中央民族大学“211工程”三期建设项目
ZHONGYANG MINZU DAXUE 211GONGCHENG SANQI JIANSHE XIANGMU

常微分方程基础教程

蔡果兰　贾旭杰／编著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

中央民族大学“211工程”三期建设项目
ZHONGYANG MINZU DAXUE 211GONGCHENG SANQI JIANSHE XIANGMU

常微分方程基础教程

Chang Weifen Fangcheng Jichu Jiaocheng

蔡果兰　贾旭杰／编著

中央民族大学出版社
China Minzu University Press

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程基础教程/蔡果兰，贾旭杰编著. —北京：中央民族大学出版社，2011.3

ISBN 978-7-81108-960-8

Ⅰ.①常… Ⅱ.①蔡… ②贾… Ⅲ.①常微分方程-高等学校—教材 Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 025200 号

常微分方程基础教程

编 著 者	蔡果兰　贾旭杰
责任编辑	张林刚
封面设计	布拉格
出 版 者	中央民族大学出版社
	北京市海淀区中关村南大街 27 号　邮编:100081
	电话:68472815(发行部)　传真:68932751(发行部)
	68932218(总编室)　68932447(办公室)
发 行 者	全国各地新华书店
印 刷 者	北京华正印刷有限公司
开　　本	880×1230(毫米)　1/16　印张:8.625
字　　数	150 千字
版　　次	2011 年 3 月第 1 版　2011 年 3 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81108-960-8
定　　价	21.00 元

内 容 提 要

本书是为民族院校与工科类院校的信息与计算科学专业、统计学专业编写的常微分方程教材，主要内容为一阶微分方程的初等解法、基本理论；高级微分方程、微分方程组的基本理论及解法。作者根据教学实践，对微分方程的内容体系作了精心的构架与调整，利用问题的源、阅读空间等方法分散了难点，强调了提出问题、分析问题、解决问题的思维能力训练。全书内容平实自然、通俗易懂、有用有趣。

前　言

常微分方程是伴随着微积分的产生和发展而成长起来的一门历史悠久的学科，是研究自然科学和社会科学中事物、现象的运动、演化规律的数学理论和方法。物理、化学、生物、工程、航空航天、医学、经济和金融等领域的许多原理均以常微分方程形式描述。如，牛顿的运动定律、万有引力定律、机械能守恒定律，能量守恒定律、人口发展规律、生态种群竞争、疾病传染、遗传基因变异、股票的涨幅趋势、利率的浮动、市场均衡价格的变化等。这些规律的描述、认识、分析、预测均归结为相应常微分方程数学模型的研究。因此，常微分方程的理论和方法不仅广泛应用于自然科学，而且越来越多的应用于社会科学的各个领域。

常微分方程是数学与应用数学专业、信息与计算科学专业、统计学专业本科生重要的专业基础课之一，也是应用性很强的一门课程。从数学知识的角度，常微分方程分为经典和现代两部分，经典部分：以数学分析、高等代数为工具，以求解微分方程为主要目的；现代部分：主要是用泛函分析、拓扑学等知识来研究解的性质。这里的《常微分方程基础教程》是指经典部分，是本科阶段的专业基础课。常微分方程课程内容对先修课程（数学分析与高等代数等）及后继课程（微分方程数值解法、偏微分方程、微分几何、泛函分析等）起到承前启后的作用，是数学理论中不可或缺的一个环节，也是学生学习本学科近代知识的基础，对培养学生分析问题和解决问题的能力有重要作用。

此次编著常微分方程基础教程侧重以问题的起源来叙述常微分方程的基本理论和方法，强调提出问题、分析问题、解决问题的思维脉路，力求理论准确清晰、通俗易懂。本书由 5 章组成：第 1 章为绪论、第 2 章讲述一阶微分方程的初等解法；第 3 章介绍解的存在唯一性定理；第 4 章介绍高阶微分方程理论及解法；第 5 章介绍微分方程组的理论及解法。

本教程的主要特点为：

（1）联系实际、通俗易懂

本教程论述简洁、脉络清晰、语言流畅，无论在思路剖析、逻辑推理还是文字表达上，都力求通俗易懂。教程内容紧密联系应用背景，介绍了常微分方程的相关理论及其解法，如概念的背景资料、抽象定理的形象解释、证明思维的脉络呈现等。

（2）注重思维、培养能力

本教材侧重于培养学生提出问题、分析问题和解决问题的能力，同时使学生认识到数学来源于实践，又应用于实践，增强学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

（3）注重趣味、拓宽视野

本教程在抽象知识的引入部分增加了学生熟悉的生活实例，从实例出发讲授知识，使趣味性与知识性相融合。同时在重要章节增加阅读空间、人物传记，以期来拓宽学生视野。从数学家的思想与精神中得到激励与启发。

在编写这些内容时，我们对自己提出两条要求：一是通俗；二是思维。阅读空间、人物传记不作为教学基本要求，不需在课堂讲授，属于学生自主探求空间。

本书可做为民族院校与工科类院校的信息与计算科学专业、统计学专业本科生，以及其他相关专业学生的参考教材，对于广大从事工程学或自然科学的读者，本书也不失为一本很好的参考书或自学入门教材。

本书的出版得到了中央民族大学“211 工程”三期项目中国少数民族经济发展研究子项目（项目号：021211030312）的资助，在此深表感谢。

鉴于我们的水平有限，书中错漏和疏忽在所难免，敬请同仁及广大读者惠予指正。

蔡果兰　贾旭杰

2010 年 12 月 12 日

目　　录

第一章 绪 论

§1.1 引 言

常微分方程是由人类生产实践的需要而产生的. 历史上，它的雏形的出现甚至比微积分的发明还早. 纳泊尔(John Napier)发明对数、伽利略(G. Galileo)研究自由落体运动、笛卡尔(Descartes)在光学问题中的切线性质定出镜面的形状等，实际上都需要建立和求解微分方程.

三百多年前，当牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)奠定微积分基本思想的同时，他们也就正式提出了微分方程的概念. 常微分方程作为Newton力学的得力助手，在天体力学和其它机械力学领域内显示了巨大的功能. 在海王星被实际观测到之前，这颗行星的存在就被天文学家用微分方程的方法推算出来了.

时至今日，常微分方程在自然科学以及社会科学中越来越表现出它的重要性. 例如下述两个问题：

1. 原函数问题 已知 $f(x) \in C[a,b]$，求它的原函数?

解：即求函数 $y = y(x)$ 使得 $y'(x) = f(x)$ 由数学分析知识知 $y(x) = \int f(x)dx$.

2. 几何问题 在 xoy 平面上求解有下列性质的曲线：它上面任意一点 $P(x,y)$ 的切线均与过坐标原点 O 及该点 P 的直线垂直.

解：设所求的曲线方程为 $y = y(x)$，由导数的几何意义知过点 $P(x,y)$ 的曲线的切线的斜率为 $\frac{dy}{dx}$，又直线 OP 的斜率为 $\frac{y}{x}$. 因切线与直线 OP 垂直，所以它们的斜率成负倒数，即有 $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{y}{x} = -1$ 整理得 $ydy + xdx = 0$，即 $d(x^2 + y^2) = 0$，从而所求的曲线为

$$x^2 + y^2 = c,$$

其中 c 为大于零的任意常数.

微分方程的理论和方法从 17 世纪末开始发展以来，很快成了研究自然现象的强有力的工具. 早在 17—18 世纪，力学、天文、物理等技术科学就借助微分方程取得了巨大的成就: 质点动力学和刚体动力学的问题很容易转化为微分方程的求解问题. 到 18 世纪末，常微分方程已发展成为一个重要的数学分支，成为当时工程技术、物理、力学等学科的基本工具之一.

学习常微分方程的一般方法:

A. 打好基础. 本课程不是无源之水、无本之木，它需要相当程度的分析、代数、几何、物理知识作为基础. 重要的是在学习过程中，对基本概念必须做到理解清晰、准确，对基本方法必须掌握其实质，应用娴熟.

B. 抓住典型，善于比较. 方程有不同类型，解法有不同特点，应当善于区分不同情况和择优处之. 学习过程中，须动手锻炼一题多解的方法，比较它们的优缺点和适应性，从中总结经验.

C. 善于多方面总结提高. 总结各种解法的本质，处理各类方程及相互之间的内在联系. 做到知己知彼，通过一定数量习题的实践，难点也就不难了.

D. 加强解题思维的训练. 解题是学习阶段的重要实践手段，只有通过练习才能熟练掌握各种方法. 做题要细致、叙述要准确，养成严谨的好习惯.

E. 要重视理论的来源及其解决的思维方法，注意理论联系实际. 提高发现问题与解决实际问题的能力.

学习常微分方程的重要意义:

(1)常微分方程是用微积分的思想，结合线性代数、解析几何和普通物理学的知识，来解决数学理论与其它学科中出现的若干微分方程问题. 熟悉和掌握常微分方程的基础理论和方法对大家学习其它数学理论，如数理方程、泛函分析、实变函数等后继课程具有重要的理论意义.

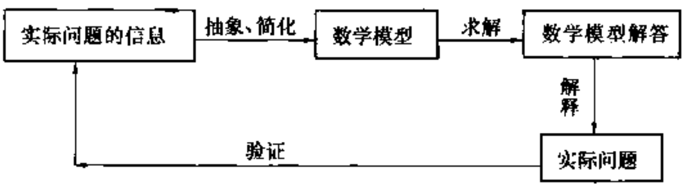
(2)常微分课程的学习和训练，不仅为数学思维能力的培养提供载体，更为学生数学建模等应用实践训练课题提供重要的数学方法. 当今自然科学和社会科学中的诸多问题，均可抽象为微分方程模型，为将来从事相关领域的研究提供思维方法和解决工具.

§1.2 基 本 概 念

1.2.1 微分方程

300多年前，由牛顿(Newton，1642－1727)和莱布尼兹(Leibniz，1646—1716)所创立的微积分学，是人类科学史上划时代的重大发现，而微积分的产生和发展，又与求解微分方程问题密切相关．这是因为微积分产生的一个重要动因来自于人们探求物质世界运动规律的需求．一般地，因为人们不可能观察到运动的全过程．运动规律很难全靠实验观测认识清楚，然而，运动物体(变量)与它的瞬时变化率(导数)之间，通常在运动过程中按照某种已知定律存在着联系，容易捕捉到这种联系，而这种联系，用数学语言表达出来，其结果往往形成一个微分方程．一旦求出这个方程的解，其运动规律将一目了然．微分方程是表达自然规律的一种最为自然的数学语言．

微分方程是数学联系实际问题的重要渠道之一，将实际问题建立成微分方程模型最初并不是数学家做的，而是由化学家、生物学家和社会学家完成的．



一般说来，**微分方程**就是联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数之间的关系式．如果其中的未知函数只与一个自变量有关，则称为**常微分方程**；如果未知函数是两个或两个以上自变量的函数，并且在方程中出现偏导数，则称为**偏微分方程**．本书所介绍的都是常微分方程，有时简称**微分方程**或**方程**．

在一个常微分方程中，未知函数最高阶导数的阶数，称为**方程的阶**．这样，一阶常微分方程的一般形式可表为

$$F(x,y,y')=0 \tag{1.2.1}$$

如果在(1.2.1)中能将y'解出，则得到方程

$$y'=f(x,y) \tag{1.2.2}$$

或

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{1.2.3}$$

(1.2.1)称为**一阶隐式方程**，(1.2.2)称为**一阶显式方程**，(1.2.3)称为**微分形式的一阶方程**.

n **阶隐式方程**的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \qquad (1.2.4)$$

n **阶显式方程**的一般形式为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}). \qquad (1.2.5)$$

方程(1.2.4)中，如果左端函数 F 对未知函数 y 和它的各阶导数 $y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 分别都是一次的，则称为**线性常微分方程**，否则称它为**非线性常微分方程**. 这样，一个以 y 为未知函数，以 x 为自变量的 n 阶线性微分方程具有如下形式：

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x). \qquad (1.2.6)$$

1.2.2 通解与特解

微分方程的解就是所有满足微分方程的函数，可定义如下：

定义 1.2.1 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上连续，且有直到 n 阶的导数. 如果把 $y=\varphi(x)$ 代入方程(1.2.4)，得到在区间 I 上关于 x 的恒等式，

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0.$$

则称 $y=\varphi(x)$ 为方程(1.2.4)在区间 I 上的一个**解**.

这样，从定义 1.2.1 可以直接验证：

1. 函数 $y=\sin(\arcsin x+C)$ 是方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ 在区间 $(-1,+1)$ 上的解，其中 C 是任意常数. 又该方程有两个明显的常数解 $y=\pm 1$，这两个解不包含在上述解中.

2. 函数 $x=C_1\cos t+C_2\sin t$ 是方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的解，其中 C_1 和 C_2 是独立的任意常数.

从上面的讨论中，可以看到一个重要事实，那就是微分方程的解中可以包含任意常数，其中任意常数的个数可以多到与方程的阶数相等，也可以不含任意常数. 把 n 阶常微分方程(1.2.4)的含有 n 个独立的任意常数 C_1，C_2，…，C_n 的解 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$，称为该方程的**通解**，如果方程(1.2.4)的解 $y=\varphi(x)$ 不包含任意常数，则称它为**特解**. 由隐式表出的通解称为**通积分**，而由隐式表出的特解称为**特积分**.

例 1.2.1 物体下落问题

设质量为 m 的物体，在时间 $t=0$ 时，在距地面高度为 H 处以初始速度 $v(0)=v_0$ 垂直地面下落，求此物体下落时距离与时间的关系.

设 $x=x(t)$ 为 t 时刻物体的位置坐标. 于是物体下落的速度为

$$v=\frac{dx}{dt}.$$

加速度为

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

质量为 m 的物体，在下落的任一时刻所受到的外力有重力 mg 和空气阻力，当速度不太大时，空气阻力可取为与速度成正比. 于是根据牛顿第二定律

$$F=mz \qquad (\text{力}=\text{质量}\times\text{加速度})$$

可以列出方程

$$m=\frac{d^2x}{dt^2}=k\frac{dx}{dt}-mg. \tag{1.2.7}$$

其中 $k>0$ 为阻尼系数，g 是重力加速度.

(1.2.7)式就是一个微分方程，这里 t 是自变量，x 是未知函数，现在，还不会求解方程(1.2.7)，但是如果考虑 $k=0$ 的情形，即自由落体运动，此时方程(1.2.7)可化为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g. \tag{1.2.8}$$

将上式对 t 积分两次得

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2. \tag{1.2.9}$$

其中 C_1 和 C_2 是两个独立的任意常数，是方程(1.2. 8)的解.

1.2.3 初值问题

例 1.2.1 中的函数(1.2.9)显然是方程(1.2.8)的通解，由于 C_1 和 C_2 是两个任意常数，这表明方程(1.2.8)有无数个解，而实际经验表明，一个自由落体运动仅能有一条运动轨迹. 产生这种多解性的原因是因为方程(1.2.8)所表达的是任何一个自由落体，在任意瞬时 t 所满足的关系式，并未考虑运动的初始状态，因此，通过积分求得的通解(1.2.9)所描述的是任何一个自由落体的运动规律. 显然，在同一初始时刻，从不同的高度或以不同初速度自由下落的物体，应有不同的运动轨迹. 为此，例 1.2.1 中限定两个初始值条件，即初始位置 $x(0)=H$

和初始速度 $x'(0)=v_0$ 这时，把初始条件代入到通解中，推得 $C_1=v_0$，$C_2=H$．于是，得到满足上述初值条件的特解为

$$x=H-\frac{1}{2}gt^2+v_0t. \tag{1.2.10}$$

它描述了初始高度为 H，初始速度为 v_0 的自由落体运动规律．

求微分方程满足初值条件解的问题称为**初值问题**.

于是称(1.2.10)是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=-g\\ x(0)=H,x'(0)=v_0.\end{cases}$$

的解.

对于一个 n 阶方程，初值条件的一般为如下形式：

$$y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \tag{1.2.11}$$

其中 x_0 是自变量的某个取定值，而 $y_0,y'_0,\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是相应的未知函数及导数的给定值．方程(1.2.5)的初值问题常记为

$$\begin{cases}y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})\\ y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.\end{cases} \tag{1.2.12}$$

初值问题也常称为**柯西**(Cauchy)**问题**.

对于一阶方程，若已求出通解 $y=\varphi(x,C)$，只要把初值条件 $y(x_0)=y_0$ 代入通解中，得到方程 $y_0=\varphi(x_0,C)$，从中解出 C，设为 C_0，代入通解，即得满足初值条件的解 $y=\varphi(x,C_0)$．

对于 n 阶方程，若已求出通解 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 后，代入初值条件(1.2.11)，得到 n 个方程式

$$\begin{cases}y_0=\varphi(x_0,C_1,C_2,\cdots,C_n)\\ y'_0=\varphi'(x_0,C_1,C_2,\cdots,C_n)\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0,C_1,C_2,\cdots,C_n).\end{cases} \tag{1.2.13}$$

如果能从(1.2.13)式中确定出 $C_1^0,C_2^0,\cdots,C_n^0$，代回通解，即得所求初值问题的解 $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0,\cdots,C_n^0)$．

例 1.2.2 求方程

$$x''+x=0$$

的满足初值条件 $x\left(\frac{\pi}{4}\right)=1, x'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 的解.

解：方程通解为

$$x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

求导数后得

$$x' = C_1 \cos t - C_2 \sin t$$

将初值条件代入，得到方程组

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}C_2 = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}C_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}C_2 = -1 \end{cases}$$

解出 C_1 和 C_2 得

$$C_1 = 0, C_2 = \sqrt{2}$$

故所求特解为

$$x = \sqrt{2}\cos t$$

1.2.4 积分曲线

为了便于研究方程解的性质，常常考虑解的图像.

一阶方程(1.2.2)的一个特解 $y=\varphi(x)$ 的图像是 xoy 平面上的一条曲线，称为方程(1.2.2)的**积分曲线**；而通解 $y=\varphi(x,C)$ 的函数图像是平面 xoy 上的一族曲线，称为**积分曲线族**. 例如，方程 $\frac{dy}{dx}=2x$ 的通解 $y=x^2+C$ 是 xoy 平面上的一族抛物曲线. 而 $y=x^2$ 是过点(0, 0)的一条积分曲线.

为了叙述简便，对解和积分曲线这两个名词一般不加以区别. 对于二阶和二阶以上的方程，也有积分曲线和积分曲线族的概念，只不过此时积分曲线所在的空间维数不同.

例 1.2.3 验证 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+3$ 是微分方程 $y'''-2y''-y'+2y=6$ 的通解，其中 c_1, c_2, c_3 是三个独立的任意常数.

解：把 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+3$ 代入方程，有

$$\text{左边} = (c_1e^x + c_2e^{-x} + 8c_3e^{2x}) - 2(c_1e^x + c_2e^{-x} + 4c_3e^{2x})$$
$$-(c_1e^x - c_2e^{-x} + 2c_3e^{2x}) + 2(c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x} + 3) = 6 = \text{右边}$$

又由于 c_1, c_2, c_3 是三个独立的任意常. 故 $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+3$ 为方程的通解.

思考题:

(1) 什么是微分方程的阶? 区分线性微分方程与非线性微分方程的根本标准是什么?

(2) 微分方程的解与代数方程的解有何异同?

(3) 何谓微分方程的解、通解、特解以及初值问题的解? 彼此有何关系?

阅读空间

微分方程简介

一、微分方程的概念

方程对于学过中学数学的人来说是比较熟悉的，初等数学中就有各种各样的方程，比如线性方程、二次方程、高次方程、指数方程、对数方程、三角方程和方程组等等. 这些方程都是要把研究的问题中的已知数和未知数之间的关系找出来，列出包含一个未知数或几个未知数的一个或者多个方程式，然后取求方程的解.

但是在实际工作中，常常出现一些与以上方程完全不同的问题. 比如：物质在一定条件下的运动变化，要寻求它的运动、变化的规律；某个物体在重力作用下自由下落，要寻求下落距离随时间变化的规律；火箭在发动机推动下在空间飞行，要寻求它飞行的轨道，等等.

物质运动和它的变化规律在数学上是用函数关系来描述的，因此，这类问题就是要去寻求满足某些条件的一个或者几个未知函数. 也就是说，凡是这类问题都不是简单地去求一个或者几个固定不变的数值，而是要求一个或者几个未知的函数.

解这类问题的基本思想和初等数学解方程的基本思想很相似，也是要把研究问题中已知函数和未知函数之间的关系找出来，从列出的包含未知函数的一个或几个方程中去求得未知函数的表达式. 但是无论在方程的形式、求解的具体方法还是求出解的性质等方面，都和初等数学中的解方程有许多不同的地方.

在数学上，解这类方程，要用到微分和导数的知识. 因此，凡是联系未知函数、未知函数的导数以及自变量之间的关系的方程，就叫做微分方程.

微分方程差不多是和微积分同时产生的，苏格兰数学家耐普尔创立对数的时候，就讨论过微分方程的近似解. 牛顿在建立微积分的同时，对简单的微分方程用级数来求解. 后来瑞士数学家雅各布·贝努利、欧拉、法国数学家克雷洛、达朗贝尔、拉格朗日等人又不断地研究和丰富了微分方程的理论.

常微分方程的形成与发展是和力学、天文学、物理学以及其他科学技术的发展密切相关的. 数学的其他分支的新发展，如复变函数、李

群、组合拓扑学等，都对常微分方程的发展产生了深刻的影响，当前计算机的发展更是为常微分方程的应用及理论研究提供了非常有力的工具.

牛顿研究天体力学和机械力学的时候，利用了微分方程这个工具，从理论上得到了行星运动规律. 后来，法国天文学家勒维烈和英国天文学家亚当斯使用微分方程各自计算出那时尚未发现的海王星的位置. 这些都使数学家更加深信微分方程在认识自然、改造自然方面的巨大力量.

微分方程的理论逐步完善的时候，利用它就可以精确地表述事物变化所遵循的基本规律，只要列出相应的微分方程，有了解方程的方法. 微分方程也就成了具有生命力的数学分支.

二、常微分方程的内容

如果在一个微分方程中出现的未知函数只含一个自变量，这个方程就叫做常微分方程，也可以简单地叫做微分方程. 如果在一个微分方程中出现的未知函数含两个或两个以上自变量，这个方程就叫做偏微分方程.

一般地说，n 阶微分方程的解含有 n 个任意常数. 也就是说，微分方程的解中含有任意常数的个数和方程的阶数相同，这种解叫做微分方程的通解. 通解构成一个函数族.

如果要根据实际问题求出其中满足某种指定条件的解来，那么这种问题叫做定解问题，如初值问题就是方程在初始条件下的求解问题. 对于一个常微分方程的满足定解条件的解叫做特解. 对于高阶微分方程可以引入新的未知函数，把它化为多个一阶微分方程组.

三、发展简史

常微分方程有着深刻而生动的实际背景，它从生产实践与科学技术中产生，又成为现代科学技术分析问题与解决问题的强有力工具. 该课程是与微积分一起成长起来的学科，是学习泛函分析、数理方程、微分几何的必要准备，本身也在工程力学、流体力学、天体力学、电路振荡分析、工业自动控制以及化学、生物、经济等领域有广泛的应用.

300 多年前，Newton 与 Leibniz 奠定微积分基本思想的同时，就正式提出了微分方程的概念.

17 世纪末到 18 世纪，常微分方程研究的中心问题是如何求出通解