100 Examples of Elementary Number Theory

HIT

数论经典著作系列

初等数论100例

柯召 孙琦 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数论经典著作系列

初等数论100例

100 Examples of Elementary Number Theory

柯召 孙琦 编著

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书选编了100个初等数论题目和它们的解答，并在后面列出了所需要的定义和定理。通过这些题目和解答，能增强解决数学问题的能力.

本书除了可以作为中学教师、中学生的读物外，也可供广大数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

初等数论100例/柯召，孙琦编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.4

ISBN 978-7-5603-3284-0

Ⅰ.①初… Ⅱ.①柯… ②孙… Ⅲ.①初等数论 Ⅳ.①O156.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第088666号

责任编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 李长波
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张5 字数84千字
版　　次 2011年5月第1版 2011年5月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3284-0
定　　价 18.00元

前　言

这里选编了100个初等数论题目和它们的解答. 这些题目的解法虽然用到的知识不多,但比较灵活,有一定的难度,通过这些题目和解答,能够增强我们解决数学问题的能力,并使读者了解一些初等数论的内容和方法. 初等数论的知识和技巧是我们学习近代数学时所需要的,特别是学习某些应用数学学科时所需要的,因此,这本小册子除了可以作为中学教师、中学数学小组的读物外,也可供广大数学爱好者阅读.

这些题目是我们从事数论教学中逐步积累的一部分,主要选自《美国数学月刊》杂志,以及安道什(P. Erdös)著《数论的若干问题》,夕尔宾斯基(W. Sierpiński)著《数论》等书籍. 其中也有我们自己的一些结果. 为了避免重复,国内容易找到的一些数论教科书和数学竞赛中的题目,我们基本上没有选入. 同时对其中某些还可进一步深入探讨的题目,我们在解答后面加了一些注释.

这100个题目中的绝大部分仅仅用到初等数论中的整除、同余等简单的内容,只有一小部分题目要用到二次剩余、元根等知识. 为方便读者,我们在后面列出了所需要的定义和定理. 至于这些定理的证明,读者可以在任何一本初等数论的书中找到.

限于作者水平,错误与不当之处,尚祈读者指正.

作　者

1979年3月于成都

目录

初等数论 100 例

第一章

1. 设 $m>0,n>0$,且 m 是奇数,则

$$(2^m-1,2^n+1)=1$$

证 设 $(2^m-1,2^n+1)=d$,于是可设

$$2^m=dk+1,\quad k>0 \tag{1}$$

和

$$2^n=dl-1,\quad l>0 \tag{2}$$

式(1)和式(2)分别自乘 n 次和 m 次得

$$2^{nm}=(dk+1)^n=td+1,\quad t>0 \tag{3}$$

和

$$2^{nm}=(dl-1)^m=ud-1,\quad u>0 \tag{4}$$

由(3)和(4)得

$$(u-t)d=2$$

故

$$d\mid 2$$

$d=1$ 或 2,而 2^m-1 和 2^n+1 都是奇数,因此 $d=1$.

2. 设 $(a,b)=1,m>0$,则数列

$$\{a+bk\},\quad k=0,1,2,\cdots$$

中存在无限多个数与 m 互素.

证 存在 m 的因数与 a 互素,例如1就是,用 c 表示 m 的因数中与 a 互素的所有数中的最大数,设 $(a+bc,m)=d$.

我们先证明 $d=1$. 由 $(a,b)=1,(a,c)=1$ 得

$$(a,bc)=1 \tag{1}$$

从而可证得

$$(d,a)=1,\quad (d,bc)=1 \tag{2}$$

因为如果(2)不成立,便有 $(d,a)>1$ 或 $(d,bc)>1$,于是 (d,a) 或 (d,bc) 有素因数,即存在一个素数 p 使 $p\mid(d,a)$ 或 $p\mid(d,bc)$. 而 $d\mid a+bc$,当 $p\mid(d,a)$ 时,由 $p\mid a,p\mid a+bc$,可得 $p\mid bc$,与(1)矛盾;同样,当 $p\mid(d,bc)$ 时,也将得出与(1)矛盾的结果. 因此,$(d,c)=1$.

另一方面,由 $d\mid m,c\mid m$(c 是 m 的因数)及 $(d,c)=1$,可得 $dc\mid m$,又从(2)的 $(d,a)=1$ 和 $(a,c)=1$,得出 $(a,cd)=1$,由于 c 是 m 的因数中与 a 互素的数中最大的数,所以 $d=1$(否则 $cd>c$),即 $(a+bc,m)=1$.

对于 $k=c+lm,l=0,1,\cdots$,有

$$(a+bk,m)=(a+bc+blm,m)=(a+bc,m)=1$$

这就证明了有无穷多个 k 使 $(a+bk,m)=1$.

3. 设 $m>0,n>0$,则和

$$S=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{m+n}$$

不是整数.

证 可设 $m+i=2^{\lambda_i}l_i,\lambda_i\geqslant 0,2\nmid l_i,i=0,1,\cdots,n$,由于 n 是正整数,所以 $m,m+1,\cdots,m+n$ 中至少有一个偶数. 即至少有一个 i 使 $\lambda_i>0$. 设 λ 是 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 中最大的数. 我们断言,不可能有 $k\neq j$ 而 $\lambda_k=\lambda_j=\lambda$. 如果不是这样,可设 $0\leqslant k<j\leqslant n,\lambda_k=\lambda_j=\lambda,m+k=2^{\lambda_k}l_k,m+j=2^{\lambda}l_j$,因为 $m+k<m+j$,所以 $l_k<l_j$. 这就导致有偶数 h 使 $l_k<h<l_j$. 故在 $m+k<m+j$ 之间有数 $2^{\lambda}h$,$2\mid h$. 即可设 $2^{\lambda}h=m+e=2^{\lambda_e}l_e>m+k=2^{\lambda}l_k$. 这时 $\lambda_e>\lambda$,与 λ 是最大有矛盾,这就证明了有唯一的一个 $k,0\leqslant k\leqslant n$,使 $m+k=2^{\lambda}l_k,2\nmid l_k$. 设

$$l=l_0\cdot l_1\cdot\cdots\cdot l_n$$

在 S 的两端乘以 $2^{\lambda-1}l$ 得

$$2^{\lambda-1}lS=\frac{N}{2}+M \tag{1}$$

其中 $\frac{N}{2}=2^{\lambda-1}l\frac{1}{m+k}=\frac{2^{\lambda-1}l}{2^{\lambda}l_k}$,故 N 是一个奇数. 其余各项都是整数,它们的和设为整数 M. 从(1)立刻知道 S 不是整数. 因为,如果 S 是整数,由(1)可得

$$2^\lambda lS - 2M = N \tag{2}$$

(2) 的左端是偶数,右端是奇数,这是不可能的.

4. 设 $m > n \geqslant 1, a_1 < a_2 < \cdots < a_s$ 是不超过 m 且与 n 互素的全部正整数,记

$$S_m^n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_s}$$

则 S_m^n 不是整数.

证 由于 $(1,n)=1$,所以 $a_1 = 1$. 又因已知 $m > n \geqslant 1$,且 $(n+1,n)=1$,故 $s \geqslant 2$. a_2 必是素数,因如果 a_2 是复合数,则有素数 $p, p \mid a_2$ 且 $1 < p < a_2$, $(p,n)=1$,这不可能. 设 a_2^k 是不超过 m 的 a_2 的最高幂,即 $a_2^k \leqslant m < a_2^{k+1}, k \geqslant 1$. 由 $(a_2^k, n) = 1$ 知,存在某个 $t, 2 \leqslant t \leqslant s$,使 $a_t = a_2^k$,如果 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 中另一个 a_j 被 a_2^k 整除,可设 $a_j = a_2^k c, t < j \leqslant s, m > c > 1$,而 $(c,n)=1$,故 $c \geqslant a_2$,这就得到 $a_j = a_2^k c \geqslant a_2^{k+1} > m$,与 $a_j \leqslant m$ 矛盾. 现设 $a_i = a_2^{\lambda_i} l_i, a_2 \nmid l_i, \lambda_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots, s, l = l_1 l_2 \cdots l_s$,乘 S_m^n 两端以 $a_2^{k-1} l$ 得

$$a_2^{k-1} l S_m^n = \frac{l}{a_2} + M \tag{1}$$

其中 $\frac{l}{a_2}$ 一项是由 $\frac{a_2^{k-1} l}{a_t} = \frac{a_2^{k-1} l}{a_2^k}$ 一项得来,其余各项都是整数,其和设为 M,由(1)知 S_m^n 不是整数,如果 S_m^n 是整数,由(1)得

$$a_2^k l S_m^n - a_2 M = l \tag{2}$$

(2) 的左端是 a_2 的倍数,与 $a_2 \nmid l$ 矛盾.

注 由此题可立即推得 $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2u-1} (u > 1)$ 不是整数,以及 $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{3u+1} + \frac{1}{3u+2} (u \geqslant 0)$ 不是整数.

5. 设 $1 \leqslant a \leqslant n$,则存在 $k (1 \leqslant k \leqslant a)$ 个正整数 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$,使得

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k} \tag{1}$$

证 设 x_1 是最小的正整数使得

$$\frac{1}{x_1} \leqslant \frac{a}{n}$$

如果 $\frac{a}{n} = \frac{1}{x_1}$,则(1)已求得;如果 $\frac{a}{n} \neq \frac{1}{x_1}$,则 $x_1 > 1$,令

$$\frac{a}{n}-\frac{1}{x_1}=\frac{ax_1-n}{nx_1}=\frac{a_1}{nx_1}$$

其中 $ax_1-n=a_1>0$,由于 x_1 的最小性,有$\frac{1}{x_1-1}>\frac{a}{n}$,故 $ax_1-n<a$ 即 $a_1<a$;再设 x_2 是最小的正整数使得

$$\frac{1}{x_2}\leqslant\frac{a_1}{nx_1}$$

如果$\frac{1}{x_2}=\frac{a_1}{nx_1}$,则(1)已求得;如果$\frac{a_1}{nx_1}\neq\frac{1}{x_2}$,则 $x_2>1$

$$\frac{a_1}{nx_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{a_1x_2-nx_1}{nx_1x_2}=\frac{a_2}{nx_1x_2}$$

其中 $a_1x_2-nx_1=a_2>0$,由于$\frac{1}{x_2-1}>\frac{a_1}{nx_1}$,故 $a_2<a_1<a$. 如此继续下去,可得 $a>a_1>a_2>\cdots>a_k=0$, 而 $1\leqslant k\leqslant a$, 且存在 k 个正整数 $x_1<x_2<\cdots<x_k$,使得(1)成立.

注 *当 $0<a<n,(a,n)=1,n$ 为奇数时,要求 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 全为奇数,(1)是否存在?*

6. 设 $(a,b)=1,a+b\neq0$,且 p 是一个奇素数,则

$$\left(a+b,\frac{a^p+b^p}{a+b}\right)=1\text{ 或 }p$$

证 设$\left(a+b,\frac{a^p+b^p}{a+b}\right)=d$,则 $a+b=dt,\frac{a^p+b^p}{a+b}=ds$,于是

$$d^2st=a^p+b^p=a^p+(dt-a)^p=$$
$$d^pt^p-pad^{p-1}t^{p-1}+\cdots+pdta^{p-1}$$

上式两端约去 dt,可得

$$ds=d^{p-1}t^{p-1}-pad^{p-2}t^{p-2}+\cdots+pa^{p-1} \tag{1}$$

由(1)可得

$$d\mid pa^{p-1} \tag{2}$$

我们可以证明 d,a 互素. 因为若设 $(d,a)=d_1$,如果 $d_1>1$,则 d_1 有素因数 q, $q\mid d_1,q\mid d,q\mid a$,而 $d\mid a+b$,故 $q\mid a+b$,推出 $q\mid b$,与 $(a,b)=1$ 矛盾,因此 $(d,a)=1$,从(2)推出 $d\mid p$,于是 $d=1$ 或 p,这就证明了我们的论断.

7. 证明

1)设 α 是有理数,b 是最小的正整数使得 $b\alpha$ 是一个整数,如 c 和 $c\alpha$ 是整数,则 $b\mid c$.

2) 设 p 是素数，$p\nmid a$，b 是最小的正整数使 $\frac{ba}{p}$ 是一个整数，则 $b=p$.

证 由带余除法

$$c=bq+r,\quad 0\leqslant r<b$$

故

$$r\alpha=(c-bq)\alpha=c\alpha-bq\alpha$$

是一个整数，如果 $r\neq 0$，与 b 的选择矛盾，故 $r=0$，即 $b\mid c$，这就证明了 1).

由于 $p\cdot\frac{a}{p}$ 也是一个整数，由结果 1) 知 $b\mid p$，故 $b=p$ 或 1，由于 $p\nmid a$，故 $\frac{a}{p}$ 不是整数，所以 $b\neq 1$，于是推得 $b=p$，这就证明了 2).

注 利用此题的结果可证整数的唯一分解定理.

8. 设 $a>0,b>0$，且 $a>b$，利用辗转相除法求 (a,b) 时所进行的除法次数为 k，b 在十进制中的位数是 l，则

$$k\leqslant 5l$$

证 考查斐波那契数列 $\{u_n\}$：

$$u_1=1,\quad u_2=1,\quad u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,\quad n=1,2,\cdots \tag{1}$$

首先证明数列(1) 的一个性质：

$$u_{n+5}>10u_n,\quad n\geqslant 2 \tag{2}$$

$n=2$ 时，$u_2=1,u_7=13$，故(2) 成立. 设 $n\geqslant 3$，

$$\begin{aligned}u_{n+5}&=u_{n+4}+u_{n+3}=2u_{n+3}+u_{n+2}=3u_{n+2}+2u_{n+1}=\\&5u_{n+1}+3u_n=8u_n+5u_{n-1}\end{aligned}$$

因为

$$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}\leqslant 2u_{n-1}$$

故

$$2u_n\leqslant 4u_{n-1}$$

这样

$$u_{n+5}=8u_n+5u_{n-1}>8u_n+4u_{n-1}\geqslant 10u_n$$

由(2) 可得

$$u_{n+5t}>10^t u_n,\quad n=2,3,\cdots;t=1,2,\cdots \tag{3}$$

现设 $a=n_0,b=n_1$，用辗转相除法得

$$\left.\begin{array}{ll}n_0=q_1n_1+n_2, & 0<n_2<n_1\\ n_1=q_2n_2+n_3, & 0<n_3<n_2\\ \vdots & \vdots\\ n_{k-2}=q_{k-1}n_{k-1}+n_k, & 0<n_k<n_{k-1}\\ n_{k-1}=q_kn_k & \end{array}\right\} \tag{4}$$

因为 $q_k \geqslant 2$，故由(4)得

$$n_{k-1} = q_k n_k \geqslant 2n_k \geqslant 2 = u_3$$
$$n_{k-2} \geqslant n_{k-1} + n_k \geqslant u_3 + u_2 = u_4$$
$$n_{k-3} \geqslant n_{k-2} + n_{k-1} \geqslant u_3 + u_4 = u_5$$
$$\vdots$$
$$n_1 \geqslant n_2 + n_3 \geqslant u_k + u_{k-1} = u_{k+1}$$

如果 $k > 5l$ 即 $k \geqslant 5l + 1$，则 $n_1 \geqslant u_{k+1} \geqslant u_{5l+2}$，由(3)得

$$n_1 \geqslant u_{5l+2} > 10^l u_2 = 10^l \tag{5}$$

因为 n_1 的位数是 l，故(5)不能成立，这就证明了 $k \leqslant 5l$.

注 存在正整数 a 和 b 使 $k = 5l$. 例如 $a = 144, b = 89$，有

$$144 = 89 + 55$$
$$89 = 55 + 34$$
$$55 = 34 + 21$$
$$34 = 21 + 13$$
$$21 = 13 + 8$$
$$13 = 8 + 5$$
$$8 = 5 + 3$$
$$5 = 3 + 2$$
$$3 = 2 + 1$$
$$2 = 2$$

以上作了 10 次除法，而 b 是两位数，故 $k = 5l$.

9. 设 p_s 表示全部由 1 组成的 s 位(十进制)数，如果 p_s 是一个素数，则 s 也是一个素数.

证 用反证法. 如果 $s = ab, 1 < a < s$，则

$$p_s = 1 + 10 + \cdots + 10^{s-1} = \frac{10^s - 1}{9} = \frac{10^{ab} - 1}{9}$$

因为 $10^a - 1 \mid 10^{ab} - 1$，故 $\frac{10^a - 1}{9} \left| \frac{10^{ab} - 1}{9} \right. = p_s$，而

$$1 < \frac{10^a - 1}{9} < p_s$$

这与 p_s 是素数矛盾.

注 这个结论反过来不真. 如 $p_3 = 111 = 3 \cdot 37, p_5 = 11\,111 = 41 \cdot 271$，等等. 但是，也存在 p_s 是素数，如 $p_2, p_{19}, p_{23}, p_{317}$ 都是素数，这是迄今所知道的这种素数的全部，而且 p_{317} 是在发现 p_{23} 几乎50年后，在1978年才用电子计算机算出来的. 猜测下一个这样的素数很可能是 $p_{1\,031}$，但该猜测尚未得到证明. 至于回答

是否有无穷多个p_s为素数的问题,是非常困难的. 在这里,我们还可以提出下面这样的问题. 我们看到83的数位上的数字之和$8+3=11$是一个素数,那么是否有无限多个素数,这些素数数位上的数字之和还是素数? 看来这也是一个非常困难的问题.

10. 设$n>1$,$m=2^{n-1}(2^n-1)$,证明:任何一个$k(1\leqslant k\leqslant m)$都可以表示成$m$的(部分或全部)不同因数的和.

证 当$1\leqslant k\leqslant 2^n-1$时,由于

$$a_0+a_1\cdot 2+\cdots+a_{n-1}\cdot 2^{n-1},\quad a_i=0\text{ 或 }1,\quad i=0,1,\cdots,n-1$$

正好给出了$0,1,2,\cdots,2^n-1$,所以此时k是2^{n-1}的不同因数$1,2,\cdots,2^{n-1}$的部分或全部的和.

再设$2^n-1<k\leqslant m$,有

$$k=(2^n-1)t+r,\quad 0\leqslant r<2^n-1,\quad t\leqslant 2^{n-1}\tag{1}$$

由于r和t都是$1,2,\cdots,2^{n-1}$中一些数的和,可设

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_u,\quad 1\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_u\leqslant 2^{n-1}$$

$$r=r_1+r_2+\cdots+r_v,\quad 1\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_v\leqslant 2^{n-1}$$

代入(1)得

$$k=(2^n-1)t_1+(2^n-1)t_2\cdots+(2^n-1)t_u+r_1+r_2+\cdots+r_v\tag{2}$$

$(2^n-1)t_j\mid m,j=1,2,\cdots,u$,因$n>1$,所以$(2^n-1)t_j\geqslant 2^n-1>2^{n-1}$,(2)表明$k$表成了$m$的部分或全部不同因数的和.

11. 设$k\geqslant 2$,且当$j=1,2,\cdots,[\sqrt[k]{n}]$时,都有$j\mid n$,则

$$n<p_{2k}^k\tag{1}$$

这里p_{2k}表示第$2k$个素数.

证 设$1,2,\cdots,[\sqrt[k]{n}]$的最小公倍数为m,则可设

$$m=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_l^{m_l}$$

其中$p_1,p_2,\cdots,p_l$是$1,2,\cdots,[\sqrt[k]{n}]$中出现的素数,则显然有

$$p_l\leqslant\sqrt[k]{n}<p_{l+1},\quad p_\lambda^{m_\lambda}\leqslant\sqrt[k]{n}<p_\lambda^{m_\lambda+1},\quad m_\lambda\geqslant 1,\quad \lambda=1,2,\cdots,l$$

由于n是$1,2,\cdots,[\sqrt[k]{n}]$这些数的一个公倍数,所以$m\leqslant n$. 而$\sqrt[k]{n}<p_\lambda^{m_\lambda+1}\leqslant p_\lambda^{2m_\lambda}$,$\lambda=1,2,\cdots,l$. 把这$l$个式子相乘,得

$$(\sqrt[k]{n})^l<m^2\leqslant n^2\tag{2}$$

观察式(2)中的指数得出$\dfrac{l}{k}<2$,即得$p_l<p_{2k}$,$p_{2k}\geqslant p_{l+1}$,故

$$\sqrt[k]{n}<p_{l+1}\leqslant p_{2k}$$

这就证明了式(1).

12. 设 $n>0, a\geqslant 2$,则 n^a 能够表示成 n 个连续的奇数的和.

证 如果 n 是偶数则

$$\begin{aligned}n^a = nn^{a-1} = &(n^{a-1}-n+1)+(n^{a-1}-n+3)+\cdots+\\&(n^{a-1}-3)+(n^{a-1}-1)+(n^{a-1}+n-1)+\\&(n^{a-1}+n-3)+\cdots+(n^{a-1}+3)+(n^{a-1}+1)\end{aligned}$$

右端是 n 个连续的奇数的和.

如果 n 是奇数,则

$$\begin{aligned}n^a = &n^{a-1}+(n^{a-1}+2)+(n^{a-1}+4)+\cdots+(n^{a-1}+n-1)+\\&(n^{a-1}-2)+(n^{a-1}-4)+\cdots+(n^{a-1}-n+1)\end{aligned}$$

右端仍是 n 个连续的奇数的和.

13. 证明不定方程

$$x^{2n+1}=2^r\pm 1 \tag{1}$$

在 $x>1$ 时,x,n,r 无正整数解.

证 如(1)有正整数解 x,n,r,由(1)可得

$$x^{2n+1}\pm 1=(x\pm 1)(x^{2n}\mp x^{2n-1}+\cdots\mp x+1)=2^r \tag{2}$$

在 $x>1$ 时,易证 $x^{2n}\mp x^{2n-1}+\cdots\mp x+1$ 大于1且为奇数,故存在奇因数 p,满足

$$p\mid x^{2n}\mp x^{2n-1}+\cdots\mp x+1$$

而(2)的右端为 2^r,于是(2)不能成立.

14. 证明不定方程

$$x^3+y^3+z^3=x+y+z=3 \tag{1}$$

仅有四组整数解 $(x,y,z)=(1,1,1),(-5,4,4),(4,-5,4),(4,4,-5)$.

证 (1)可写为

$$\begin{cases}x^3+y^3+z^3=3 & (2)\\ z=3-(x+y) & (3)\end{cases}$$

把(3)代入(2)可得

$$8-9x-9y+3x^2+6xy+3y^2-x^2y-xy^2=0$$

上式可因式分解为

$$8-3x(3-x)-3y(3-x)+xy(3-x)+y^2(3-x)=0$$

故对该方程的解 x 必有

$$3-x\mid 8$$

故 $3-x$ 只可能为 $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$,即 x 可能为 $-5,-1,1,2,4,5,7,11$,设

$x=-5$,代入(2) 和(3) 可得

$$y^3+z^3=128,\quad y+z=8 \tag{4}$$

由(4) 可解出(1) 的一组解$(-5,4,4)$,用同样的方法,设$x=-1,1,2,4,5,7,11$,可得(1) 的另三组解$(1,1,1)$,$(4,-5,4)$,$(4,4,-5)$.

15. 证明:对于 $\leqslant 2n$ 的任意 $n+1$ 个正整数中,至少有一个被另一个所整除.

证 设

$$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{n+1}\leqslant 2n$$

写

$$a_i=2^{\lambda_i}b_i,\quad \lambda_i\geqslant 0,\quad 2\nmid b_i,\quad i=1,2,\cdots,n+1$$

其中$b_i<2n$,因为在$1,2,\cdots,2n$中只有n个不同的奇数$1,3,\cdots,2n-1$,故在b_1,$b_2,\cdots,b_{n+1}$中至少有两个相同,设

$$b_i=b_j,\quad 1\leqslant i<j\leqslant n+1$$

于是在$a_i=2^{\lambda_i}b_i$和$a_j=2^{\lambda_j}b_j$中,由$a_i<a_j$知$\lambda_i<\lambda_j$,故

$$a_i\mid a_j$$

16. 设 n 个整数

$$1\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant 2n$$

中任意两个整数a_i,a_j的最小公倍数$[a_i,a_j]>2n$,则$a_1>\left[\frac{2n}{3}\right]$.

证 用反证法. 如果$a_1\leqslant\left[\frac{2n}{3}\right]\leqslant\frac{2n}{3}$,则$3a_1\leqslant 2n$. 由上题,在$\leqslant 2n$的$n+1$个数

$$2a_1,3a_1,a_2,\cdots,a_n$$

中,如果$2a_1,3a_1$不与$a_2,\cdots,a_n$中的任一个相等,则至少有一个数除尽另一个,由于$2a_1\nmid 3a_1$,$3a_1\nmid 2a_1$,故可设

$$2a_1\mid a_j,\quad 2\leqslant j\leqslant n \tag{1}$$

或

$$3a_1\mid a_j,\quad 2\leqslant j\leqslant n \tag{2}$$

或

$$a_j\mid 2a_1,\quad 2\leqslant j\leqslant n \tag{3}$$

或

$$a_j\mid 3a_1,\quad 2\leqslant j\leqslant n \tag{4}$$

或

$$a_i \mid a_j, \quad 2 \leqslant i < j \leqslant n \tag{5}$$

若 $2a_1$ 或 $3a_1$ 和某一 a_j 相等,则可归为(1)或(2).

由(1)得 $[a_1,a_j] \leqslant [2a_1,a_j] = a_j \leqslant 2n$,由(2)得 $[a_1,a_j] \leqslant [3a_1,a_j] = a_j \leqslant 2n$,由(3)得 $[a_1,a_j] \leqslant [2a_1,a_j] = 2a_1 \leqslant 2n$,由(4)得 $[a_1,a_j] \leqslant [3a_1,a_j] = 3a_1 \leqslant 2n$,由(5)得 $[a_i,a_j] = a_j \leqslant 2n$,都与 $[a_i,a_j] > 2n$ 矛盾,故 $a_1 > \left[\frac{2n}{3}\right]$.

17. 设 k 个整数

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n$$

中,任意两个数 a_i, a_j 的最小公倍数 $[a_i,a_j] > n$,则

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < \frac{3}{2}$$

证　首先证明

$$k \leqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] \tag{1}$$

如果(1)不成立,则 $k > \left[\frac{n+1}{2}\right]$,在 $n = 2t$ 时,$k > \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{2t+1}{2}\right] = t$,用15题的结果知,存在某一对 i,j,$1 \leqslant i < j \leqslant k$,有 $a_i \mid a_j$,而 $[a_i,a_j] = a_j \leqslant n$,与题设 $[a_i,a_j] > n$ 不合. 如果 $n = 2t+1$ 时,$k > \left[\frac{n+1}{2}\right] = \left[\frac{2t+2}{2}\right] = t+1$,因为 $1, 2, \cdots, n = 2t+1$ 中只有 $t+1$ 个奇数,因而其中的 k 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 中仍有某一对 i,j,$1 \leqslant i < j \leqslant k$,使得 $a_i \mid a_j$,这就证明了式(1)成立.

另一方面,在下列全部数中:

$$\left.\begin{aligned} & ba_1, \left(b = 1, 2, \cdots, \left[\frac{n}{a_1}\right]\right) \\ & ba_2, \left(b = 1, 2, \cdots, \left[\frac{n}{a_2}\right]\right) \\ & \vdots \\ & ba_k, \left(b = 1, 2, \cdots, \left[\frac{n}{a_k}\right]\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

没有两个相等. 因为如果(2)中的数有两个是相等的,可设

$$b'a_i = b''a_i, \quad 1 \leqslant b' < b'' \leqslant \left[\frac{n}{a_i}\right], \quad 1 \leqslant i \leqslant k \tag{3}$$

或

$$b'a_i = b''a_j, \quad 1 \leqslant b' \leqslant \left[\frac{n}{a_i}\right], \quad 1 \leqslant b'' \leqslant \left[\frac{n}{a_j}\right], \quad 1 \leqslant i < j \leqslant k \tag{4}$$

显然式(3) 不可能成立. 由(4) 得

$$[a_i,a_j] \leqslant [a_i,b''a_j] = [a_i,b'a_i] = b'a_i \leqslant n$$

与题设不合,故式(4) 也不能成立.

易知 $a_1 \neq 1$,否则 $[a_1,a_2] = [1,a_2] = a_2 \leqslant n$,与题设不合,因此(2) 中的数都不是1,而(2) 中每个数 $\leqslant n$,且无两个相等,所以(2) 中总共有 $\leqslant n-1$ 个数,即得

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right] \leqslant n-1$$

于是

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i} - k < \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n}{a_i}\right] \leqslant n-1$$

即

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i} < n-1+k$$

再由(1) 得

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i} < n-1+k \leqslant n-1+\left[\frac{n+1}{2}\right] \leqslant n-1+\frac{n+1}{2} = \frac{3n-1}{2} < \frac{3n}{2}$$

故

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i} < \frac{3}{2}$$

18. 设 $k > \left[\frac{n+1}{2}\right]$,则在 k 个整数 $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n$ 中存在 a_i, a_j, $1 \leqslant i < j \leqslant k$ 满足关系式

$$a_i + a_1 = a_j$$

证 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 k 个不同的正整数,$a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_k-a_1$ 是 $k-1$ 个不同的正整数. 由于 $k \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right]+1 > \frac{n+1}{2}$,所以 $2k-1>n$,而 $2k-1$ 个数 $a_1,\cdots,a_k,a_2-a_1,\cdots,a_k-a_1$ 都不超过 n,所以存在 $1 \leqslant i < j \leqslant k$ 使得 $a_j - a_1 = a_i$,即 $a_j = a_1 + a_i$.

19. 任给 8 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 满足 $a_1 < a_2 < \cdots < a_8 \leqslant 16$,则存在一个整数 k,使得 $a_i - a_j = k$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 8$,至少有三组解.

证 设

$$a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \cdots, a_8 - a_7 \tag{1}$$

中每个都 $\geqslant 1$,但没有三个相等,则其中至多只有两个数相等,那么

$$a_8 - a_1 = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \cdots + a_8 - a_7 \geqslant$$
$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16$$

但是,由于 $a_1 < a_2 < \cdots < a_8 \leqslant 16$,故 $a_8 - a_1 \leqslant 15$,这是矛盾的. 于是(1) 中至少有 3 个数相等.

注 存在 8 个数,例如 1,2,3,4,7,9,12,16,对于任意的整数 k, $a_i - a_j = k$ 至多只有三组解.

20. 设 k 个整数

$$1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n$$

中,没有一个数能整除其余各数的乘积,则

$$k \leqslant \pi(n)$$

其中 $\pi(n)$ 表示不超过 n 的素数的个数.

证 题设对每一 $i(1 \leqslant i \leqslant k)$ 有

$$a_i \nmid \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ i \neq j}} a_j$$

对每一 a_i 来说至少有一个素数 $p_i \mid a_i$ 使得 $p_i^{\alpha_i} \parallel a_i$, $p_i^{\beta_i} \parallel \prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ i \neq j}} a_j$ 而且 $\alpha_i > \beta_i \geqslant 0$.

现在来证明这些 p_i 互不相等,即

$$p_i \neq p_j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant k \tag{1}$$

如果(1) 不成立,则其中至少有两个素数相同,譬如说 $p_1 = p_2$,在 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2$ 时有 $\beta_2 \geqslant \alpha_1$(否则与 $p_2^{\beta_2} \parallel \prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ j \neq 2}} a_j$ 矛盾),故有 $\beta_2 \geqslant \alpha_1 \geqslant \alpha_2$;在 $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$ 时同样有 $\beta_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_1$,都与所设 $\alpha_1 > \beta_1$, $\alpha_2 > \beta_2$ 不合,这就证明了(1) 中的 k 个素数没有两个相同,而 $p_i \leqslant n$, $i = 1, 2, \cdots, k$,故 $k \leqslant \pi(n)$.

21. 设 n 个整数

$$1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2n$$

其中没有一个数能被另一个数整除,则

$$a_1 \geqslant 2^k$$

这里 k 满足 $3^k < 2n < 3^{k+1}$.

证 如果写

$$a_i = 2^{b_i} c_i, \quad 2 \nmid c_i, \quad b_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

则(1) 中的 $c_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 不能有两个相同,否则将有 $a_i \mid a_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$,