高等学校（独立学院）重点规划经济数学系列精品教材

李延敏　总主编

经济数学 I

微积分

李延敏　张继超　赵中建　主　编
朱　生　刘长亮　刘诗淼　副主编

科学出版社

高等学校(独立学院)重点规划经济数学系列精品教材

总主编　李延敏

经济数学Ⅰ
微　积　分

李延敏　张继超　赵中建　主　编
朱　生　刘长亮　刘诗森　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是吉林省精品课“经济数学”项目及吉林省教育厅高等教育“十二五”规划项目研究成果之一，也是科学出版社重点规划教材，是高等学校(独立学院)重点规划经济数学系列精品教材的第一部《经济数学I微积分》. 内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数微积分学、微分方程与差分方程简介等九章内容. 每章配有习题和适当的提高选做题，书末给出其参考答案，便于对照自测学习.

本书可作为高等学校(民办、独立学院)经济管理类本科生学习教材，也可作为报考研究生学生的数学复习参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学Ⅰ微积分/李延敏，张继超，赵中建主编. —北京：科学出版社，2015.8

高等学校(独立学院)重点规划经济数学系列精品教材

ISBN 978-7-03-045556-7

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①李… ②张… ③赵… Ⅲ. ①经济数学-高等教育-教材 ②微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①F224.0 ②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 207608 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：钟 洋

责任印制：白 洋 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2016 年 9 月第二次印刷 印张：20 3/4

字数：418 000

定价：45.00 元

前　言

高等学校(独立学院)重点规划经济数学系列精品教材由《经济数学Ⅰ微积分》《经济数学Ⅱ线性代数》《经济数学Ⅲ概率论与数理统计》三部教材组成.经济数学是高等学校财经管理类专业的核心课程之一,是学习《计量经济学》《西方经济学》《统计学》《管理学》等大多数专业基础课以及专业课之前必修的重要基础课,也是几乎所有财经管理类专业考研的必考科目.

本书是吉林省精品课"经济数学"项目及吉林省教育厅"十二五"规划项目研究成果之一,是高等学校(独立学院)重点规划经济数学系列精品教材第一部《经济数学Ⅰ微积分》.

经济数学Ⅰ微积分是高等学校经济与管理专业的必修基础课.为适应高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革的总目标,培养具有创新能力的高素质人才,满足我国高等教育从精英教育转变为大众教育需要培养"实用性、应用型"人才的要求,我们在多年的微积分教学基础上,经过统一规划、集体研究编写了本书.

本书是依据教育部《经济管理类数学课程基本要求》及《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的精神编写的,兼顾学生的考研需要,补充一些新内容,删除一些过时不用的知识,在保持传统体系的基础上略作改变.本书既注重对基本概念、基本理论和基本方法的阐述,又力求融入一些增强思想性、趣味性和适用性的新内容,既考虑到民办独立高校经济类、管理类专业对数学知识的直接或间接需要,又考虑到高等数学对培养学生空间想象能力、抽象思维能力,逻辑推理能力的重要性,本书详细介绍微积分学的基本原理、基本方法、基本技巧.为了适应目前经济类、管理类微积分学教学的实际情况,本书的选材都是最基本的,例题尽量采用具有代表性的典型题目或结合专业背景的实际题目,以期达到举一反三的效果.本书在每章后面都安排了适量的基础题和有着较高难度的选做题,便于不同层次的学生自学、复习和巩固所学内容.其中带 * 的章节只作介绍,可不讲授.

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数微积分学、微分方程与差分方程简介、习题与选做题参考答案.

本书第1章、第4章由朱生编写;第2章、第3章由刘长亮编写;第5章由姜丽华编写;第6章由刘诗淼编写;第7章由张继超编写;第8章由彭轩、赵中建编写;第9章由李延敏、赵中建编写.全书的编写思想、结构安排、统稿定稿由李延敏承担.

本书出版得到科学出版社和长春财经学院(原吉林财经大学信息经济学院)及华北水力水电大学的大力支持,策划编辑张中兴为本书出版做了大量工作,在此一并向他们表示衷心感谢.

尽管我们为本书出版作了很大努力,但也难免有疏漏与不足之处,真诚欢迎读者、同行提出批评、指正.

编　者

2015 年 7 月

目　　录

第 1 章　函　　数

函数是微积分的研究对象,是微积分的重要基本概念之一,它是客观世界中各种变量之间相互依赖关系的一种数学表示形式. 本章中,将在中学已有知识的基础上,简要叙述函数的一般定义及其基本性质,给出基本初等函数的概念,并介绍经济学中一些常用的函数.

1.1　实数与集合

微积分研究的主要对象是定义在实数范围内的函数,为此本节先复习一下与实数相关的基本知识和理论,并给出实数集合的表示方法.

1.1.1　实数与实数的绝对值

1. 实数与实数轴上的点

一般地,**实数由有理数和无理数两部分组成.**

有理数包括零、正负整数、正负分数. 有理数可以写成 p/q 的形式(其中 p,q 为整数,且 $q \neq 0$),也可表示为整数、有限小数或无限循环小数,而无理数只能表示成无限不循环小数.

数轴是规定了**原点**、**正方向**与**单位长度**的直线,通常取水平直线的向右方向为正方向(图 1.1).

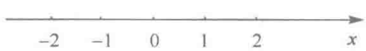

图 1.1

数轴上的每个点可以表示一个确定的实数;反之,每个实数可以看成数轴上一个确定的点. 因此,**实数与数轴上的点是一一对应的.** 为了简便起见,常用同一个字母或数字既表示某个实数又表示以此实数为坐标的数轴上的对应点. 比如,数 a 与点 a,数 $\sqrt{2}$ 与点$\sqrt{2}$,….

数轴上表示有理数的点称为**有理点**,表示无理数的点称为**无理点**. 数轴上任意两个不同的有理点之间一定存在无穷多个有理点,这种特性称为**有理数的稠密性**. 同样地,无理数也具有稠密性.

有理数经过有限次的四则运算(除数不为零),其结果仍为有理数;而无理数经过有限次的四则运算,其运算结果可能为无理数也可能为有理数.

2. 实数的绝对值

定义1 设 a 为一个实数,称

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0\end{cases}$$

为 a 的绝对值.

注意 (1) $|a|$ 为一个非负实数.

(2)设 a,b 为任意两个实数,则有

$$|a-b|=\begin{cases}a-b, & a\geqslant b,\\ b-a, & a<b.\end{cases}$$

(3)绝对值的几何意义是:$|a|$ 表示点 a 与原点 O 的距离;$|a-b|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离.

例1 求解不等式 $|x+2|\geqslant|x-2|$.

解 通过绝对值的几何意义可知,所求不等式表示 x 与点 -2 的距离大于等于 x 与点 2 的距离.因此,从数轴上分析(图 1.2),得不等式的解为

$$x\geqslant 0.$$

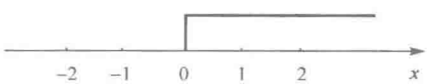

图 1.2

理解绝对值的几何意义,利用作图对解题会有很大帮助.另外还需要知道绝对值的基本性质.

绝对值的基本性质 (1) $|a|\geqslant 0$, $|a|=|-a|$, $|a|=\sqrt{a^2}$.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

(3) $|a|\leqslant k(k\geqslant 0)\Leftrightarrow -k\leqslant a\leqslant k$.

(4) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

证明 利用性质(2)可知

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,\quad -|b|\leqslant b\leqslant|b|,$$

于是

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant(|a|+|b|).$$

令 $k=|a|+|b|$,则由性质(3)有

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

一般地,由数学归纳法有

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

(5) $||a|-|b||\leqslant|a-b|$.

证明 由性质(4)有

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|,$$

即

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|.$$

类似地,有

$$|b|-|a|\leqslant|b-a|=|a-b|,$$

因此有

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|.$$

(6) $|ab|=|a|\cdot|b|$.

一般地,有

$$|a_1a_2\cdots a_n|=|a_1|\cdot|a_2|\cdots|a_n|.$$

(7) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|},b\neq 0$.

1.1.2 集合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念,例如,某班级的全体学生构成一个集合,全体实数构成一个集合等. 现在给出集合的一种描述性定义.

定义 2 一般地,称具有某种特定性质的对象总体为**集合**(简称集),组成这个集合的对象称为该集合的**元素**(简称元).

通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$表示集合,用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$表示集合的元素. 元素 a 在集合 A 中,称 a 属于 A,记为 $a\in A$,否则称 a 不属于 A,记作 $a\notin A$. 一个集合,若它只含有限个元素,则称为**有限集**;否则称为**无限集**.

集合的表示方法通常有以下两种:一种是列举法,就是将集合中的元素一一列举出来写在大括号内并用逗号隔开的表示方法,例如,由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A,可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

另一种是描述法,若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体组成的,则集合 M 就可以表示成

$$M=\{x\mid x\text{ 具有某种性质 P}\}.$$

元素为数的集合通常称为数集,常用 $\mathbf{N}$ 表示**自然数集**,

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\};$$

$\mathbf{Z}$ 表示**整数集**；$\mathbf{Z}^+$ 表示**正整数集**；$\mathbf{Q}$ 表示**有理数集**；$\mathbf{Q}^+$ 表示**正有理数集**；$\mathbf{R}$ 表示**实数集**；$\mathbf{R}^+$ 表示**正实数集**.

不含任何元素的集合称为**空集**，用 $\varnothing$ 来表示.

2. 集合的关系与运算

(1)**子集**：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，则 A 称为 B 的子集，也称 A 包含于 B，或 B 包含 A，记为 $A \subseteq B$.

例如，$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z}$.

规定空集是任何集合的子集. 任何一个集合是它本身的子集，即 $A \subseteq A$.

如果 A 是 B 的子集，B 也是 A 的子集，则称 A 与 B **相等**. 如果 A 是 B 的子集，而且 B 中存在元素不属于 A，则 A 称为 B 的**真子集**.

(2)**交集**：$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

(3)**并集**：$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

(4)**差集**：$A - B = \{x \mid x \in A, \text{且 } x \notin B\}$.

有时，把研究某一问题时所考虑对象的全体称为**全集**，并用 I 表示，把差集 $I - A$ 称为 A 的**余集**或**补集**，记作 A^c.

例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A = \{x \mid x \leqslant 1\}$，则 A 的补集 $A^c = \{x \mid x > 1\}$.

集合的交、并、余运算满足如下的运算律：

(1)**交换律**　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

(2)**结合律**　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；

(3)**分配律**　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

(4)**对偶律**　$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

1.1.3　实数集合的表示方法

通过集合，可以用区间来表示实数，其定义如下.

定义 3　设 $a, b \in \mathbf{R}$，且 $a < b$，定义：

(1)**闭区间**　$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

(2)**开区间**　$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$；

(3)**半开区间**　$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}, [a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$；

(4)**无穷区间**

$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\},$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\},$$

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\},$$
$$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty).$$

在今后问题的讨论中，常常需要考虑由某点 x_0 附近的所有点构成的集合. 为此，需要引入邻域的概念.

定义 4 设 δ 为某个正数，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 δ **邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$. x_0 为该邻域的**中心**，δ 为该邻域的**半径**，即

$$\begin{aligned}U(x_0,\delta)&=(x_0-\delta,x_0+\delta)\\&=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}\\&=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}.\end{aligned}$$

点 x_0 的邻域去掉中心 x_0 后的集合 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}$ 称为点 x_0 的**空心邻域**(**或去心邻域**)，记作 $\overset{o}{U}(x_0,\delta)$，即

$$\begin{aligned}\overset{o}{U}(x_0,\delta)&=(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}\\&=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0\text{ 或 }x_0<x<x_0+\delta\}\\&=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\},\end{aligned}$$

其中 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为点 x_0 的**左邻域**，$(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的**右邻域**.

1.2 函数的概念

1.2.1 常量与变量

人们在日常的生产生活中，经常会涉及一些“量”，例如，时间、温度、产量、销量、成本、收入、利润等. 通常将量分为常量与变量两类. 常量是指在某一过程中数值保持不变的量，一般用 $a,b,c,\cdots$；表示另一类是在某一过程中数值会发生变化的量，称为变量，用 x,y,z 或 P,Q,R 表示.

如果将变量看成是可以在一个非空数集内任意取值的量，则常量可看成是在单元素集合中取值的变量，因而常量可看成是变量的特例.

常量在数轴上表示为一个定点，变量在数轴上则表示为一个动点.

1.2.2 函数概念及其表示方法

在实际问题的研究中，往往会遇到的不是一个变量，而是多个变量，而且这些变量之间一般不是孤立地存在的，也就是说所涉及的几个变量之间常会具有某种相互依赖的变化关系，下面就用几个实例来说明变量间的这种相互依赖的变化关系.

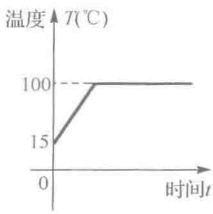

图 1.3

例 2　在一个标准大气压下，水在均匀加热的过程中，其温度 T 随时间 t 的变化情况，如图 1.3 所示.

图 1.3 的水温曲线，显示了温度 T 与时间 t 之间的依赖关系. 对于任意 $t\in[0,+\infty)$，按照图 1.3 中的对应规则，都可以唯一地确定对应的水温 T.

例 3　表 1.1 给出某地区楼盘在一年内的整体销售统计情况，将销售量 y（单位：套）和月份 t 的关系列表表示如下：

表 1.1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 y	4	5	7	8	8	10	12	16	18	20	15	7

显然，当 t 在月份集合任取一个值（如 $t=10$）时，均可按表 1.1 所示的对应规则（月份下方的数字为当月的销售量）唯一地确定一个销售量 y 的值（$y=20$）与之对应.

例 4　设某商店购进牛肉 500 千克，按每千克 50 元的价格出售，当售出的数量为 x 千克时，收入 R 可按公式

$$R=50x,\quad x\in[0,500]$$

算出唯一确定的数值.

通过以上的例子可以看出，虽然它们各自研究的对象不同，变量之间的表达形式也不同，但是它们的本质是相同的，即通过一定的“对应法则”（图、表、公式）可研究两个变量之间的依赖关系. 并且这种对应法则的特点是，当任取一个变量在某范围内的一个值时，通过这种对应法则，另一个变量都有唯一的值与之相对应. 那么将变量之间的这种相互依赖关系用一个对应法则表示的形式抽象概括起来就得到下面函数的概念.

1. 函数（显函数）

定义 5　设 D 为一个非空数集，如果按照某种对应法则 f，对于任意一个 $x\in D$，都存在唯一的实数 y 与之相对应，则称对应法则 f 为定义在数集 D 上的**函数**. 记作 $y=f(x)$，称 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

D 称为函数 f 的**定义域**，定义域 D 通常记为 $D(f)$，当 $D(f)$ 为区间时，称 $D(f)$ 为**定义区间**.

如果 $x_0\in D(f)$ 时，则称函数 f 在点 x_0 有定义，否则称 f 在点 x_0 无定义. 当函数 f 在 x_0 处有定义时，称因变量 y 的对应取值 y_0 为 x_0 所对应的**函数值**，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 因此，对应于任一自变量 $x\in D(f)$ 的函数值 y 可记为 $y=f(x)$.