高等学校“十二五”规划教材 | 基础课

线性代数

■主　编　刘叶玲
■副主编　庞栓琴

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校"十二五"规划教材|基础课

线 性 代 数

主　编　刘叶玲
副主编　庞栓琴

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

“线性代数”是高等院校大多数专业的学生必修的一门重要基础理论课。本书围绕教学大纲，在适宜教学以及易学易懂等方面做了探索，并在保持严谨性的同时适当地加入了一些线性代数的应用。本书叙述通俗易懂，语言简单明快，很好地把握了线性代数的深度和广度。全书共分七章：行列式及其应用、矩阵及其运算、n 维向量空间、线性方程组、矩阵的特征值及对角化、二次型、线性空间与线性变换。每章后均配有一定数量的习题和自测题，书末附有习题和自测题答案。

本书可作为高等院校工科及经济类专业“线性代数”课程的教材(54 学时左右)及参考书。同时，还考虑到不同层次人员的需求，可在适当取舍内容后用于专科、高职及成人教育等各类教学当中，也可供科技人员或自学人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/刘叶玲主编. 一西安：西安电子科技大学出版社，2011.8

高等学校“十二五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 5606 - 2618 - 5

Ⅰ.① 线…　Ⅱ.① 刘…　Ⅲ.① 线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.① O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 126196 号

策　　划　戚文艳

责任编辑　戚文艳　王文静

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　西安文化彩印厂

版　　次　2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷

开　　本　787 毫米×960 毫米　1/16　印张 16.5

字　　数　296 千字

印　　数　1～3000 册

定　　价　28.00 元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 2618 - 5/O・0112

XDUP　2910001－1

前　　言

“线性代数”是高等院校大多数专业的学生必修的一门重要基础理论课，也是数学教学三大基础课程之一，具有不可替代的重要地位。线性代数以线性问题为主要研究对象，具有很广泛的应用性，特别是在数字化时代，大量的工程实际问题和计算结果最后都通过计算线性方程组的解得出，这就更促进了线性代数的广泛应用和发展。另外，线性代数将数学的主要特点高度集中地浓缩于一身，学生通过对线性代数的学习，可得到良好的逻辑思维能力，运算能力，抽象及分析、综合与推理能力的严格训练。长期的教学实践告诉我们，学好线性代数是一件十分不易的事情。

编者多年来从事线性代数的教学工作，并且在教学中做了很多尝试，本书就是编者经过长期教学实践、研究，改进与完善的结果。本书具有如下特点：

每章前均设有本章的主要内容及要求，对本章内容梗概作了简述并给出了本章教学大纲及学习的要求；每章后均配有一定数量的习题和自测题，书末附有习题和自测题答案，以便学生能对自己的学习结果进行检测；本书在有关章节中还加入了线性代数在工程、经济、管理等方面的应用。

刘叶玲担任本书主编，庞栓琴担任副主编。本书第一、二、三章由庞栓琴执笔；第四、五、六、七章由刘叶玲执笔；全书由丁正生教授审稿。本书在编写过程中，得到了西安科技大学(特别是高新学院)许多老师的大力支持和帮助，在此表示深深的谢意。

限于编者水平，本书难免存在不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2011 年 4 月

目　　录

第一章

行列式及其应用

本章的主要内容及要求

在线性代数中，行列式是很重要的一个基本工具，在数学学科及其他领域，如经济、管理等，都要用到它．本章主要介绍 n 阶行列式的定义及其性质、行列式的计算；用克莱姆法则求解 n 元线性方程组的解．本章的基本要求如下：

(1) 了解逆序数的概念，掌握逆序数的计算方法．

(2) 了解二阶、三阶行列式的定义，掌握用对角线法计算二阶、三阶行列式的方法．

(3) 理解 n 阶行列式的定义．

(4) 掌握 n 阶行列式的性质，会用行列式的性质来计算行列式，掌握行列式按行(列)展开公式．

(5) 熟练掌握克莱姆法则，掌握 n 个方程的 n 元齐次线性方程组只有零解和非零解的判断方法．

1.1　全排列、逆序数与对换

1.1.1　排列与逆序

定义 1.1.1　把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列(也简称排列)．n 个不同元素的所有排列的个数，通常用 p_n 表示．

$$p_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

例如，由 3 个不同数组成的排列数为 $p_3=3!\ =3\times2\times1=6$.

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序(例如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 1 个逆序．

定义 1.1.2 在一个 n 阶排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中，若数 $i_t > i_s$，则称数 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 阶排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数. 排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 的逆序数记做：

$$t(i_1, i_2, \cdots, i_n)$$

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

下面来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1, 2, \cdots, n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数，即

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

例 1.1.1 求排列 32514 的逆序数，判断此排列的奇偶性.

解 在排列 32514 中，

3 排在首位，逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数有一个(3)，故逆序数为 1；

5 是最大数，逆序数为 0；

1 的前面比 1 大的数有三个(3，2，5)，故逆序数为 3；

4 的前面比 4 大的数有一个(5)，故逆序数为 1，于是这个排列的逆序数为

$$t = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = 5$$

则该排列是奇排列.

例 1.1.2 求 $t(1, 2, 3, \cdots, n)$，$t(n, n-1, \cdots, 2, 1)$.

解 易知在 n 阶排列 $1, 2, 3, \cdots, n$ 中没有逆序，所以

$$t(1, 2, 3, \cdots, n) = 0$$

在 $n, n-1, \cdots, 2, 1$ 中，只有逆序，没有顺序，故

$$t(n, n-1, \cdots, 2, 1) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

1.1.2 对换

为了方便后面研究 n 阶行列式的性质，先来讨论对换以及它与排列的奇偶性关系.

定义 1.1.3 在排列中，将任意两个元素对调，其余的元素不动，这种做出新排列的变换叫做对换. 例如，经过 1、2 对换，排列 2431 就变成了 1432，排列 2134 就变成了 1234. 将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理 1.1.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列的奇偶性改变.

证 先证相邻对换的情形. 排列

$$a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m \tag{1.1.1}$$

对换 a 与 b，变为

$$a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m \tag{1.1.2}$$

显然，在排列式(1.1.1)中，如果 a，b 两元素与其他的元素构成逆序，则在排列式(1.1.2)中仍然构成逆序；如不构成逆序，则在式(1.1.2)中也不构成逆序. 而 a，b 两元素的逆序数改变为：

当 $a<b$ 时，经过对换后，a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变；

当 $a>b$ 时，经过对换后，a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1.

不管增加 1 还是减少 1，排列的逆序数的奇偶性总是变了. 因此，对于相邻对换的情形，排列 $a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m$ 与排列 $a_1 \cdots a_l b a b_1 \cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形. 设排列为

$$a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n \tag{1.1.3}$$

把它作 m 次相邻对换，式(1.1.3)调成

$$a_1 \cdots a_l a b b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n \tag{1.1.4}$$

再作 $m+1$ 次相邻对换，式(1.1.4)调成

$$a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n \tag{1.1.5}$$

总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，排列式(1.1.3)调成排列式(1.1.5)，$2m+1$ 是奇数，相邻对换改变了排列的奇偶性，故这两个排列的奇偶性不同.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1.1.1 知，对换的次数就是奇偶性变化的次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此推论成立.

1.2 行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究二阶、三阶行列式的结构.

1.2.1 二阶行列式

定义 1.2.1 由 4 个元素 $a_{ij}(i=1, 2; j=1, 2)$排成两行两列，并定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

上式称为二阶行列式.

注意：由 4 个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}排列的两行两列的行列式是一个数值，其中 $a_{ij}(i=1, 2; j=1, 2)$称为二阶行列式的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

例 1.2.1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解
$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3-(-2)=5$$

由定义 1.2.1 可知：

(1) 二阶行列式是一些项的代数和，每一项都是两个元素的乘积，这两个元素位于不同的行、不同的列；

(2) 每一项的两个元素的行标是自然排列 12 时，列标都是 1，2 的某一排列，这样的排列共有两种，故二阶行列式共有两项；

(3) 带正号的一项列标排列是 12，是偶排列，带负号的列标排列是 21，是奇排列.

1.2.2 三阶行列式

定义 1.2.2 由 9 个元素 $a_{ij}(i=1, 2, 3; j=1, 2, 3)$排成三行三列，并定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式.

由定义 1.2.2 不难发现，三阶行列式共有六项，每一项均为来自不同行、不同列的三个元素的乘积. 因此，右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这第一个下标(行标)排成标准次序 123，而第二个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$，它是 1，2，3 三个数的某个排列，各项的正负号与列标的排列对照：带正号的三项列标排列是 123，231，312；带负号的三项列标排列是 132，213，321. 为便于记忆，给出图 1.1 所示的方法，此方法称为对角线法则(显然，二阶行列式也适用对角线法则). 图 1.1 中实线上三元素的乘积冠正号，虚线上三元素的乘积

冠负号.

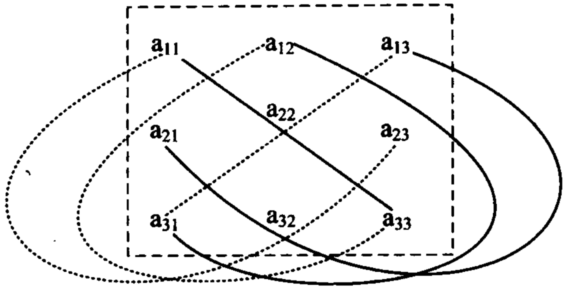

图 1.1 对角线法则

例 1.2.2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法则，有

$$
\begin{aligned}
D &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-3)\times(-2)\times4-1\times1\times4 \\
&\quad -2\times(-2)\times(-2)-(-3)\times2\times(-3)=-4-6+24-4-8-18 \\
&=-16
\end{aligned}
$$

例 1.2.3 求解方程

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=0
$$

解 方程左端的三阶行列式

$$
D=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12=x^2-5x+6
$$

由 $x^2-5x+6=0$ 解得 $x=2$ 或 $x=3$.

由定义 1.2.2 可知：

(1) 三阶行列式的每项都是不同行、不同列的三个元素的乘积；

(2) 每一项的三个元素的行标是自然排列 123 时，列标都是 1，2，3 的某一排列，这样的排列共有六种，故三阶行列式共有六项；

(3) 带正号的三项列标排列是 123、231、312 时，它们全是偶排列；带负号的三项列标排列是 132、213、321 时，它们全是奇排列.

所以，三阶行列式可以写成

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}
$$

其中，$\sum$ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

根据此规律，可以把行列式推广到一般情形.

1.2.3　n 阶行列式

定义 1.2.3　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积，即 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，并冠以符号 $(-1)^t$，即 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和，记做

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

这里 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 1，2，…，n 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. $\sum$ 表示对 1，2，…，n 所有的排列求和. 显然 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和.

n 阶行列式简记做 $\det(a_{ij})$，数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

注意：此处不要与绝对值号相混淆.

定理 1.2.1　n 阶行列式也可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

其中，t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证明　（略）.

注意：定义 1.2.3 考虑的是列的逆序数，定理 1.2.1 则考虑的是行的逆序数.

下面根据定义计算两个最基本也是最简单的行列式.

例 1.2.4　证明对角线行列式（其中对角线上的元素是 b，未写出的元素都是 0）

$$\begin{vmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{vmatrix} = b_1 b_2 \cdots b_n \tag{1.2.1}$$

$$\begin{vmatrix} & & & b_1 \\ & & b_2 & \\ & \iddots & & \\ b_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_1 b_2 \cdots b_n \tag{1.2.2}$$

证 式(1.2.1)显然成立，下面只证式(1.2.2).

若记 $b_i = a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & b_1 \\ & & b_2 & \\ & \iddots & & \\ b_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{t[n(n-1)\cdots 21]} a_{1n} a_{2,(n-1)} \cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b_1 b_2 \cdots b_n$$

其中，$t[n(n-1)\cdots 21]$为排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，且

$$t[n(n-1)\cdots 21] = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

主对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角形行列式，它的值与对角行列式一样.

例 1.2.5 若$(-1)^{t(i432j)} a_{1i} a_{24} a_{33} a_{42} a_{5j}$是 5 阶行列式 $\det(a_{ij})$的一项，则 i，j 应取何值？此时该项的符号是什么？

解 由行列式定义，每一项中的元素取自不同行不同列，故若 $i=1$，则 $j=5$，或者 $i=5$ 时，$j=1$.

当 $i=1$，$j=5$ 时，$t(14325)=3$，所以此时该项为$-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}a_{55}$.

当 $i=5$，$j=1$ 时，$t(54321)=10$，所以此时该项为 $a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}$.

例 1.2.6 证明下三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

证 由于当 $j > i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i} 其下标应有

$p_i \leqslant i$，即

$$p_1 \leqslant 1,\ p_2 \leqslant 2,\ p_3 \leqslant 3,\ \cdots,\ p_n \leqslant n$$

在所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$，此项的符号 $(-1)^t = (-1)^0 = 1$，所以

$$D = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

这就是说，下三角行列式等于其主对角线上 n 个元素的乘积.

同理，上三角行列式也有 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

1.3 行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题，也是一个麻烦的问题. 当行列式阶数较大时，使用行列式定义计算行列式工作量很大. 本节讨论的行列式的性质，不仅可以用来简化行列式的计算，而且在行列式理论研究中发挥着重要的作用.

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}} = D$.

证 记 $D = \det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij} = a_{ji}\,(i, j = 1, 2, \cdots, n)$，按定义

$$D^{\mathrm{T}} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

而由定理 1.2.1 有

$$D = \sum (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

故

$$D^{\mathrm{T}} = D$$

例如

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 4 \times 3 = -2$$

它的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2 = D$$

注意 性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是对称的. 因此，凡是有关行的性质，对列也同样成立，反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

D_1是由行列式 $D=\det(a_{ij})$变换 i，j 两行得到的，则

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中，$1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然数列，t 为排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$的逆序数.

设排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$的逆序数为 t_1，则