的距离d，$d=R^2/\sqrt{X_。^2+Y_。^2}$，由点P在圆内知$\sqrt{X_。^2+Y_。^2}<R$，所以$d>R$，即直线与圆相离，交点个数应是0。

小结　无论题目难易，仔细认真审题是关键，应真正弄清题意，将隐含条件挖掘出来，并随时校对，最后查核。要克服主观性太强的懒惰作风，确保运算的准确性。

2. 训练逆向思维，保证简洁利落。

例3　若下列三个方程中，至少有一个方程有实根，求出实数a的取值范围。

(1)$X^2+4ax+(3-4a)=0$，

(2)$X^2-(a-1)X+a^2=0$，

(3)$X^2+2ax-2a=0$。

若依习惯解之，用判别式分类讨论，繁杂！细一打量“三个方程中至少有一个方程有实根”的否定形式是“三方程皆无实根”。故易得：

$$\begin{cases}\triangle_1=(4a)^2-4(3-4a)<0\\ \triangle_2=(a-1)^2-4a^2<0\\ \triangle_3=(2a)^2-4(-2a)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$-\frac{3}{2}<a<-1$ 故所求应为其解集的补集$\{a|a\leqslant-\frac{3}{2}$或$a>,-1\}$。

小结　逆向思维主要用于否定多数型试题，进行正向思维与逆向思维的转换，可培养思维的深刻性、敏捷性、灵活性，更全面地理解题意。

3. 训练发散思维，保证合理。

例 4　知 a、b∈R，

$$A=\left\{(x,y)\,|\begin{cases}X=1+a\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}\quad a\neq0、\theta\in R\right\},$$

$$B=\left\{(x,y)\,|\begin{cases}X=t\\ y=mt+b\end{cases}\quad m.t\in R\right\}$$问是否存在实数 a、b 使 $A\cap B\neq 0$ 恒成立？

若将椭圆方程与直线方程联立的方程组恒有实数解来使 $A\cap B\neq0$，运算量太大。此时由题设中的条件可看出几何图形来，利用数形结合，自可得到简捷的方法：

解　欲使 $A\cap B\neq\varnothing$ 恒成立，由题设知只须点(o,b)落在椭圆$\frac{(X^2-1)^2}{a^2}+y^2=1$ 内或椭圆上。故$\frac{(o-1)^2}{a^2}+b^2\leqslant1$，

即当$-\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\leqslant b\leqslant\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}(|a|\geq1)$时，总有 $A\cap B\neq\varnothing$。

小结　善于利用解题信息，多向联想，恰当调整，可

简化过程,提高速度和准确率,其中最关键的是把握数学语言间的联系与区别。

4.训练整体思维、高效构造思维,开运算新途径。

例5 解不等式 $\lg\left(x-\frac{1}{X}\right)<0$

解 原不等式等价于

$$0<x-\frac{1}{X}<1 \Leftrightarrow \frac{1}{X-\frac{1}{X}}>0 \Leftrightarrow \frac{X}{X^2-1}>1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(X-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{(X-1)(X+1)}<0,$$

由区间隔离法可得所求:$\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$。

例6 已知a.b满足 $a^2=7-3a$,$b^2=7-3b$ 且 $a\neq b$,求 $\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}$的值。

解 $\because a\neq b$,由题设a,b是方程 $X^2+3X-7=0$ 的两根,故有 $a+b=-3$,$ab=-7$,$\therefore \frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}=\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}=\frac{(a+b)[(a+b)^2-3ab]}{a^2b^2}=-\frac{90}{49}$。

5.训练直觉思维,追求简洁。

例7 解不等式 $|X^2-\sqrt{X-3}|<|2-\sqrt{X-3}|+|X^2-2|$。

此题中既含绝对值,又含无理式,较复杂。但若能退一步从外形上展开联想,就会发现它与公式 $|a+b|\leqslant|a|$

$+|b|$形式类似，若将原式变形为：$|(2-\sqrt{X-3})+(X^2-2)|<|2-\sqrt{X-3}|+|X^2-2|$，则得原不等的同解不等式$(2-\sqrt{X^2+3})(X^2-2)<0$，易得：$X>7$。

总之，要提高运算技巧，不可片面地强调纯粹运算训练的作用，也不可一味追求技巧。应与思维训练结合，在思维中才能真正提高能力。

二、数学中的联想思维

通过不同形式的联想，探求多种途径的解法，多方位、多层次地发散思维，是学习数学的重要方向和目标。

1. 纵向联想。

在学完每一章节后，通过一定量的习题使思维在此章知识网络中充分发散开来，不同的解法涉及到不同的知识点，这样有助于全面复习，巩固加强已学的知识。此过程中如能注意逆向思维的训练，效果尤佳。

例　求证：$seca-tga=tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$

证法 1：$seca-tga=\frac{1}{cosa}-tga=\frac{1+tg^2\frac{a}{2}}{1-tg^2\frac{a}{2}}-\frac{2tg\frac{a}{2}}{1-tg^2\frac{a}{2}}$

$$=\frac{\left(1-tg\frac{a}{2}\right)^2}{1-tg^2\frac{a}{2}}=\frac{1-tg\frac{a}{2}}{1+tg\frac{a}{2}}=tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$$

证法 2：$seca\text{-}tga=\frac{1\text{-}Sina}{cosa}=\frac{1\text{-}cos\frac{\pi}{2}\text{-}a)}{Sin\left(\frac{\pi}{2}\text{-}a\right)}=tg\left(\frac{\pi}{4}\text{-}\frac{a}{2}\right)$

证法 3：$seca\text{-}tga=\frac{1\text{-}sina}{cosa}$

$$=\frac{\left(cos\frac{a}{2}\text{-}sin\frac{a}{2}\right)^2}{cos^2\frac{a}{2}\text{-}Sin^2\frac{a}{2}}=\frac{cos\frac{a}{2}\text{-}Sin\frac{a}{2}}{cos\frac{a}{2}+sin\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{1\text{-}tg\frac{a}{2}}{1+tg\frac{a}{2}}=tg\left(\frac{\pi}{4}\text{-}\frac{a}{2}\right)$$

证法 4：$\because sec^2a\text{-}tg^2a=1$，$\therefore (seca\text{-}tga)(seca+tga)$

$$=1,\ seca\text{-}tga=\frac{1}{seca+tga}=\frac{cosa}{1+sina}=\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}\text{-}a\right)}{1+cos\left(\frac{\pi}{2}\text{-}a\right)}$$

$$=tg\left(\frac{\pi}{4}\text{-}\frac{a}{2}\right)$$

证法 5：$Seca\text{-}tga=\frac{1\text{-}Sina}{cosa}=\frac{cos\frac{a}{2}\text{-}sin\frac{a}{2}}{cos\frac{a}{2}+sin\frac{a}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{2}\,Sin\left(\frac{\pi}{4}\text{-}\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{2}\,cos(\frac{\pi}{4}\text{-}\frac{a}{2}}=tg\left(\frac{\pi}{4}\text{-}\frac{a}{2}\right)。$$

以上五种证法，运用了同角三有函数关系、互余公

式、和、差、倍、半角的三角函数公式。

2. 横向联系的把握。

突破习题所在原章节的知识范围与应用范围，用其它章节的知识来思考，或用代数知识解几何，或用三角知识解代数，培养串通和融化知识的能力。

例　已知 $x+y=1$，求 x^2+y^2 最小值。

解法 1：(利用判别式法)设 $m=x^2+y^2$，则 $m=x^2+(1-X)^2$，即 $2x^2-2x+1-m=0$. ∵ $X\in R$，∴判别式 $\triangle\geqslant 0$，$\triangle=(-2)^2-4\times 2\times(1-m)\geqslant 0$，得 $m\geqslant\frac{1}{2}$，∵ x^2+y^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$。

解法 2：(利用点到直线的距离公式)把 $x+y=1$ 看作一直线方程，把所求转化为在此直线上找一点，使其到原点距离 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为最小，

如图 1－1，∵ $|oc|=\frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

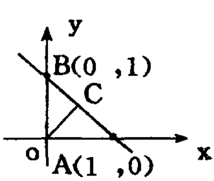

图 1－1

∴ $|oc|^2=\frac{1}{2}$，∴ x^2+y^2 最小值为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$

解法 3：(利用三角函数性质)

设 $x^2+y^2=n(n\geqslant 0)$，令 $x=n\cos\theta, y=n\sin\theta$，代入 $x+y=1$ 中，$n\cos\theta+n\sin\theta=1$。

$$n=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)},n^2=\frac{1}{2\mathrm{Sin}^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$\geqslant\frac{1}{2}$,

$\therefore x^2+y^2$ 最小值为$\frac{1}{2}$。

此处还可用配方法以及基本不等式性质来解。

3. 受控联想。

增减或变换习题条件，调整思路，产生联想，寻求新的解题方法。

例：九张卡片分别写着 0、1、2、……8 九个数字，从中任取三张排成一行组成三位数，问共可组成多少个不同的三位数。

开始可设想取三张卡片排一行，若首位数字为 0，则不成三位九，故有 P_9^3-P_8^2 个不同的三位数。接着加一条件，将原题改为九张卡片分别写有 0、1、……8 九个数字，从中任取三张排一行组成三位数，如果写着 6 的卡片又可当 9 用，问共可组成多少个不同的三位数。此时可得：$P_7^1\cdot P_7^2+2(C_8^2P_3^3-C_7^1P_2^2)$(个)。

4. 旧中求新联想。

将新做的习题与做过的分析对比，觅其内在联系，用解旧题的方法去解决新问题。如此则新旧知识融洽相处，线索分明，牢固可靠。

例 (1)求半径为 R 的圆中的内接矩形面积的最大

值。

(2)求半径为 R 的球的内接圆柱的侧面积的最大值。

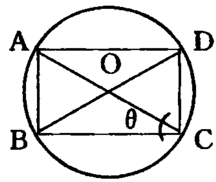

图 1－2

(1)解　如图 1－2，矩形对角线 AC 显然是⊙O 的直径。设 AC 与矩形一边 BC 的成角为 θ，则 $AB=2R\ \mathrm{Sin}\theta$，$BC=2R\cos\theta$，矩形 ABCD 面积 $S=AB.BC=2R\ \mathrm{Sin}\theta.2R\cos\theta=2R^2\ \mathrm{Sin}2\theta\leqslant 2R^2$，∴当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$AB=BC=\sqrt{2}R$，矩形 ABCD 面积最大值 $2R^2$。

(2)解　如图，本题属立体几何范围，但仍可类似地将球半径 AC 与圆柱底面所成角∠ACB 为 θ，圆柱母线为 h，则有 $h=AB=2R.\mathrm{Sin}\theta$。圆柱底面的直径 $B2=2r=A2.\cos\theta=2R\mathrm{los}\theta$，∴圆柱侧面积 $S=2\pi rh=\pi.2R\mathrm{sos}\theta.2R\sin\theta=27.R^2\mathrm{Sin}\theta\leqslant 2\pi R^2$，∴当且公当 $\theta=\frac{\pi}{4}$，$24=h=\sqrt{2}R$ 时，圆柱侧面积的最大值为 $2\pi R^2$。

三、如何完成转化过程

转化问题的过程即是分析问题、解决问题的过程，是化繁为简、化难为易、化未知为有知的过程。

1. 等价原则。

产生等价问题的途径有更换等价的条件和结论；通

过适当的代换;利用原命题与逆否命题的等价关系等。

例 1　在 π△ABC 中,已知 Sin A $\cos^2\frac{C}{2}$ + Sinc. $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3}{2}$SinB,且最大角与最小角之差为 90°,求证,它的三边之比为($\sqrt{7}+1$):$\sqrt{7}$:($\sqrt{7}$-1)。

分析:因 Sin A. $\cos^2\frac{C}{2}$. $\mathrm{cso}^c\frac{A}{2}=\frac{3}{2}$Sin B⇔Sin A · $\frac{1+\mathrm{los}^2}{2}$ + Sinc. $\frac{1+\mathrm{los}\ A}{2}=\frac{3}{2}$SinB⇔SinA + Sin C = 2 Sin B⇔a + c = 2b. 最大角与最小角之差为 90°⇔三个角由小到大依次为 a,90°-2a,90°+a⇔0°<a< 30°又因为正弦定理得三边长之比为:Sina : cos2a : cosa(0°<a<30°),至此,原命题可转化为:“已知 0°<a< 30°,且满足 2cos2a = sin2 + cos2,求证:sin2 : cos22 : los2-($\sqrt{7}$-1):$\sqrt{7}$:($\sqrt{7}+1$)”显然,这是易于证明的。

证:∵ 2cos2a = Sina + cosa ∴ cosa-sina = $\frac{1}{2}$,设 Sina = X,则 $\sqrt{1-X^2}-x=\frac{1}{2}$,(0<X< $\frac{1}{2}$ 解得,sina = $\frac{1}{4}$($\sqrt{7}$-11),cos2a = $\frac{1}{4}\sqrt{7}$,cosa = $\frac{1}{4}$($\sqrt{7}+1$) ∴ Sina : cos2a : cosa = ($\sqrt{7}$-1):$\sqrt{7}$:($\sqrt{7}+1$),故原命题成立。

例 2　设二次方程 $ax^2+26x+1=0$,$cx^2+2bx+1=0$,已知系数组成的 a、bd、C 三数构成等差数列,求证:上

述两个方程中至少有一个方程有实根。

分析：原问题用数学符号简化为：设 $ax^2+2bx+1=0$，$cx^2+2bx+1=0$，$ca\neq0$)，已知 $a+c=2bd$，求证：$b^2-a<0$ 与 $b^2-C<0$ 不能同时成立。它的逆否命题为："设 $ax^2+2bx+1=0$，$cx^2+2bx+10(a\neq0,C\neq0)$ 已知 $b^2<a$，$d^2<c$，求证：$a+c\neq2bd$。"

证明：$\because b^2<a,d^2<c$，$\therefore a+c>b^2+a^2\geqslant2bd$，即 $a+c\neq2bd$，故原命题成立。

2. 映射原则。

如问题在原集合中直接解决有较大难度，可运用某法则"移"之于另一集合内，得到一对应问题。然后在其中讨论并解决，再把结果逆映射回原集。

例 1　已知复数 $Z_1+Z_2+Z_3$ 满足条件 $Z_1\overline{Z_1}=Z_2\overline{Z_2}=Z_3\overline{Z_3}=1$，且 $Z_1+A_2+Z_3=0$，求证：Z_1、Z_2、Z_3 对应的点恰是复平面上一个正三角形的顶点。

分析：因复数集与向量集、实数对集均可建一一映射，故其可转化为三角形式、代数形式、向量形式，其等价三角式及证明如下：

已知

$$\begin{cases} \cos\alpha+\cos\beta+\cos\nu=0, \\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin y=0, \end{cases}$$

求证　$\beta-\alpha=\pm120°$，$Y-\alpha=\mp120°$（α、β，Y 为三复数的辐角）。

证明：$\because -\cos Y=\cos\alpha+\cos\beta$①

$$-\sin y=\sin\alpha+\sin\beta ②$$

①^2、②^2 得：$\mathrm{Cos}^2Y=\mathrm{Cos}^2\alpha+\mathrm{Cos}^2\beta+2\cos\alpha\cdot\cos\beta$③

$$\sin^2Y=\mathrm{Sin}^2a+\mathrm{Sin}^2\beta+2\ \mathrm{Sin}a.\ \mathrm{Sin}\beta,④$$

③+④，得 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$，得 $-2=\pm120°$，不难求出 $Y-2=\mp120°$，∴原命题成立。

例 2，求证 $\max\sqrt{1+X}-\sqrt{X})=1$

分析：因 $X\geqslant0$，设代换 $X=\mathrm{ctg}^2t\left(\begin{matrix}0<\\t\leqslant\frac{1}{2}\pi\end{matrix}\right)$ 即将集合 A $=\{X|X>0\}$ 与集合 $B\left\{t|0<t\leqslant\frac{1}{2}\pi\right\}$ 建立一一对应。因 $y=\sqrt{1+X}-\sqrt{X}=\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2t}-\sqrt{\mathrm{ctg}^2t}=\mathrm{csc}t-\mathrm{ctg}t=\frac{1-\cos t}{\sin t}$ $=\mathrm{tg}t\ \frac{t}{2},\left(0<\frac{1}{2}t\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$。

故原命题可转化为；"求证 $\max\left(\mathrm{tg}\ \frac{t}{2}\right)=1$，$(o<t\leqslant\frac{\pi}{2})$。

证：∵ $\mathrm{tg}\ \frac{t}{2}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增函数，∴ $\max\left(\mathrm{tg}\ \frac{t}{2}\right)=1$，故原题成立。

3. 构造原则。

设想一个与原问题有关的新问题，通过对新问题的研究达到解决原问题的目的，其表现在构造方程、构造函

数以及构造图形上。

例 1 设 a.b ∈ R,满足 $2a+b+2\leqslant 0$,试证:方程 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ 至少有一个正实数解。

证:x=0 不是方程的解,故令 $u=x+\frac{1}{x}$ 则有 $u^2+au+b-2=0$……①

此时,如原方程有解 $x_0>0$,则①有解为 $u_0=x_0+\frac{1}{X_0}\leqslant 2$,反之若①有解 $U_0\pm\sqrt{U_0^2-4}/2$,因此,原方程至少有一解 $X_0>0$,所以原方程有解 $X_0>0$ 与方程①有解 $U_0\geqslant 2$ 等价。构造函数 $f(u)=u^2+au+b-2$,因为 $f(2)=2a+b+2$,由已知,有 $f(2)\leqslant 0$,又 f(u)图象开口向上抛物线,故定有 $U_0\geqslant 2$,使 $f(u_0\geqslant 2$,使 $f(u_0)=0$,原命题得证。

例 2 已知 $a^2\sin\theta+a\cos\theta-1=0$,$b^2\sin\theta+b\cos\theta-1=0(a\neq b)$,用 l 表示过点 (a,a^2),(b,b^2)的直线。证明:此直线在变化时,恒与一定圆相切。

证:二式结构同,且 $a\neq b$,$\sin 0\neq 0$,构造 $\sin\theta\cdot t^2+\cos t-1=0$,显然 a,b 为这方程二异根,由韦达定量有 $a+b=-\frac{\cos}{\sin}$…$ab=-\frac{1}{\sin}$过(a,a^2),(b,b^2)两点的直线方程为 $y-a=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)$,即 $y=(a+b)x-ab$…,将代入得 $x\cos\theta+y\sin\theta-1=0$,因原点到此直线距离为 $d=\left|\frac{0+0-1}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}\right|=1$,故无论为何值,该直线与单位圆恒相切。