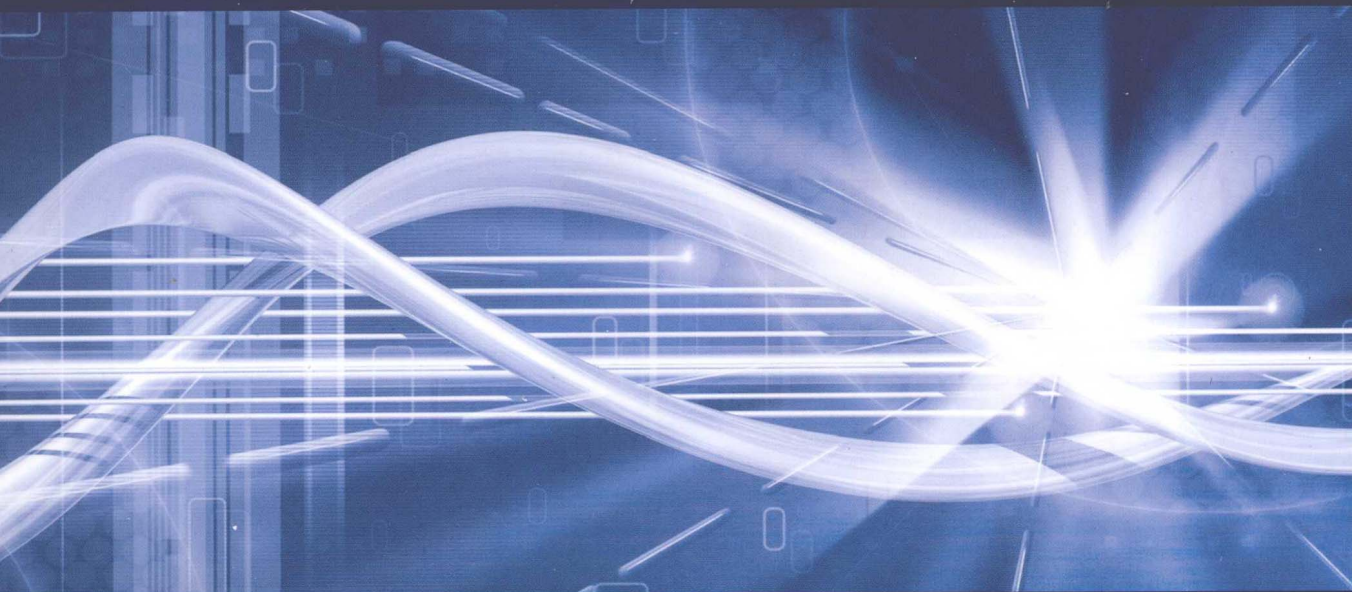




普通高等教育“十二五”规划教材



普通高等教育“十一五”国家级规划教材



信号分析与处理

(第二版)

崔翔 主编

★ 电力行业精品教材



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

信号分析与处理

(第二版)

主编 崔翔
编写 张卫东 卢铁兵
主审 赵怀录 陈后金



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材，同时也是普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书主要讨论确定性时间信号分析与处理的基本理论和基本方法，包括连续时间信号分析与处理、离散时间信号分析与处理、应用三个部分，但更侧重离散时间信号分析与处理部分。本书遵循概念清晰、体系严谨、内容够用的编写原则，力争做到密切结合电气工程实际，并通过举例说明基本理论和基本方法在应用中需要注意的问题。本书适合按 64 学时讲授，安排在积分变换和电路原理等课程结束之后讲授。

本书主要作为电气工程及其自动化、自动化等专业的本科生教材，也可供相关领域的工程技术人员参考使用。

图书在版编目 (CIP) 数据

信号分析与处理/崔翔主编.—2 版.—北京：中国电力出版社，2011.6

普通高等教育“十二五”规划教材．普通高等教育“十一五”国家级规划教材

ISBN 978-7-5123-2395-7

I. ①信… II. ①崔… III. ①信号分析-高等学校-教材②信号处理-高等学校-教材 IV. ①TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 244191 号

中国电力出版社出版、发行

(北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>)

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2005 年 3 月第一版

2011 年 6 月第二版 2011 年 6 月北京第四次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 19 印张 463 千字

定价 34.00 元

敬告读者

本书封面贴有防伪标签，加热后中心图案消失
本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版 权 专 有 翻 印 必 究

前 言

进入 21 世纪以来,为适应科学技术的发展和人才知识结构的新要求,我国高等学校普遍开始将信号分析与处理课程列入电气类本科专业的培养方案,并对该课程进行了大量的教学研究和教学实践。

本书第一版于 2005 年出版,迄今已经六年。作者在教学实践的基础上,对第一版部分内容进行了修改,形成了第二版。

第二版仍然保持了第一版的编写思想和体系结构,即主要讨论确定性时间信号分析与处理的基本理论和基本方法,按照连续时间信号分析与处理、离散时间信号分析与处理、应用三个部分进行编写。第二版仅对连续时间信号分析与处理部分进行了修改,增加了基本理论和基本方法等方面的篇幅,以使本书的知识体系更加完整,并尽量做到与工程数学、电路理论、自动控制原理等课程有更好的衔接,进一步满足我国不同高等院校的教学需要。

第二版的主要修改是将第一版中的连续时间信号分析与处理部分,按照信号分析、系统分析、信号处理的实现三个环节由两章修改为三章,即连续时间信号分析、连续时间系统分析、连续时间系统实现。这样修改的目的,一方面是为读者提供一个相对完整的连续时间信号处理构架,另一方面是与离散时间信号分析与处理部分相对应。具体修改内容有以下几方面。

(1) 增加了卷积积分的图解法和性质的内容。

(2) 重写了线性时不变系统频域分析的内容。重写的这部分内容全面介绍了连续时间系统的频率响应特性的定义、计算方法和应用等方面的知识,为连续时间信号的频域处理方法奠定了理论基础。

(3) 增加了理想模拟低通滤波器的内容。通过讨论理想模拟低通滤波器的单位冲激响应和单位阶跃响应,更有助于深刻理解连续时间信号通过连续时间系统的无失真传输条件,以及理想模拟低通滤波器的非因果性。

(4) 增加了连续时间系统基本结构的内容。增加的这部分内容介绍了连续时间系统的直接型、级联型、并联型三种基本结构,为连续时间系统的数学和物理模拟提供了基本实现方法。

(5) 对部分段落、例题、习题进行了完善、修改和补充。

本书分三篇共十二章。第一篇主要讲授连续时间信号分析与处理的基本理论和基本方法,包括连续时间信号分析、连续时间系统分析、连续时间系统的实现三章;第二篇主要讲授离散时间信号分析与处理的基本理论和基本方法,包括离散时间信号与离散时间系统、离散时间系统的 z 域分析、离散傅里叶变换、快速傅里叶变换、离散时间系统的基本结构、无限冲激响应数字滤波器设计、有限冲激响应数字滤波器设计七章;第三篇主要讨论信号分析与处理应用中的若干问题和在电气工程中的典型应用,包括数字信号处理的实现、数字信号处理的应用两章。本书还以附录形式给出了九个建议的实验。作者希望这样的安排能够使读者对信号分析与处理的全过程建立一个明晰的概念。

本书内容覆盖了《“信号分析与处理”课程教学基本要求（修订稿）》的内容，结合作者的教学实践和科研体会，扩展了数字滤波器设计方面的内容。本书适合按 64 学时讲授，最好安排在工程数学、电路原理等课程后讲授。

本书第一版被列为普通高等教育“十五”规划教材，第二版被列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材和普通高等教育“十二五”规划教材。本书由华北电力大学崔翔主编。崔翔编写了前八章，张卫东编写了第十一章、第十二章和附录，卢铁兵编写了第九章和第十章。

本书承蒙北京交通大学陈后金教授、西安交通大学赵录怀教授认真审阅，并提出了许多重要的修改建议，特此表示衷心的感谢。同时，使用本教材的教师和学生对本书的再版提供了帮助，在此一并表示感谢。最后，感谢中国电力出版社为本书的修改和出版所做出的辛勤工作和热情的帮助。

对于本书中的不足之处，欢迎广大读者批评指正。

作 者

2011 年 6 月

第二版前言

随着微电子技术和超大规模集成电路技术的迅猛发展,基于微处理器和数字信号处理器的各类检测和控制技术已经被广泛地应用于电气工程。除了那些具有功率要求的连续时间系统(模拟系统)外,越来越多的检测和控制系統开始被离散时间系统(数字系统)所取代。近年来的调查表明,将“信号分析与处理”课程作为电气工程及其自动化、自动化等电气类本科专业的一门专业基础课程已经成为国内高校的共识。为了满足这种需求,教育部高等学校电子信息科学与电气信息类基础课程教学指导分委员会于2004年8月制定出《信号分析与处理课程教学基本要求(报批稿)》。

本书主要讨论确定性时间信号分析与处理的基本理论和基本方法,包括连续时间信号分析与处理、离散时间信号分析与处理、应用三个部分,但更侧重离散时间信号分析与处理。本书分三篇共十一章。第一篇主要讲授连续时间信号分析与处理的基本理论和基本方法,包括连续时间信号分析和连续时间系统分析两章;第二篇主要讲授离散时间信号分析与处理的基本理论和基本方法,包括离散时间信号与离散时间系统、离散时间系统的 z 域分析、离散傅里叶变换、快速傅里叶变换、离散时间系统的基本结构、无限冲激响应数字滤波器设计、有限冲激响应数字滤波器设计等七章;第三篇主要讨论信号分析与处理应用中的若干问题和在电气工程中的一些典型应用,包括数字信号处理的实现、数字信号处理的应用两章。本书还以附录形式给出了9个建议的实验。作者希望这样的安排能够使读者对信号分析与处理的全过程建立一个明晰的概念。

对于一些高校电气类本科专业而言,本书第一篇的部分内容可能在“积分变换”和“电路原理”等课程中讲授过,作者认为适当地重复讲授这些内容更有利于本书的学习。同时,需要指出的是,在第一章第三节“非周期信号的频谱”中,通过定义频谱密度函数,重点讨论了傅里叶变换及其基本性质。鉴于傅里叶变换在信号分析与处理中的重要地位,无论对于本书内容的理解,还是对于学生应用信号分析与处理方法解决实际问题,讲授好这部分内容都是至关重要的。需要指出的另外一点是,第二章第四节“系统函数的逼近”既可以在本章讲授,也可以移到第八章中讲授,取决于任课教师的安排。如果学时允许,建议讲授第二章第五节“系统函数的电路实现”,对于电气类本科专业而言,了解一些模拟滤波器的电路实现方法是必要的,当然,这对于更深入地理解数字信号处理技术也是十分有益的。

在本书的编写过程中,作者坚持概念清晰、体系严谨、内容够用的编写原则,力争做到密切结合电气工程实际,并通过举例说明基本理论和基本方法在应用中需要注意的问题。

本书内容基本覆盖了《信号分析与处理课程教学基本要求(报批稿)》,并结合作者的教学实践和科研体会,扩展了部分内容。本书适合按64学时讲授,最好安排在“积分变换”和“电路原理”等课程结束之后讲授。

经评审,本书被列为普通高等教育“十五”规划教材,由崔翔主编。张卫东编写了第十章、第十一章和附录,卢铁兵编写了第八章和第九章,其余各章由崔翔编写。

本书承蒙清华大学郑君里教授审阅,并提出许多建设性修改意见和建议,对于保证本书

的质量起到了至关重要的作用。华北电力大学电气工程学院有关教师对本书部分内容的选取以及与电气类本科专业课程体系结合等方面提出了很多宝贵意见和建议。华北电力大学教务处和电气工程学院长期给予作者关心和鼓励。本书的编写和教学实践得到了教育部“高等学校优秀青年教师教学科研奖励计划（2000—2005）”的大力支持，中国电力出版社为本书的出版提供了十分有利的条件。在此作者一并表示衷心的感谢。

编写一部合格的教材是一项异常艰巨的工作，需要长期的教学实践和学术积累。通过本书的编写，作者深感力不从心。本书中不够完善乃至缺点和错误之处，敬请使用本书的师生和读者指正。

编 者

2004年12月

目 录

前言
第一版前言

第一篇 连续时间信号分析与处理

第一章 连续时间信号分析	1
第一节 连续时间信号	1
第二节 周期信号的频谱	7
第三节 非周期信号的频谱	18
习题一	32
第二章 连续时间系统分析	36
第一节 线性时不变系统	36
第二节 线性时不变系统的时域分析	40
第三节 线性时不变系统的频域分析	47
第四节 线性时不变系统的复频域分析	50
习题二	56
第三章 连续时间系统的实现	59
第一节 理想模拟低通滤波器	59
第二节 模拟低通滤波器系统函数的逼近	62
第三节 连续时间系统的基本结构	69
第四节 系统函数的电路实现	72
第五节 连续时间信号的数字处理	78
习题三	79

第二篇 离散时间信号分析与处理

第四章 离散时间信号与离散时间系统	81
第一节 连续时间信号的离散化	81
第二节 离散时间信号	87
第三节 离散时间系统	93
第四节 常系数线性差分方程的时域解法	96
第五节 离散卷积	101
第六节 离散时间系统的稳定性与因果性	107
习题四	108

第五章 离散时间系统的 z 域分析	111
第一节 Z 变换的定义与收敛域.....	111
第二节 Z 变换的基本性质.....	116
第三节 Z 反变换.....	121
第四节 常系数线性差分方程的 z 域解法.....	125
第五节 Z 变换与拉普拉斯变换的关系.....	126
第六节 离散时间系统的系统函数.....	131
第七节 离散时间系统的频率特性.....	135
习题五.....	139
第六章 离散傅里叶变换	143
第一节 离散傅里叶级数.....	143
第二节 离散傅里叶变换.....	147
第三节 离散傅里叶变换的基本性质.....	149
第四节 离散傅里叶变换与 Z 变换的关系.....	154
第五节 各类傅里叶变换的对应关系.....	157
习题六.....	161
第七章 快速傅里叶变换	163
第一节 提高离散傅里叶变换运算速度的基本思路.....	163
第二节 时间抽取的快速傅里叶变换算法.....	164
第三节 频率抽取的快速傅里叶变换算法.....	170
第四节 快速傅里叶反变换算法.....	174
第五节 离散卷积的快速算法.....	176
习题七.....	180
第八章 离散时间系统的基本结构	182
第一节 数字网络的信号流图表示.....	182
第二节 数字滤波器的分类.....	184
第三节 无限冲激响应数字滤波器的基本结构.....	185
第四节 有限冲激响应数字滤波器的基本结构.....	191
习题八.....	196
第九章 无限冲激响应数字滤波器设计	198
第一节 利用低通模拟滤波器设计无限冲激响应低通数字滤波器.....	198
第二节 冲激响应不变法.....	199
第三节 双线性变换法.....	204
第四节 频带变换.....	208
第五节 无限冲激响应数字滤波器设计举例.....	212
习题九.....	219
第十章 有限冲激响应数字滤波器设计	221
第一节 线性相位有限冲激响应数字滤波器的条件和性质.....	221
第二节 窗口法.....	228

第三节 频率采样法	238
第四节 FIR 数字滤波器与 IIR 数字滤波器的比较	243
习题十	244

第三篇 应 用

第十一章 数字信号处理的实现	246
第一节 量化误差分析	246
第二节 快速傅里叶变换的软件实现	252
第三节 数字网络的软件实现	256
第四节 通用数字信号处理器	258
习题十一	264
第十二章 数字信号处理的应用	266
第一节 引言	266
第二节 周期信号的数字谱分析	266
第三节 非周期信号的数字谱分析	269
第四节 线性时不变系统的频率特性分析	270
第五节 数字滤波在谐波分析中的应用	273
第六节 线性相关及其应用	275
习题十二	280
附录 实验建议	281
实验一 序列的产生与运算	281
实验二 线性时不变离散系统的时域分析	282
实验三 线性时不变离散系统的 z 域分析	283
实验四 离散傅里叶变换及其快速算法	284
实验五 IIR 数字滤波器的设计	286
实验六 FIR 数字滤波器的设计	287
实验七 确定性信号的频谱分析	288
实验八 线性卷积和线性相关的快速算法	290
实验九 基于 DSP 芯片的数字信号处理系统	291
参考文献	293

第一篇 连续时间信号分析与处理

第一章 连续时间信号分析

本章讨论了连续时间信号的频谱分析方法。首先通过对周期信号的傅里叶级数分析，引出了周期信号的频谱概念；然后通过定义频谱密度函数，给出了傅里叶变换的定义，并研究了傅里叶变换的基本性质；最后应用傅里叶变换研究了非周期信号的频谱。

第一节 连续时间信号

一、信号的描述与分类

信号是信息传输过程的载体，可以是随时间、空间或任何其他独立变量变化的物理量。例如，我们从收音机里听到的悦耳音乐就是经过处理的随时间变化的信号；又如，医生通过查看患者核磁共振断面扫描图像进行医学诊断，这种人身不同位置的断面图像就是随空间变化的信号。一般可以用数学表达式和函数波形(或函数图像)两种方法对信号进行描述。前者具有表达方便、易于运算的特点，适用于那些可以用函数形式表达的信号的描述；而后者具有表达直观、便于理解的特点，适用于那些难以用函数形式表达的复杂信号和测量信号的描述。可以看出，这两种描述信号的方法各有长短，互为补充，在实际应用中均被广泛地采用。

实际应用中的信号是多种多样的，根据信号的不同特点可以做如下分类。

(1) 一维信号与多维信号。仅随一个自变量变化的信号称为一维信号，而随两个及两个以上自变量变化的信号定义为多维信号。例如，电力系统中因非线性负载等原因产生的非正弦周期电流就是随时间变化的一维信号，而电视图像既随二维平面坐标系的两个坐标变化也随时间变化，构成一个三维信号。

(2) 确定性信号与随机性信号。对于自变量指定值时其函数值确定的信号定义为确定性信号；反之，函数值不确定且具有随机性的信号称为随机性信号，也称为不确定性信号。实际中的信号多是随机性的。这主要是因为信号的产生、传输和接收过程中，信号受到大量不确定性因素的影响。因此，从严格意义上讲，信号都是随机性信号。但是，在一定的条件下，如果这些不确定性因素的影响较小，且可以忽略不计的话，就可以将它们视为确定性信号进行研究。

(3) 周期信号与非周期信号。对于确定性信号，如果信号随自变量周而复始地变化，且无始无终，则称这个信号为周期信号。对于随时间变化的周期信号，有如下性质

$$f_p(t) = f_p(t + nT) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

式中： T 为满足上式的最小时间间隔，称为周期信号的周期。

不具有周期性变化的信号称为非周期信号。为识别方便，本书规定周期信号加下标“p”，如 $f_p(t)$ ；而非周期信号无需加注任何下标，如 $f(t)$ 。周期信号与非周期信号是确定性信号分析的基本研究对象。例如，电力系统中的谐波分析就是针对非正弦周期信号而言

的，而电力系统故障下的电压和电流就可以归结为非周期信号进行分析。

(4) 连续信号与离散信号。对于自变量在指定区间内连续变化时，其信号取值除若干点不连续外都存在确定值的信号称为连续信号。可以看出，连续信号的自变量是连续的，其幅值可以是连续的，也可以在某些自变量取值点上是不连续的。与连续信号不同的是离散信号。离散信号在自变量的指定区间内是离散的，只是在规定的离散点上给出信号的幅值，而在这些离散点之外没有定义。连续时间信号与离散时间信号分别是连续信号与离散信号的特例。

(5) 能量信号与功率信号。对于周期信号 $f_p(t)$ ，若将其视为加在单位电阻两端的电压或者流过单位电阻的电流，则单位电阻在所有周期消耗的总能量 E 和平均功率 P 分别为

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} N \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_p^2(t) dt$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_p^2(t) dt$$

式中： N 为周期数。

同样，对于非周期信号 $f(t)$ ，可认为周期趋于无穷大，则单位电阻消耗的总能量 E 和平均功率 P 分别为

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_p^2(t) dt$$

由此可以看出，无论是对于周期信号 $f_p(t)$ 还是对于非周期信号 $f(t)$ ，如果总能量 E 为有限值，那么平均功率 P 一定趋于零；反之，如果平均功率 P 为有限值，那么总能量 E 一定趋于无穷大。为此，称信号总能量 E 为有限值、平均功率 P 趋于零的信号为能量信号，称信号平均功率 P 为有限值，总能量 E 趋于无穷大的信号为功率信号。

一个信号不可能既是能量信号又是功率信号。一般而言，周期信号都是功率信号；非周期信号可能是能量信号，也可能是功率信号，还可能既不是能量信号也不是功率信号。

(6) 因果信号与非因果信号。如果信号 $f(t)$ 在 $t < 0$ 时恒为零，则称 $f(t)$ 为因果信号；否则称 $f(t)$ 为非因果信号。

本书只讨论确定性连续时间信号和确定性离散时间信号的分析与处理方法，不涉及其他类型信号的讨论。在实际中，幅值连续的连续时间信号称为模拟信号，而幅值离散的离散时间信号称为数字信号。尽管模拟信号与连续时间信号、数字信号与离散时间信号的定义略有不同，但是，在实际应用中人们往往对此不加区别，常将连续时间信号等同于模拟信号，而把离散时间信号等同于数字信号。

二、常用典型信号

在连续时间信号处理中有几种常用典型信号具有重要意义。一方面，实际中的许多信号可以用这些典型信号的线性组合来表示；另一方面，这些典型信号对线性时不变系统产生的响应以及在分析系统的性质时起到了重要作用。

(1) 单位冲激信号，以符号 $\delta(t)$ 表示。其定义为

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

式中： $\delta(t)$ 又称为单位冲激函数或狄拉克（Dirac）函数。

单位冲激信号的波形如图 1-1 所示，可见， $\delta(t)$ 为偶函数。图 1-1 中括号内的数字 1 为式 (1-1) 定义中 $\delta(t)$ 在全时域的积分值，由于 $\delta(t)$ 仅在 $t=0$ 时刻不为零，故又称图 1-1 中括号内的数字 1 为单位冲激信号的冲激强度。由式 (1-1) 单位冲激信号的定义，可以导出单位冲激信号的下列筛分性质为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \quad (1-2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \quad (1-3)$$

(2) 单位阶跃信号，以符号 $u(t)$ 表示。其定义为

$$u(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \quad (1-4)$$

在 $t=0$ 时刻可以不定义或规定 $u(0) = \frac{1}{2}$ 。单位阶跃信号又称为单位阶跃函数，其波形如图 1-2 所示。

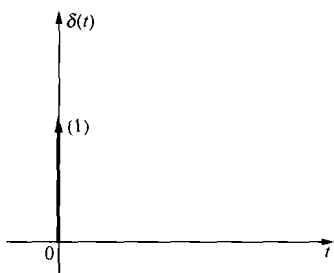


图 1-1 单位冲激信号的波形

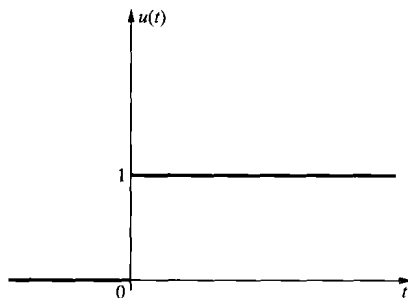


图 1-2 单位阶跃信号的波形

利用单位冲激信号的定义式 (1-1)，可知

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

将其与式 (1-4) 对比，得

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \quad (1-5)$$

对式 (1-5) 求导，得

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1-6)$$

(3) 矩形信号，以符号 $r_T(t)$ 表示。其定义为

$$r_T(t) = u(t) - u(t-T) \quad (1-7)$$

定义中 T 为矩形信号的时间宽度。矩形信号的波形如图 1-3 所示。

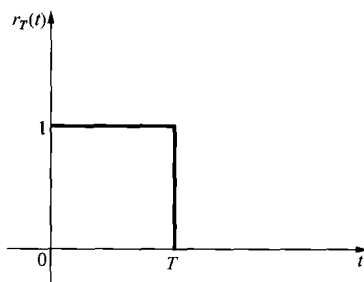


图 1-3 矩形信号的波形

(4) 正弦信号。正弦信号与余弦信号通常被统称为

正弦信号，一般写成如下余弦函数形式

$$f_p(t) = \sqrt{2}F_0 \cos(\Omega_0 t + \varphi_0) \quad (1-8)$$

式中： F_0 为正弦信号 $f_p(t)$ 的有效值； Ω_0 为角频率，rad/s（弧度/秒）； φ_0 为初相位。

正弦信号是一种周期信号，周期 T_0 （单位为 s，秒）与角频率 Ω_0 和频率 f_0 （单位为 Hz，赫兹）之间满足如下关系

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\Omega_0} \quad (1-9)$$

正弦信号是广泛使用的周期信号。例如，电气工程中的工频电压和工频电流就是频率为 50Hz 的正弦信号。在我国，将 50Hz 称为工频频率（在有些国家工频频率为 60Hz）。图 1-4 画出了对应于式 (1-8) 中 $0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ 时的正弦信号的波形。

(5) 指数信号。其数学表达式如下

$$f(t) = Ke^{\alpha t} \quad (1-10)$$

式中 α 是实数。当 $\alpha > 0$ 时，信号的幅值将随着时间的增加而增加；反之，当 $\alpha < 0$ 时，信号的幅值将随着时间的增加而减少；当 $\alpha = 0$ 时，信号将退化为直流信号。图 1-5 分别画出了 $\alpha > 0$ 、 $\alpha = 0$ 和 $\alpha < 0$ 三种情况下指数信号的波形。可以看出，随着时间的增加，指数信号幅值增长或衰减的速率与 $|\alpha|$ 密切相关。 $|\alpha|$ 越大，增长或衰减越快；反之， $|\alpha|$ 越小，增长或衰减越慢。 $\alpha < 0$ 时，一般将 $|\alpha|$ 的倒数定义为指数信号的时间常数（单位为 s，秒），即

$$\tau = \frac{1}{|\alpha|} \quad (1-11)$$

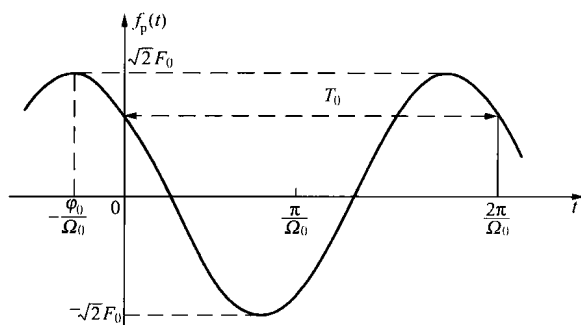


图 1-4 正弦信号的波形

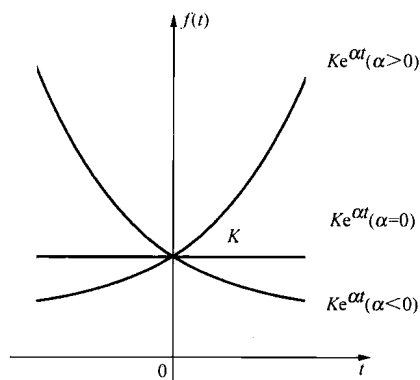


图 1-5 指数信号的波形

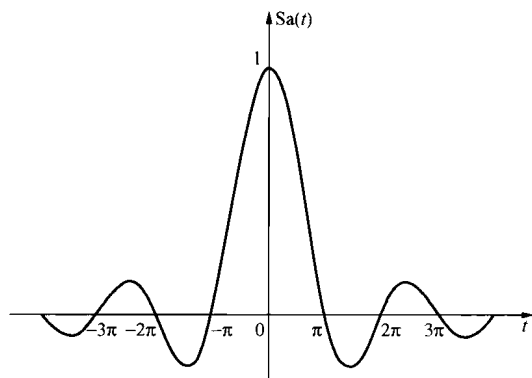


图 1-6 采样信号的波形

时间常数是电气工程中的一个重要概念。例如，我们常用时间常数来反映一阶动态电路瞬态过程的快慢。

(6) 采样信号。以符号 $Sa(t)$ 表示，定义为

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (1-12)$$

采样信号又称采样函数。显然，采样信号是一个偶函数。图 1-6 画出了采样信号的波形，可以看出，随着时间变量绝

对值的增加,信号的幅值呈现衰减振荡形状,且当 $t = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$ 时 (n 为自然数),信号的幅值为零。

采样信号是一种非常重要的信号,在信号的分析与处理中占有重要地位。采样信号具有如下性质

$$\int_0^{+\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2} \quad (1-13a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi \quad (1-13b)$$

显然,式 (1-13b) 可以由式 (1-13a) 直接获得。下面证明式 (1-13a)。由采样信号定义式 (1-12),式 (1-13a) 的积分运算可以看作下列积分的特例,即

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} \sin \beta t}{t} dt, \alpha \geq 0 \quad (1-14)$$

不难看出,式 (1-13a) 的积分就是式 (1-14) 积分在 $\alpha=0, \beta=1$ 时的特例。对式 (1-14) 中的 β 求偏导数,得

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \cos \beta t dt$$

利用分部积分法进行积分得

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$$

进一步对 β 做不定积分,得

$$I(\alpha, \beta) = \arctan \frac{\beta}{\alpha} + C$$

从式 (1-14) 可以看出,当 $\beta=0$ 时, $I(\alpha, \beta)=0$ 。所以,此时常数 C 应取零。这样

$$\int_0^{+\infty} \text{Sa}(t) dt = I(\alpha, \beta) \Big|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=1}} = \frac{\pi}{2}$$

这就是式 (1-13a)。

与采样信号 $\text{Sa}(t)$ 类似的一个信号是 $\text{sinc}(t)$ 信号,其数学表达式为

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

(7) 钟形信号。又称为高斯 (Gauss) 信号,定义为

$$f(t) = K e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (1-15)$$

钟形信号波形如图 1-7 所示。可见,钟形信号为偶函数。由定义式 (1-15) 知, $f(0.5\tau) \approx 0.78K, f(\tau) = \frac{K}{e}$ 。钟形信号也是一种非常重要的信号。

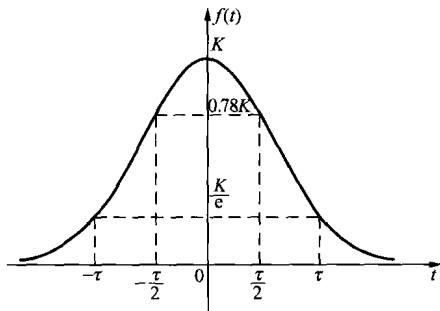


图 1-7 钟形信号的波形

三、信号的运算

在连续时间信号处理过程中,往往需要对信号进行一些基本运算。这些运算大体上可以分为两类。一类是对时间变量的运算,如移位、翻转和尺度运算;另一类是对信号幅值的运算,如加法、乘法和标度运算。此外,还有信号的微分、积分运算。现分述如下。

(1) 时间变量的运算。将信号 $f(t)$ 的时间变量 t 置换为 $t-t_0$ 形成的信号 $f(t-t_0)$ 的运算称为移位, t_0 称为移位时间。当 $t_0 > 0$ 时, 信号 $f(t-t_0)$ 是将原信号 $f(t)$ 波形在时间轴上整体右移; 反之, 当 $t_0 < 0$ 时, 原信号 $f(t)$ 波形在时间轴上整体左移, 如图 1-8 所示。

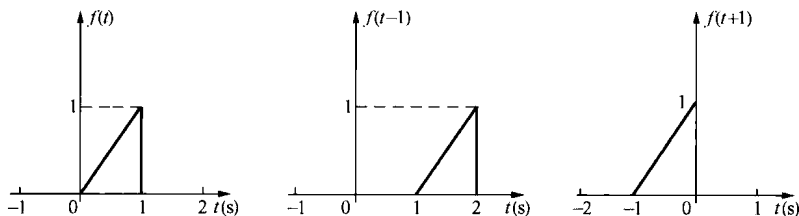


图 1-8 信号的移位

将信号 $f(t)$ 的时间变量 t 置换为 $-t$ 形成的信号 $f(-t)$ 的运算称为翻转。翻转后信号 $f(-t)$ 的波形就是把原信号 $f(t)$ 的波形以 $t=0$ 为轴反折过来, 如图 1-9 所示。

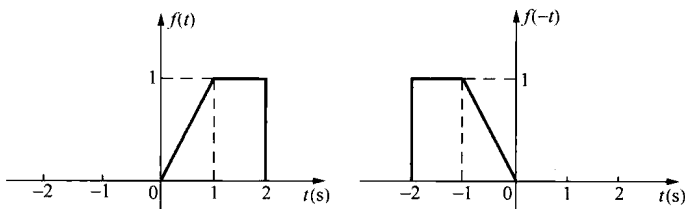


图 1-9 信号的翻转

将信号 $f(t)$ 的时间变量 t 乘以正实系数 α 并置换 t 形成的信号 $f(\alpha t)$ 的运算称为尺度变换。不难看出, 当 $\alpha > 1$ 时, 信号 $f(\alpha t)$ 是由原信号 $f(t)$ 的波形在时间轴上压缩 α 倍获得的; 反之, 当 $\alpha < 1$ 时, 信号 $f(\alpha t)$ 是由原信号 $f(t)$ 的波形在时间轴上扩展 $\frac{1}{\alpha}$ 倍获得的。图 1-10 中分别画出了 $\alpha=2$ 和 $\alpha=0.5$ 两种尺度变换后信号的波形。

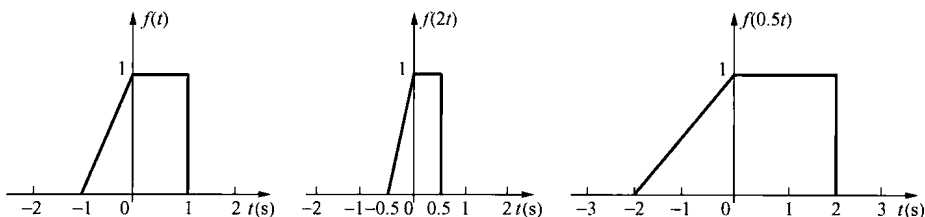


图 1-10 信号的尺度变换

(2) 信号幅值的运算。将信号 $f_1(t)$ 和信号 $f_2(t)$ 在同一时刻的幅值对应相加定义为信号的加法运算, 即

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (1-16)$$

同理, 将信号 $f_1(t)$ 和信号 $f_2(t)$ 在同一时刻的幅值对应相乘定义为信号的乘法运算, 即

$$f(t) = f_1(t)f_2(t) \quad (1-17)$$

两个信号乘法运算的一个特例是标度运算, 如让 $f_1(t) = a$ (实常数), 式 (1-17) 变为

$$f(t) = af_2(t) \quad (1-18)$$

可见, 标度运算是在原信号在幅值上进行整体放大或缩小的一种运算。例如, 模拟电路中的

各类线性放大器就是实现这种运算的信号处理单元。

(3) 信号的微分与积分。对信号 $f(t)$ 进行微分指的是对 $f(t)$ 的时间变量 t 求导数, 即 $f'(t)$ 或 $\frac{df(t)}{dt}$, 其结果就是 $f(t)$ 在各时刻 t 的时间变化率。对信号 $f(t)$ 进行积分指的是在时间区间 $(-\infty, t)$ 内对时间变量 τ 的积分, 即 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$, 其结果就是 $f(\tau)$ 在时间区间 $(-\infty, t)$ 内包围的面积。

下面, 讨论如下信号 $f(t)$ 的微分

$$f(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t}, & 0 \leq t \leq t_0 \\ (1 - e^{-\alpha t_0}) e^{-\alpha(t-t_0)}, & t_0 \leq t < +\infty \end{cases}$$

则有

$$f'(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, & 0 \leq t \leq t_0 \\ -\alpha(1 - e^{-\alpha t_0}) e^{-\alpha(t-t_0)}, & t_0 \leq t < +\infty \end{cases}$$

图 1-11 分别画出了信号 $f(t)$ 和微分后 $f'(t)$ 的波形。可以看出, 信号经过微分运算后突出显示了信号的变化部分, 微分后的信号波形更加尖锐。反之, 如果将图 1-11 信号 $f(t)$ 视为信号 $f'(t)$ 的积分运算的结果, 那么信号经过积分运算后其突出变化部分得到缓解, 积分后的信号波形更加平滑。

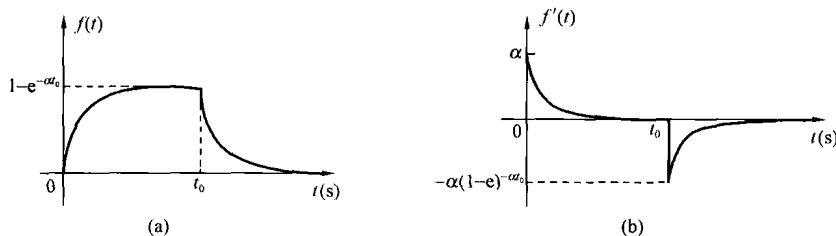


图 1-11 信号的微分与积分
(a) $f(t)$ 的波形; (b) $f'(t)$ 的波形

第二节 周期信号的频谱

无论是在电气工程和通信工程领域, 还是在电子工程和通信工程领域, 正弦信号是使用最为广泛的信号。在电气工程领域, 无论是电能的生产与输送, 还是电能的转换与利用, 电压与电流随时间变化的最基本形式是正弦信号。而在通信工程领域, 正是电感和电容组成的正弦振荡电路解决了正弦信号的产生以及由此实现的信息调制、发射、接收和解调等问题。从数学方面看, 无论是周期信号还是非周期信号, 都可以借助傅里叶 (Fourier) 级数或傅里叶变换将其分解成为“一系列”不同频率的正弦信号的线性组合来表示。由线性电路理论知道, 采用频率域 (简称频域) 的分析方法 (如相量法) 比采用时间域 (简称时域) 的分析方法更为简单。所以, 在频域对信号进行分析与处理具有诸多的突出优点。而那些构成原信号的“一系列”不同频率的正弦信号通常被称为原信号在频域上的“谱”, 简称频谱。本节重点讨论周期信号的频谱分析方法。

一、周期信号的正弦频谱

设周期信号 $f_p(t)$ 的周期为 T_0 , 频率 $f_0 = \frac{1}{T_0}$, 角频率 $\Omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ 。根据高等数学课