

郑 廉 刘朝奎 编著

初中数学

150问

华 文 出 版 社

初中数学 150 问

编 著 郑 廉 刘朝奎

华 文 出 版 社

(京) 新登字 064 号

责任编辑: 王文祥 邓小飞

封面设计: 王毅 曹宏志

版式设计: 曹宏志

初中数学 150 问

郑廉 刘朝奎 编著

华文出版社出版

(北京西城区府右街 135 号)

新华书店总店北京发行所发行

兵器工业出版社印刷厂排版印刷

开本 787×960 1/32 印张 15.75 字数 280 千字

1993 年 5 月第 1 版 1993 年 5 月第 1 次印刷

印数: 1-5 000 册

ISBN7-5075-0251-1/G·12 定价: 11.80 元

中学百问丛书

主 编 杨惠娟

副主编 程 迟

张东之

郑致远

前 言

根据国家教委 1990 年制定的《全日制中学数学教学大纲》和现行初中数学教材，结合多年教学实践，从学生的实际出发，编写了这本《初中数学 150 问》（其中代数 60 问，三角 10 问，几何 60 问，方法与能力 20 问）。

本书按照教材的知识系统与知识结构，针对在初中数学学习过程中容易产生的疑难问题，进行扼要深入的解析，力求揭示问题的本质、关键和规律，以帮助学生正确理解知识的重点与难点，掌握数学方法，提高运算能力和逻辑推理能力。另外，为使学生更深刻、更系统地学好初中数学知识，指导学习方法，搞好初、高中衔接，本书既有知识的扩充，也有方法的总结，既有能力的培养，也有思维的训练，并初步渗透了一些数学思想方法，希望学生阅读后有所收益。

本书由刘朝奎、李松文、李广麟、刘治平、郑廉等同志编写，郑廉统稿。在编写过程中得到杨惠娟同志的指导和帮助，在此表示谢意。限于编者水平，有错误与不当之处敬请批评指正。

编 者

目 录

第一部分 代 数

1. 为什么说：“数学是我国人民擅长的科学”？
..... (1)
2. 怎样学好数学？ (4)
3. 什么叫有理数，它有哪些重要性质？
..... (7)
4. 为什么要掌握好数轴的概念？ (11)
5. 什么是实数的绝对值，它有哪些重要性质？ (14)
6. 什么是非负数，它有哪些应用？ ... (16)
7. 什么是无理数，两个无理数的和、差、积、商还是无理数吗？ (19)
8. 如果 $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ (其中 a 、 b 、 c 、 d 是有理数)，则 $a=c$ ， $b=d$ 。对吗？
..... (21)
9. 比较实数的大小常用哪些方法？ ... (23)
10. 什么叫集合？ (26)
11. 什么叫做两个集合的交集及并集？
..... (28)
12. 怎样求代数式的值？ (32)
13. 怎样表示偶数与奇数？ (35)

14. 怎样掌握好乘法公式? (37)
15. 怎样用拆、添项法分解因式? (39)
16. 怎样灵活应用“十字相乘法”分解因式?
..... (41)
17. 因式分解有哪些应用? (44)
18. $a^n \pm b^n$ 能被 $a \pm b$ 整除吗? (48)
19. 什么是多项式的恒等定理? (49)
20. 恒等变形常用哪些技巧? (50)
21. 什么是分离系数法? (54)
22. 什么是综合除法? (56)
23. 什么是余式定理? (60)
24. 什么是对称式、轮换对称式? (63)
25. 如何理解和运用算术根的概念? ... (65)
26. 怎样有理化分母? (69)
27. 如何化简“双重根号”式子 $\sqrt{a - \sqrt{b}}$?
..... (72)
28. 在什么情况下要有理化分子? (74)
29. 引进分数指数概念的意义是什么?
..... (76)
30. 根式性质 $\sqrt[a^m]{a^m} = \sqrt[a^{mp}]{a^{mp}}$ 在什么条件下成
立? (78)
31. 如何把一个真分式化为部分分式之和?
..... (79)
32. 方程与恒等式有什么区别? (83)
33. 方程的同解变形有哪些定理? (85)
34. 对方程进行变形时, 为什么会产生增根或
失根? (87)

35. 一元二次方程根的判别式有哪些应用?
..... (90)
36. 一元二次方程根与系数的关系有哪些应用?
..... (95)
37. 怎样列方程(组)解应用题? (104)
38. 怎样讨论二元一次方程解的情况?
..... (109)
39. 怎样用图象法解二元一次方程组?
..... (113)
40. 解第二类二元二次方程组常用哪些方法?
..... (117)
41. 怎样确定方程无解? (122)
42. 利用合分比定理解方程为什么会产生增根或失根?
..... (125)
43. 解字母系数的方程要注意什么? ... (127)
44. 应掌握不等式哪些概念? (131)
45. 怎样解一次不等式(组)? (133)
46. 怎样解含有绝对值符号的方程? ... (138)
47. 为什么要弄清直角坐标系的概念, 应熟练掌握坐标的哪些特点? (141)
48. 为什么说变量与常量这两个概念是相对的?
..... (144)
49. 怎样正确理解函数的概念? (145)
50. 怎样确定函数中自变量的取值范围?
..... (148)
51. 在函数记号 $f(x)$ 中, f 代表什么?
..... (151)

52. 怎样建立函数的解析式? (153)
53. 确定一次函数的解析式要注意什么?
..... (156)
54. 如何确定二次函数的解析式? (161)
55. 怎样解一元二次不等式? (165)
56. 为什么要重视利用三个“二次”之间的关系
解题? (168)
57. 函数的极值和最值的意义一样吗?
..... (172)
58. 怎样求二次函数的最值? (175)
59. 什么叫区间, 怎样求二次函数在闭区间上
的最值? (178)
60. 二次函数的最值如何在实际中应用?
..... (182)

第二部分 三 角

61. 如何深入理解三角函数的概念? ... (189)
62. 三角函数之间有哪些基本关系? ... (193)
63. 怎样解直角三角形? (197)
64. 怎样用余弦定理判断三角形解的个数?
..... (202)
65. 解斜三角形为什么要重视转化思想?
..... (204)
66. 为什么要掌握用方程的思想解斜三角形?
..... (209)
67. 什么是余弦定理“联络表”? (212)
68. 计算三角形的面积有哪些公式? ... (215)

69. 怎样用正弦、余弦定理判断三角形的形状? (222)
70. 解三角形在实际中有哪些应用? ... (225)

第三部分 几 何

71. 什么是平面几何学? (232)
72. 什么是几何原本? (233)
73. 现行初中平面几何教材有哪些公理?
..... (234)
74. 什么叫做命题? (235)
75. 命题的四种形式是什么? (236)
76. 为什么原命题与逆否命题等价? ... (238)
77. 什么是概念? (238)
78. 怎样下定义? (239)
79. 怎样进行推理? (241)
80. 怎样进行证明? (242)
81. 什么是直接证法和间接证法? (243)
82. 什么是反证法? (244)
83. 什么是同一法? (248)
84. 什么是不可公度线段? (252)
85. 怎样辨认三线八角? (253)
86. 怎样证明三角形内角和定理? (254)
87. 平行线、角平分线、等腰三角形有联系
吗? (258)
88. 什么叫简单多边形? (262)
89. 什么叫多角星形? (264)
90. 什么是三角形的主要线段? (267)

91. 什么叫三角形的五心? (271)
92. 怎样用三角形的“心”证题? (273)
93. 什么是广勾股定理? (277)
94. 怎样解关于比例的题目? (278)
95. 相似三角形是怎样演变的? (280)
96. 和圆有关的角的系统是什么? (283)
97. 怎样用比较法掌握接与切? (285)
98. 怎样证切线问题? (286)
99. 怎样证切圆问题? (289)
100. 怎样解阴影图形问题? (292)
101. 什么是尺规作图法? (300)
102. 解作图题的步骤是什么? (301)
103. 什么叫作图公法? (304)
104. 有哪些基本作图题? (304)
105. 怎样用三角形奠基法作图? (306)
106. 怎样用轨法作图? (309)
107. 怎样用代数法作图? (312)
108. 什么是尺规作图不能问题? (314)
109. 怎样证平行? (315)
110. 怎样证明垂直? (319)
111. 怎样证明角相等? (324)
112. 怎样证明线段相等? (328)
113. 怎样证明线段和差? (332)
114. 怎样证明线段倍分? (335)
115. 怎样证明线段不等? (338)
116. 怎样证明线段成比例? (342)
117. 比例线段有哪些应用? (353)

118. 怎样解定值问题?	(358)
119. 怎样解极值问题?	(362)
120. 什么叫几何变换?	(366)
121. 怎样用平移变换解题?	(368)
122. 怎样用旋转变换解题?	(372)
123. 怎样用中心对称解题?	(375)
124. 怎样用轴对称解题?	(379)
125. 什么叫等积变换?	(384)
126. 怎样构造全等三角形?	(386)
127. 怎样证三点共线?	(389)
128. 怎样证三线共点?	(393)
129. 怎样证四点共圆?	(397)
130. 四点共圆有什么用途?	(400)

第四部分 方法与能力

131. 怎样提高运算能力?	(405)
132. 怎样解选择题?	(408)
133. “主元法”在代数中有哪些应用?	(414)
134. 学习函数为什么要注意数形结合?	(418)
135. 什么叫从定义出发?	(424)
136. 什么是待定系数法?	(427)
137. 为什么在解题时经常使用换元法?	(430)
138. 为什么说配方法是一个重要的数学方 法?	(434)

139. 怎样用分析法解题? (438)
140. 怎样用综合法解题? (441)
141. 为什么要注意题目的双解或者多解的情况? (445)
142. 什么是题目的隐含条件? (450)
143. 怎样用构造法解题? (454)
144. 怎样用面积法解题? (458)
145. 怎样用方程的思想解题? (464)
146. 怎样用分类讨论的思想解题? ... (468)
147. 怎样理解“或”与“且”? (472)
148. 为什么要重视用逆向思维方法解题?
..... (476)
149. 什么是思维定势的负迁移? (481)
150. 怎样使问题简单化? (484)

第一部分 代 数

1. 为什么说：“数学是我国人民擅长的科学”？

我国是世界上伟大的文明古国，我国人民是智慧和勤劳的人民。我国古代不但有“四大发明”，在数学方面也有辉煌的成就，著名数学家华罗庚教授曾说：“数学是我国人民擅长的科学”。并列举了我国古代的几项数学成就。

勾股定理

这是一个几何定理，就是“在直角三角形中，两条直角边的平方和等于斜边的平方”。早在公元前十一世纪，在我国最古老的数学书《周髀算经》中，就有周朝商高发

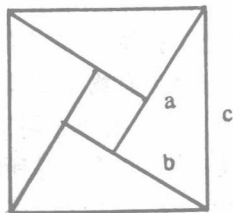


图 1-1

现“勾三、股四、弦五”（即 $3^2+4^2=5^2$ ）的记载，所以勾股定理又称商高定理。这要比希腊毕达哥拉斯发现勾股数组早大约六百年。

在三国时代数学家赵爽巧妙地证明了“勾股定理”，他给出的图形，如图 1-1 所示，从图中易

知:

$$c^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + (a-b)^2, \text{ 化简得}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

圆周率

汉朝刘徽（约在公元前 263 年）用割圆术，算出圆周率的近似值是 3.1416；

南北朝科学科祖冲之（429—500 年）证明圆周率在 3.1415926 与 3.1415927 之间，并且用 $\frac{22}{7}$ 及 $\frac{355}{113}$ 作为疏率及密率，比德国人奥托早一千多年（奥托在 1573 才达到上述精度）。

中国剩余定理

又称“隔墙算”、“韩信点兵”，问题源于汉代《孙子算经》，原文如下：

“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？”书中还给出了算法：用 70 乘 3 除所得的余数，21 乘 5 除所得的余数，15 乘 7 除所得的余数，然后总加起来，如果它大于 105，则减 105，再大还减，…最后得出来的（最小）正整数就是答数，即

$$2 \times 70 + 3 \times 21 + 2 \times 15 = 233$$

两去减去 105，得 23，这就是答数了！

这种方法，宋代数学家秦九韶在《数书九章》（1247 年）从理论上给予总结，这种解“一次同余

式组”的方法，被欧美学者称为“中国剩余定理”。这个问题的解法的原则在近代数学史上占有重要的地位，在电子计算的设计中也有重要的应用，而且较欧洲大师欧拉（1707—1783年），高斯（1777—1855）早约五百年。

杨辉三角形

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 \\
 & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
 \end{array}$$

.....

这种三角形的表构造法则是：两腰都是1，其中每数为其两肩二数之和。它表示二项式 $a+b$ 乘方，所得结果的各项依次排列的系数。

例如， $(a+b)^0 = 1$, $(a+b \neq 0)$;

$(a+b)^1 = a+b$, 两项系数为1、1;

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, 三项系数依次是1、2、1;

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, 它的四项系数依次是1、3、3、1、根据这个表，我们就可以知道

$$\begin{aligned}
 (a+b)^7 = & a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3 \\
 & +35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7
 \end{aligned}$$

这一法则，是宋代数学家杨辉在1261年提出的，故称上面的表为“杨辉三角形”。在欧洲则叫做

“巴期卡三角形”（1654年）我国的杨辉较巴氏早发现大约四百年。

秦九韶的方程论

秦九韶（1247年）对高次方程的数值解法，给出了统一、完整的算法程序，至今仍常被使用。较欧洲霍纳（1819年）达到相近水平，早五百多年。

以上仅举几例，不免挂一漏万；古代数学家取得的丰硕成果，刻苦的治学精神，激励我们努力学好数学。

至今，我国古代数学成仍受到国际科学界的重视。现在我国杰出的数学家正在使中国传统数学在世界“再领风骚”，中国传统数学将再次以它优异的成绩使世界震惊，希望寄托在青少年身上！

2. 怎样学好数学？

中学数学研究的对象是现实世界中的空间形式和数量关系，它的基本特点是高度的抽象，严密的逻辑性，以及应用的广泛性。数学是用各种符号表达的语言，具有从图形、结构、逻辑等方面特殊的美感。为了了解现代世界，为了将来在工作岗位上发挥更大的作用，学生必须掌握一定的数学知识。中学生必须打好德育、智育、体育、美育各方面的坚实基础，而学好数学正是打好基础的重要方面之一，初中数学内容包括：代数、平面几何，以及三角的初步知识。怎样才能学好数学呢？

第一、要扎扎实实地掌握好基础知识。基本概