分数阶微积分

吴　强　黄建华　编著

清华大学出版社

分数阶微积分

吴 强 黄建华 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书讲述了 Grünwald-Letnikov 型、Riemann-Liouville 型、Caputo 型及 Weyl 型四种分数阶微分、分数阶积分的定义、性质、运算法则及分数阶微积分建模的案例，讨论了分数阶微分方程的初边值问题、随机分数阶微分方程初值问题和随机级数在非线性波方程初值随机化中的应用.

本书可作为高等院校理工科高年级本科生、研究生的教材或教师的教学参考书，也可供从事相关理论研究的科技工作者阅读使用.

图书在版编目(CIP)数据

分数阶微积分/吴强，黄建华编著. --北京：清华大学出版社，2016

ISBN 978-7-302-43546-4

Ⅰ. ①分…　Ⅱ. ①吴…②黄…　Ⅲ. ①微积分一研究　Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 080777 号

责任编辑：陈　明
封面设计：张京京
责任校对：王淑云
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社

网　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
社总机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：三河市少明印务有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170mm×230mm　　**印　张**：12.25　　**字　数**：244 千字
版　次：2016 年 5 月第 1 版　　**印　次**：2016 年 5 月第1 次印刷
印　数：1～2000
定　价：29.00 元

产品编号：063351-01

前言

FOREWORD

近年来,分数阶微积分在理工科领域的应用和研究呈现出欣欣向荣之势,分数阶 Schrödinger 方程的提出带来了量子力学领域极大的震动;分数阶黏弹性理论为新材料的力学特性研究提供了新颖的、准确的数学工具;分数阶模型的出现也为非牛顿流体的研究注入了新的活力;分数阶微积分的引入为在岩土工程中的渗流、油藏工程中的采油率、核物质或污染物在地层中的迁徙等复杂扩散问题的研究提供了适用的数学工具.黏弹性材料的蠕变、松弛、流动、应变率效应与长期强度效应问题,现有的 Maxwell 模型、Voigt 模型、Kelvin 模型等不能很好的描述这些材料的复杂力学行为,分数阶微积分能有效地克服这方面的不足.日本学者 Manabe 在 1960 年提出了分数阶控制观点,法国学者 Oustaloup 于 1981 年创立了分数阶 robust 控制,成功将这一理论应用到诸多实际问题中.分数阶微积分在分数阶系统辨识、分数阶内插、模拟分数阶分抗和滤波器等方面具有很好的应用,在信号的奇异性检测和提取方面具有特殊的作用.将分数阶导数的概念引入天气和气候的研究,提出气候的 $q(0\leqslant q\leqslant 1)$ 阶微商是天气,为天气与气候的研究带来很大的方便.分数阶导数引入地震属性计算中,构建一种对波形敏感而对振幅变化不敏感的奇异性,刻画反射界面的横向变化,计算地震子波的不同分数阶导数,然后利用匹配追踪算法将地震数据分解成地震子波的不同分数阶导数,进而获得反射波同相轴的分数阶.

关于分数阶微积分理论及建模、分数阶微分方程的定性理论和数值解方面的硕士、博士论文达数百篇之多,如博士论文“分数阶微分方程的理论分析与数值计算”(上海大学邓伟华)、“分数阶微积分在现代信号分析与处理中的应用”(四川大学蒲亦非)、“分数阶微积分运算数字滤波器设计与电路实现及应用”(四川大学廖科)、“分数阶微积分及其在量子力学中的应用”(山东大学董建平)、“分形函数与分数阶微积分:构造性方法的应用”(浙江大学姚奎)、“分数阶微积分及其在黏弹性材料和控制中的应用”(山东大学李岩)、“基于分数阶微积分的 PEMFC 建模与控制方法研究”(南京理工大学张旭)等,它们涵盖了科学与工程技术的多个领域.

近十年来,国内、外先后出版了多本分数阶微积分与分数阶微分方程及其在某些研究领域的应用方面的专著,但对分数阶微积分基础知识较系统介绍的书很少,国内

目前尚无专门的教材来系统地、完整地讲授分数阶微分、分数阶积分的定义和性质，以及分数阶微积分建模等内容，这些问题让我们产生了编写一本《分数阶微积分》教材的想法，以便让理工科高年级本科生、研究生学习分数阶微积分的基本内容，并用到相关专业的研究中. 在阅读了大量中、英文分数阶微积分、分数阶微分方程，以及相关的硕、博士研究论文的基础上，通过系统整理和研究，编写了这本教材. 本书第 8 章内容是在编者与北京师范大学吴奕飞和河南师范大学闫威组织的“初值随机化研究”讨论班上的讲义基础上整理而成.

本书在撰写过程中得到了许多专家和学者的大力支持，国防科技大学数学与系统科学系朱健民教授、李建平教授、宋松和教授和刘易成副教授给予了很多指导和帮助，重庆大学蒲学科教授、湘潭大学王文强教授仔细审阅了全部书稿，给出了许多建设性的修改意见，并提供了不少参考资料，使得该书的编写能顺利进行. 清华大学出版社责任编辑陈明博士为该书的出版付出了辛勤劳动，在此深表谢意.

该书的编写和出版得到了国防科技大学教材出版基金、国防科技大学数学一流课程体系建设经费和国家自然科学基金(No：11371367)的资助，在此表示感谢.

该书第 1～5 章由吴强编写，第 6～8 章由黄建华编写，全书由黄建华统稿. 由于编者学识有限，收集整理的文献资料不全，不妥之处请批评指正.

编　者

2016 年 1 月

目录

CONTENTS

第1章

绪　论

1.1 分数阶微积分的创立与发展简介

在经典的微积分教科书里的微积分运算，是指整数阶的微分和整数阶的积分，例如一阶微分、二阶微分、…、n 阶微分，一阶积分、二阶积分、…、n 阶积分，等等. 而分数阶微积分(fractional calculus)，顾名思义，就是将通常意义下整数阶的微积分运算推广到分数阶的微分和分数阶的积分，它可以看成是经典的整数阶微积分的拓展. 需要指出的是，这里的"分数阶"不仅仅指的是有理分数，也包括阶数为无理数和复数的情形.

将整数阶的微积分运算向任意非整数阶微积分的拓广研究是一个古老的问题，它是和微分学一起诞生的，最早可以追溯到 Newton 和 Leibniz 创立微积分的时代. 1695 年，Leibniz 在给 L'Hospital 的书信往来中提出了一个关于将微分阶次从整数推广到非整数的含义问题，1695 年 9 月 30 日(一般认为这一天也是分数阶微积分的准确诞生日)，Leibniz 在回答"当 $n=1/2$ 时，$\mathrm{d}^n y/\mathrm{d}x^n$ 代表什么意思"时写到：这将导出一个自相矛盾的论点，总有一天，人们可以由它推导出一些有用的结论. 直到 124 年后，Lacroix 终于给出了问题的答案. 由 Leibniz 所提出的问题开创了一门持续发展了三百多年的关于分数阶微积分的学说，直到 19 世纪末，分数阶微积分的理论体系基本上才被建立并逐渐发展、完善起来. 历史上许多数学家，包括 Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Abel, Lacroix, Leibniz, Grünwald 和 Letnikov 这样的数学巨匠，在创立和发展它的理论方面作出了巨大的贡献，相关的理论与观点在 Oldham 和 Spanier、Miller 和 Ross 等所著的书籍中有比较详细的总结和介绍. 然而三个世纪以来，由于没有物理和力学等背景学科的支持，分数阶微积分一直仅仅作为一个数学领域内的纯理论被数学家研究，而且分数阶算子与经典的物理学理论及力学中 Newton 力系等在整数阶微积分基础上建立的体系相异之处较多，没有得到自然科学与工程科学研究人员的关注，基本上没有相关的应用文章发表. 分数阶微积分的研究热潮是在 20 世纪 70 年代，主要原因是因为研究人员发现分形几何、幂律现象与记忆过程等相关现象或过程可以与分数阶微积分建立起密切的联系，分数阶微积分可

以作为一种很好的描述与刻画手段.

从数学分类来看,分数阶微积分是数学分析的一个分支,或整体微积分的一个部分内容,当微分或积分的阶数为整数时,分数阶微积分就转化为经典的微积分,从这一性质来说,分数阶微积分也可以看成是整数阶微积分的推广. 实际上,将非整数阶微积分称之为"分数阶微积分"或"分数阶微积分演算"是一种不严格的命名,因为"分数"是一个不准确的归类,严格地讲,它应该被称为"非整数阶微积分"或"非整数阶微积分演算". 但由于历史的原因,"分数阶微积分"已成为习惯用法. 故本书在不至于引起混淆时,依然沿用这一习惯命名.

分数阶微积分诞生之后,许多数学家围绕这一问题展开研究. Euler 在 1730 年对微分阶次为分数的情形给出了自己的解释. Lagrange 在 1772 年给出了整数阶微分运算阶次的可叠加性质,但对于分数阶微分运算是否具有该性质未给予明确的结论. Laplace 在 1812 年给出了一些特定的分数阶微分运算表达式. 1819 年,Lacroix 给出了函数 $f(x)=x$ 的 $\frac{1}{2}$ 阶微分运算结果 $\frac{\mathrm{d}^{1/2}x}{\mathrm{d}x^{1/2}}=2\sqrt{x/\pi}$. 1822 年,Fourier 给出了分数阶微分的 Fourier 定义.

19 世纪初,分数阶微积分运算理论的系统性研究开始受到重视. Liouville 在 1832 年研究分数阶微积分定义时,考虑加入余函数到定义中去,同时对函数 $\frac{\mathrm{d}^{1/2}\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{d}x^{1/2}}$ 进行了分析,指出对函数进行 q 阶微分,可以将函数展开成幂级数系列,然后类似整数阶微分运算那样对该级数进行逐项微分运算,并给出了一些应用性的实例. 1834 年,Liouville 开始研究等时曲线问题. 1841 年,Gregory 给出了热力学方程的分数阶微积分运算算子符号表达式,被誉为分数阶微积分运算算子的首次提出. Riemann 在 1847 年将 Taylor 级数展开进行了推广,并加入了函数到分数阶微积分的定义中,后续的研究表明加入的余函数可以取为零值,且分数阶微积分的定义的下限可以从零开始. 1853 年,Riemann 给出了采用定积分形式的另一种分数阶微积分的定义. Grünwald 和 Krug 最早将 Liouville 和 Riemann 的结论进行了统一. Grünwald 在 1867 年去掉了 Liouville 方法的限制,采用差商的极限作为微分的定义,对于 q 阶微分,给出了定积分形式的公式. Krug 在 1890 年通过将 Cauchy 积分公式推广到任意阶次,发现了 Riemann 的定积分其积分下限为确定值,而 Liouville 的定积分其积分下限可以没有确定值,也可以为负无穷大值.

在 1965 年,美国耶鲁大学 Mandelbrot 教授提出了分形的概念,并认为自然界和许多科学技术领域都存在大量分数维的现象,而且在整体和局部之间存在自相似现象. 同时分数阶 Brown 运动与 Riemann-Liouville 提出的分数阶微积分的定义有紧密的联系. 从此,作为分形几何和分形动力学的基础,分数阶算子理论特别是分数阶微积分和分数阶微分方程的研究才得到了迅速发展. 20 世纪 90 年代以来,分数阶微

积分理论与方法已被广泛的应用到自然科学与社会科学的各个领域.

分数阶微积分在物理力学领域的应用.在量子力学方面,分数阶 Schrödinger 方程的提出带来了该领域极大的震动.固体力学方面,不仅分数阶黏弹性理论为新材料的力学特性研究提供了新颖的、准确的数学工具,而且分数阶微积分在裂纹扩展,摩擦接触表面建模等领域的应用研究也已经开展.现在软物质力学的研究日新月异,特别是对诸如:液晶、土壤、泡沫材料、聚合物、蛋白质、生物医学材料等软物质的力学特性研究取得了突飞猛进的发展.而分数阶微积分恰恰为软物质的研究提供了合适的数学工具,分数阶微积分不仅仅提供了新的研究思路,而且在软物质建模方面发挥了不可替代的作用.现在分数阶微积分已经成为软物质力学建模的一个主要工具.在黏性流体力学方面,分数阶模型的出现也为非牛顿流体的研究注入了新的活力.众所周知,在现实的研究中,我们接触到的大多不是牛顿流体.但是我们为了研究与数值计算的方便都假设它们是理想的流体,从而在此基础上建立了不同类型的理论模型,这也形成了现在的流体力学体系.分数阶微积分理论引入后这种情况有了极大的改变,它使我们在研究与实际流体相关的力学物理问题时可以建立更符合实际特点的模型,从而得到准确的结论.

分数阶微积分在反常扩散相关问题研究领域的应用.在环境力学的研究领域中,诸多问题涉及反常扩散,如岩土工程中的渗流、油藏工程中的采油率、核物质或污染物在地层中的迁徙等问题.这些扩散现象的重要特征就是扩散过程不满足 Fick 第二定律,是 non-Markov 过程,分数阶微积分的引入为这一类复杂问题的研究提供了较好的数学工具与理论支撑.

分数阶微积分在黏弹性材料的本构关系研究领域中的应用.在实际工程应用中,大量使用的黏弹性材料的力学性质与单一的弹性材料有本质的不同,它们的蠕变、松弛、流动、应变率效应与长期强度效应等都是研究人员关注的问题,现有的 Maxwell 模型、Voigt 模型、Kelvin 模型等不能准确地描述这些材料的复杂力学行为,然而,分数阶微积分却能有效地弥补这方面的不足.

分数阶微积分在自动控制领域的应用.1960 年,日本学者 Manabe 首次提出了分数阶控制这一观点,20 年后,在 1981 年,法国学者 Oustaloup 创立了 CRONE 控制(分数阶 robust 控制),并成功将这一理论应用到诸多实际问题中,是目前应用最为广泛的分数阶控制方法之一,并且 Oustaloup 证明了 CRONE 控制器比传统 PID 控制器更具优势.目前分数阶控制器的应用开始涉及控制理论的各个方面,但鉴于分数阶控制器的设计和实现较为复杂,所以这一强大的工具在工程中并没有得到广泛地应用.

分数阶微积分在信号处理领域的应用.目前,将分数阶微积分应用于信号处理主要有分数阶系统辨识、分数阶内插、模拟分数阶分抗和滤波器等几个方面,其他如分数阶延迟器等也有所涉及,特别是在信号的奇异性检测和提取方面具有特殊的作用.

在诸多的问题处理过程中，分数阶微积分所具有的优点也逐渐被人所接受.

分数阶微积分在天气预报领域的应用. 众所周知，天气和气候研究的困难因素是很多的，天气和气候虽然遵从流体力学规律，但是却显示出一定的随机性，研究天气和气候之间的关系有必要引入分数阶的导数和积分，从物理学的观点来看，不外乎说明天气和气候的随机程度是不相同的，为此提出气候的 $q(0\leqslant q\leqslant 1)$ 阶微商是天气，因此，引入天气和气候之间的桥梁——分数阶导数，为天气与气候的研究开辟了新的途径.

分数阶微积分在生物医学领域的应用. 分数阶微积分的广泛应用，可以提高生物医学器材的设计、描述与控制的能力，可以用来模拟癌细胞在人体、动物组织内的扩散过程，也可以作为建模工具模拟药物在人体、动物体中的扩散过程. 医学图像一般是指为了清楚地看到病人内部的局部器官病变情况而通过一定的设备仪器得到的图片，如 CT、B 超等图片，由于设备、技术等方面的原因，得到的医学图像有可能不够清晰，现在从分数阶微积分的基本定义出发，可以作用于二维医学图像的分数阶微分掩模，掩模可以根据对图像的需求进行增强、补充. 通过实验表明，这个方法可以有效完成对医学图像的处理，并且弥补传统方法不能连续改变处理效果的缺点，是一种简单可行并且效果很好的图像增强的处理方法.

分数阶微积分在地震奇异性分析研究领域的应用. 经典的地震解释主要是观测地震资料的振幅及相位的变化，而振幅往往并不能反映真实的地质情况. 地震界面可能是岩性分界面也可能是岩性过渡带，岩性过渡带的地震反射波是入射波的分数阶导数. 将分数阶导数引入地震属性计算之中，建立一种对波形敏感而对振幅变化不敏感的新属性——奇异性，用以刻画反射界面的横向变化. 该方法的数学原理，是首先计算地震子波的不同分数阶导数，然后利用匹配追踪算法将地震数据分解成地震子波的不同分数阶导数，最后获得反射波同相轴的分数阶.

在其他科学和工程应用研究领域中，分数阶微积分也发挥了积极的推动作用. 大量的研究成果的面世也极大地推动了分数阶微积分的研究进展，一些学者纷纷投入到这个新兴的研究领域. 可以预见到，在不久的将来，分数阶微积分的研究与应用必将产生新的质的飞跃.

随着科学技术的快速发展以及研究的问题越来越复杂，人们认识自然界的能力不断增强. 1974 年，Oldham 和 Spanier 出版了第一部著名的分数阶导数专著，并于当年在美国召开了第一次国际学术会议，但其后 20 年分数阶导数的发展却比较平缓. 20 世纪末至今，由于反常扩散、多孔介质力学、non-Newton 流体力学、黏弹性力学、软物质物理力学研究的需要，分数阶导数的研究和应用再度引起广泛重视，有关的研究和文献增加很快，最近的两本专著分别于 1999 年和 2006 年出版，前者由 Podlubny 所著，主要研究分数阶微分方程；后者由 Kilbas，Srivastava 和 Trujillo 合著，系统介绍分数阶微积分的理论及其应用. 目前，国际上每两年举办一次“分数阶微

积分及其应用”的系列学术研讨会，此外，Journal of fractional Calculus 和 Fractional Calculus and Applied Analysis 是有关分数阶微积分及其应用的专题期刊，在美国数学分类号 2010 版(Mathematics Subject Classification 2010，MSC2010)中，也增加了分数阶微积分的条目.

1.2 几类特殊函数及变换

一些特殊函数和积分变换在分数阶微积分的定义、运算中经常用到，这里介绍 Gamma 函数、Beta 函数、Laplace 变换及 Fourier 变换，包括它们的定义、公式的不同表达形式和运算性质等.

1.2.1 Gamma 函数

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}(z)>0. \tag{1.2.1}$$

Euler 的 Gamma 函数$\Gamma(z)$是分数阶微积分的基本函数，上式的右边也称为第二类 Euler 积分，它是通过 $n!$ 来计算的，并且允许 n 可以取实数甚至是复数. 完全的 Gamma 函数是以极限形式给出

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}=\frac{1}{z}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^z}{1+\frac{z}{k}}(z\neq -n). \tag{1.2.2}$$

不完全的 Gamma 函数的定义形式为

$$\gamma(c,z)=\frac{c^{-z}}{\Gamma(z)}\int_0^c t^{z-1}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+c+1)}. \tag{1.2.3}$$

定理 1.2.1 Gamma 函数有如下性质：

(1) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\Gamma(-z)=-\dfrac{\pi\csc(\pi z)}{\Gamma(z+1)}$,

(2) $\Gamma(c-1,z)=z\Gamma(c,z)+\dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{\Gamma(c)},\Gamma\left(\dfrac{1}{2},z\right)=\dfrac{\mathrm{erf}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$,

(3) $\Gamma(-n)=\infty,n=0,1,2,\cdots,\Gamma(n)=(n-1)!$,

(4) $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z},\Gamma(z)\Gamma(-z)=\dfrac{-\pi}{z\sin\pi z}$,

(5) $\Gamma(n+z)\Gamma(n-z)=\dfrac{\pi z}{\sin\pi z}[(n-1)!]^2\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1-\dfrac{k^2}{z^2}\right),n=1,2,\cdots$,

(6) $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\Gamma(0)=\pm\infty,\cdots$.

常见的几种可化为 Gamma 函数的积分：

$$\int_0^{\infty} t^{z-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{z-1}t^{\lambda-1}\mathrm{d}t=\lambda^{-z}\Gamma(z),\quad \lambda>0,$$

$$\int_0^{\infty} t^{2z-1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Gamma(z),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},\quad n>-1,\cdots.$$

1.2.2 Beta 函数

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1\tau^{p-1}(1-\tau)^{(q-1)}\mathrm{d}\tau,\quad \mathrm{Re}(p)>0,\mathrm{Re}(q)>0.\tag{1.2.4}$$

Beta 函数又称为第一类 Euler 积分，实际上是 Gamma 函数的特定组合形式，对两个 Gamma 函数的乘积施行 Laplace 变换可推导上式. 在一些情况下，用 Beta 函数来表示 Gamma 函数更方便一些. 变量为 z 的不完全 Beta 函数的表达式为

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^z\tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}\mathrm{d}\tau.\tag{1.2.5}$$

定理 1.2.2 Beta 函数有如下性质：

(1) $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p),\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(p+1,q)+\mathrm{B}(p,q+1)$，

(2) $\mathrm{B}(p,q)\mathrm{B}(p+q,r)=\mathrm{B}(q,r)\mathrm{B}(q+r,p)=\mathrm{B}(r,p)\mathrm{B}(p+r,q)$，

(3) $\mathrm{B}(1,1)=1,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi,\mathrm{B}(2,1)=\frac{1}{2}$，

(4) $\mathrm{B}(2,2)=\frac{1}{6},\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\cdots$.

下面给出常见的几种可化为 Beta 函数的积分：

$$\int_a^b(\tau-a)^{p-1}(b-\tau)^{q-1}\mathrm{d}\tau=(b-a)^{p+q-1}\mathrm{B}(p,q),\quad b>a,\mathrm{Re}(p)>0,\mathrm{Re}(q)>0,$$

$$\int_0^1\tau^{v-1}(1-\tau^{\lambda})^{\beta-1}\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\lambda}\mathrm{B}\left(\frac{v}{\lambda},\beta\right),\quad \mathrm{Re}(v)>0,\mathrm{Re}(\beta)>0,\lambda>0,$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\tau^{m-1}}{(1+b\tau^a)^{m+n}}\mathrm{d}\tau=a^{-1}b^{-\frac{m}{a}}\mathrm{B}\left(\frac{m}{a},m+n-\frac{m}{a}\right),\quad a>0,b>0,\cdots.$$

1.2.3 Laplace 变换

设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有定义，如果对于复参变量 $s=\beta+\mathrm{i}\omega$，积分

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\tag{1.2.6}$$

在复平面的某一区域内收敛，则称 $F(s)$ 为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换，记为 $F(s)=\mathrm{L}[f(t)]$，$F(s)$ 和 $f(t)$ 分别称为像函数和原函数. 相应地，公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s,\quad t>0,\mathrm{Re}(s)>c. \tag{1.2.7}$$

称为 Laplace 逆变换式(Laplace 反演积分),记为 $f(t)=\mathrm{L}^{-1}[F(s)]$,并称上两式中的 $F(s)$,$f(t)$构成一个 Laplace 变换对.

Laplace **变换的存在条件**　若函数 $f(t)$满足下列条件:(i)在 $t\geqslant 0$ 的任一有限区间上连续或者分段连续;(ii)当 $t\to+\infty$时,$f(t)$具有有限的增长性,即存在常数 $M>0$ 及 $c\geqslant 0$(称为 $f(t)$的增长指数),使得 $|f(t)|\leqslant M\mathrm{e}^{ct}(0\leqslant t<+\infty)$,则 $f(t)$的 Laplace 变换 $F(s)$在半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上一定存在,Laplace 积分在 $\mathrm{Re}(s)\geqslant c_1>c$ 上绝对收敛而且一致收敛,并且 $F(s)$在半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 内解析.

定理 1.2.3　Laplace 变换具有下列运算性质:

(i) $\mathrm{L}[af(t)]=a\mathrm{L}[f(t)]$,$a$ 是常数.

(ii) $\mathrm{L}[af(t)+bg(t)]=a\mathrm{L}[f(t)]+b\mathrm{L}[g(t)]$,$a$,$b$ 是常数.

(iii) $\mathrm{L}[f(t)*g(t)]=\mathrm{L}[f(t)]\cdot\mathrm{L}[g(t)]$,其中函数 $f(t)$,$g(t)$的积“$*$”的卷积定义为

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)\mathrm{d}u=\int_0^t f(t-u)g(u)\mathrm{d}u.$$

1.2.4　Fourier 变换

若函数 $f(t)$满足 Fourier 积分定理的条件,则在 $f(t)$的连续点处有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

若令

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{1.2.8}$$

则有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{1.2.9}$$

上两式表明,$f(t)$,$F(\omega)$可以通过积分运算互相表示.

将式(1.2.8)称为函数 $f(t)$的 Fourier 变换,其中,$F(\omega)$称为函数 $f(t)$的像函数,记为 $F(\omega)=\mathrm{F}[f(t)]$;将式(1.2.9)称为函数 $F(\omega)$的 Fourier 逆变换(Fourier 反演积分),其中,$f(t)$称为函数的 $F(\omega)$像原函数,记为 $f(t)=\mathrm{F}^{-1}[F(\omega)]$.

Fourier **变换的存在条件**　Fourier 变换及其逆变换只有在满足下面两个条件时才有意义(只是在 $f(t)$的间断点 t_0 处,其反演积分的左端应等于 $\frac{1}{2}[f(t_0+0)+f(t_0-0)]$):(i)积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$ 收敛;(ii)$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上满足 Dirichlet 条件.

定理 1.2.4 Fourier 变换有如下运算性质：

(i) $\mathrm{F}[af(t)+bg(t)]=aF(\omega)+bG(\omega)$，$\mathrm{F}^{-1}[aF(\omega)+bG(\omega)]=af(t)+bg(t)$，其中 a,b 为常数.

(ii) $\mathrm{F}[f(t-t_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}F(\omega)$，$\mathrm{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t_0}f(t)$，其中 t_0,ω_0 为常数.

(iii) $\mathrm{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$，其中 a 为非零常数.

(iv) 设 $f(t)*g(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$，则 $\mathrm{F}[f(t)*g(t)]=F(\omega)\cdot G(\omega)$；对通常意义下的乘积，则有 $\mathrm{F}[f(t)\cdot g(t)]=\dfrac{1}{2\pi}[F(\omega)*G(\omega)]$，其中“$*$”为卷积.

1.3 Mittag-Leffler 函数及其性质

1.3.1 Mittag-Leffler 函数定义

Mittag-Leffler 函数是经典的指数函数的扩展，单参数的 Mittag-Leffler 函数定义如下：

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)},\quad \alpha>0,z\in\mathbf{C}. \tag{1.3.1}$$

两参数的 Mittag-Leffler 函数在分数阶微积分的研究中起着重要的作用，其定义如下：

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+\beta)},\quad \alpha>0,\beta>0,z\in\mathbf{C}. \tag{1.3.2}$$

由 Mittag-Leffler 函数的定义可知有如下定理.

定理 1.3.1 Mittag-Leffler 函数具有如下性质：

(1) $$E_1(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{\Gamma(j+1)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}=\mathrm{e}^z. \tag{1.3.3}$$

(2) $$E_{1,1}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{\Gamma(j+1)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}=\mathrm{e}^z. \tag{1.3.4}$$

$$E_{1,2}(z)=\frac{\mathrm{e}^z-1}{z},\quad E_{1,3}(z)=\frac{\mathrm{e}^z-1-z}{z^2}. \tag{1.3.5}$$

(3) $$E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!\cdot z^j}{j!\cdot\Gamma(\alpha j+\alpha k+\beta)},\quad k=0,1,\cdots. \tag{1.3.6}$$

(4) $$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\equiv E_\alpha(z);\quad E_{1,m}(z)=\frac{1}{z^{m-1}}\left\{\mathrm{e}^z-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right\},\quad m\in\mathbf{N}. \tag{1.3.7}$$

由上式可知，单参数的 Mittag-Leffler 函数也可以看做是两个参数的 Mittag-