

高等学校“十二五”规划教材

TECHNOLOGY



TEXTBOOK
FOR
HIGHER EDUCATION

电磁场与电磁波

杨永侠 等编



西北工业大学出版社

电磁场与电磁波

杨永侠 张 峰 陈 蕾 石现峰 编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书围绕电磁场与电磁波两大内容展开。全书共八章,前五章为静态场部分,各章内容分别为矢量分析、静电场分析、恒定电场分析、恒定磁场分析、静态电磁场边值问题的求解,后三章为电磁波部分,各章内容分别是时变电磁场、均匀平面电磁波、电磁波的传输与辐射。

本书内容精练、概念清晰,注重工程应用性与新颖性。为便于学习使用,书中安排有较多的例题。

本书可作为高等学校本科及大专电子信息类各专业“电磁场与电磁波”课程的教材,也可作为其他科技人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/杨永侠等编. —西安:西北工业大学出版社,2011.8
ISBN 978-7-5612-3157-9

I. ①电… II. ①杨… III. ①电磁场②电磁波 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 171735 号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路 127 号 邮编:710072

电 话:(029)88493844 88491757

网 址:www.nwpup.com

印 刷 者:陕西天元印务有限公司

开 本:787 mm×1 092 mm 1/16

印 张:9.375

字 数:222 千字

版 次:2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷

定 价:20.00 元

前 言

电磁场与电磁波是电子信息类各专业的专业基础课,也是从事电气与电子技术领域工作的科技工作者的必备知识。随着专业方向的不断发展、教学课时的压缩减少和教学对象不断变化,如何在比较少的学时内,使学生掌握电磁场与电磁波的基本知识和体系框架,更好地解决实际问题成为电磁场与电磁波课程教学的头等大事。这就对电磁场与电磁波课程的教学内容、教学方法及课程所使用的教材提出了新的要求。

本书可作为本科电子信息类各专业的教材,也可作为其他有关专业的参考书。本书的编写指导思想如下:

- (1)低起点,从最基础的矢量分析讲起,以弥补读者数学知识的欠缺;
- (2)对概念的叙述力求准确、清晰,内容编排力求条理,使读者通过阅读本书建立起较完整的体系框架;
- (3)简化数学推导,增加例题,将读者的学习重点放在对物理概念的理解上;
- (4)注重工程应用,每章末增加相关的阅读材料,培养读者的学习兴趣;
- (5)紧密和计算机技术相结合,对复杂的运算进行编程,使该课程与时代同步。

全书共分八章。第一章简单介绍了全书所需的矢量分析的基本知识。第二章至第五章讨论静态场,论述了静电场、恒定电场、恒定磁场、静态电磁场边值问题的求解。第六章、第七章介绍电磁波遵从的基本规律、电磁波在无界均匀媒质中的传播特点及电磁波在平面分界面的垂直入射。第八章简单介绍了导行电磁波的基本概念及电磁辐射的基本原理。

本书是西安工业大学的十二·五规划教材,由西安工业大学电子信息工程学院老师编写完成。第一章至第四章由张峰编写,第五章由杨永侠编写,第六章至第八章由陈蕾编写,杨永侠统稿,石现峰为本书设计并编写了例题与习题,田广平绘制了部分图稿。在本书的编写过程中,也得到了其他同志的大力支持及帮助,在此一并表示感谢。

由于水平有限,加之时间仓促,书中缺点、错误实在难免,恳请读者批评指正。

编 者

2011年5月

目 录

第一章 矢量分析	1
1.1 标量、矢量及场的概念	1
1.2 常用坐标系及矢量场的不变特性	3
1.3 标量场的梯度	5
1.4 矢量场的通量与散度	7
1.5 矢量场的环量与旋度	9
1.6 无旋场与无散场	12
1.7 亥姆霍兹定理	13
1.8 阅读材料——亥姆霍兹	14
小结	15
习题一	16
第二章 静电场分析	18
2.1 电荷分布	18
2.2 库仑定律与电场强度	19
2.3 真空中静电场的基本规律	22
2.4 介质中静电场的基本规律	25
2.5 静电场分析的基本方程及边界条件	29
2.6 导体系统的电容	34
2.7 电场能量	36
2.8 阅读材料——静电场的应用	38
小结	40
习题二	42
第三章 恒定电场分析	44
3.1 电流密度	44
3.2 电流连续性方程	46
3.3 微分形式的欧姆定律和焦耳定律	47
3.4 恒定电场的基本方程及边界条件	48
3.5 恒定电场与静电场的比拟	51
3.6 阅读材料——电磁理论发展简史	52
小结	54
习题三	54

第四章 恒定磁场分析	56
4.1 安培定律与磁感应强度	56
4.2 真空中恒定磁场的基本规律	58
4.3 磁介质中恒定磁场的基本规律	61
4.4 恒定磁场分析的基本方程及边界条件	64
4.5 电感	68
4.6 磁场能量	70
4.7 阅读材料——磁悬浮列车	70
小结	71
习题四	73
第五章 静态电磁场边值问题的求解	75
5.1 边值问题及其唯一性定理	75
5.2 边值问题求解的镜像法	77
5.3 边值问题求解的有限差分法	82
5.4 分离变量法	86
5.5 阅读材料——麦克斯韦简介	87
小结	88
习题五	89
第六章 时变电磁场	90
6.1 时变电磁场的源	90
6.2 麦克斯韦方程组及辅助方程	93
6.3 时变电磁场的边界条件	95
6.4 时变电磁场的能量	98
6.5 正弦电磁场	100
6.6 波动方程	103
6.7 时变电磁场的位函数	104
6.8 阅读材料——电磁兼容	105
小结	106
习题六	107
第七章 均匀平面电磁波	109
7.1 无耗媒质中的正弦均匀平面电磁波	109
7.2 有耗媒质中的均匀平面电磁波	112
7.3 电磁波的极化	117
7.4 均匀平面电磁波的反射与透射	120
7.5 阅读材料——生物电磁学	126

小结.....	127
习题七.....	127
第八章 电磁波的传输与辐射.....	130
8.1 导行电磁波	130
8.2 电磁波的辐射	133
8.3 阅读材料——波导和天线	136
小结.....	137
附录.....	138
附录一 超松弛法源程序.....	138
附录二 量和单位.....	139
参考文献.....	142

第一章 矢量分析

电磁场与电磁波理论中所涉及的电流密度、电场强度、磁感应强度等主要物理量大都是在空间分布的矢量,即与空间坐标有关的矢量场。对这些物理量的分析需要以矢量分析及场论等数学方法为基础。本章主要对此进行介绍与分析,为后面各章节的学习做必要的准备。

1.1 标量、矢量及场的概念

一、标量

数学上的标量就是只有大小,没有方向,只用数值即可表示的量,对应实数域内任一代数量。一个标量可以是时间和空间坐标的函数,如 $\phi(r, t)$ 。任意一个代数量要成为一个具有物理意义的标量,则必须要有相应的量纲,此时称之为物理量,如温度、电位、能量、长度、时间等都是标量形式的物理量。

二、矢量

1. 矢量的定义及表示

矢量不仅有大小,而且有方向。同标量一样,矢量一旦被赋予量纲,则成为具有物理意义的矢量,如速度、加速度、电场强度、电流密度、磁感应强度等都是矢量形式的物理量。

几何上,矢量用有方向的线段表示,线段的长度代表矢量的大小,也叫矢量的模,线段的方向表示矢量的方向,如图 1.1.1 所示。



图 1.1.1 矢量的几何表示

为与标量区别,在表示矢量时将符号加黑,例如矢量“**A**”。若用单位矢量 $\mathbf{a}$ 表示矢量 **A** 的方向,则有 $\mathbf{A} = a\mathbf{A}$ 。矢量也可以是时间和空间坐标的函数,例如: $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ 。

2. 矢量的代数运算

(1) 矢量的加减法。两矢量之和(或差)等于对应方向坐标分量的和(或差),在几何上可用平行四边形法则进行运算。

(2) 标量乘矢量。标量乘矢量,结果为矢量,满足: $\lambda\mathbf{A} = \lambda a\mathbf{a}$ 。

(3) 矢量的标积。矢量的标积也称为标乘或点乘。矢量 **A** 与 **B** 的标积记为: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, 等于两矢量的模之积再乘以两矢量夹角的余弦,即 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos\theta$ 。其中 θ 为两矢量之间的夹角。标积满足交换律,即 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ 。若矢量 **A** 与矢量 **B** 相互垂直,根据标乘运算规则,则有 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ 。

(4) 矢量的矢积。矢量的矢积也称为叉积或叉乘。矢量 **A** 与 **B** 的矢积记为: $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, 结果仍为一个矢量,该矢量大小等于两矢量的模之积再乘以夹角的正弦,该矢量的方向为两矢量所在

面的法向,即 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} = cAB \sin \theta$ 。其中 c 的确定符合右手定则,即右手四指由 $\mathbf{A}$ 旋转到 $\mathbf{B}$, 拇指的方向即为 c 的方向。若用 i, j, k 分别表示空间的三个方向,矢积的运算也可写成行列式形式,即

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_i & A_j & A_k \\ B_i & B_j & B_k \end{vmatrix} \quad (1-1)$$

由式(1-1)可看出, $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$,即矢积不满足交换律。若矢量 $\mathbf{A}$ 与矢量 $\mathbf{B}$ 方向相同(两矢量平行),根据矢积运算规则,则有 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 。

(5) 矢量的代数混合运算。矢量的混合运算次序与标量的混合运算次序相同,以下列出常用的矢量混合运算恒等式:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad (1-2)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (1-3)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1-4)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1-5)$$

三、标量场和矢量场

1. 场的概念

场是指某种物理量在空间的分布,因此所有具有分布特性的物理量,都可视为具有相应物理意义的场,即场是空间坐标的函数;这种物理量还可能随时间变化,即场同时也是时间的函数。场的概念的引入是为了便于研究某种物理量在某一空间区域的分布情况和变化规律。

2. 标量场与矢量场

如果所研究的物理量为标量,则对应于一个标量场。在标量场中,每一时刻,每一位置都对应一个标量值,可表示为 $\phi(r, t)$ 。例如物体的温度分布就是标量场。

如果所研究的物理量是矢量,则对应于一个矢量场。在矢量场中,每一时刻,每一位置都对应一个矢量值,可表示为 $\mathbf{F}(r, t)$ 。例如地球对周围物体的引力分布就是矢量场。

3. 静态场和动态场

物理量在空间的分布随时间变化的场称为动态场,或时变场,此时场与时间变量有关;物理量在空间的分布不随时间变化的场称为静态场,此时场与时间变量无关,仅为空间坐标的函数。

4. 场的图形表示

场的图形表示也称为场图,用以直观地表示场变量在空间逐点演变的情况。对标量场而言,场图一般用等值面图表示;而对矢量场而言,场图一般用矢量线来表示。

空间内标量值相等的点集合形成的曲面称为等值面,如等气象中的等压线,地理中的等高线。等值面的方程可表示为

$$\phi(x, y, z) = \text{const} \quad (1-6)$$

矢量线则是一些有向曲线,用以形象地表示矢量场在空间的分布,如图 1.1.2 所示。矢量线的切线方向代表该处矢量场的方向,矢量线的疏密则代表了该处矢量场的强弱程度。

矢量线上任意点的切线方向必定与该点的矢量方向相同,即有

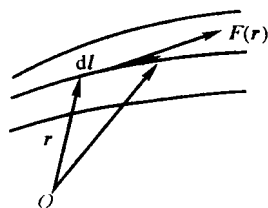


图 1.1.2 矢量场的矢量线

$$\frac{d\mathbf{r}}{dl} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (1-7)$$

等式两边同乘以 dl , 则可得到

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (1-8)$$

式(1-8)即为矢量线的方程。根据矢量运算规律, 矢量线方程在直角坐标系中可表示为

$$\frac{dx}{F_x(\mathbf{r})} = \frac{dy}{F_y(\mathbf{r})} = \frac{dz}{F_z(\mathbf{r})} \quad (1-9)$$

例 1.1.1 求标量场 $\varphi(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 通过点 $M(1, 2, 3)$ 的等值面方程。

解 标量场在 $M(1, 2, 3)$ 处对应的标量值为

$$\varphi|_M = \ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln 14$$

根据式(1-6), 通过点 $M(1, 2, 3)$ 的等值面方程为

$$\varphi(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln 14$$

亦即

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

例 1.1.2 求矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = xy^2\mathbf{e}_x + x^2y\mathbf{e}_y + y^2z\mathbf{e}_z$ 的矢量线方程。

解 根据式(1-9), 该矢量场的矢量线应满足的微分方程为

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{y^2z}$$

分解方程, 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} \\ \frac{dx}{xy^2} = \frac{dz}{y^2z} \end{cases}$$

解微分方程, 得矢量线方程为

$$\begin{cases} z = c_1 x \\ x^2 - y^2 = c_2 \end{cases}$$

式中, c_1 和 c_2 是积分常数。

1.2 常用坐标系及矢量场的不变特性

由于矢量场是矢量的空间分布, 因此对其进行定量的分析就需要建立参考坐标系, 以表示空间的位置及矢量的方向。

一、直角坐标系

直角坐标系是最常用的正交坐标系, 由三个相互垂直的坐标轴, 即 x 轴、 y 轴和 z 轴构成, 如图 1.2.1 所示。

直角坐标系中, 三个单位矢量分别为 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$, 即三个坐标轴的正方向, 三者正交, 满足右手定则, 且均为常矢量。直角坐标中任意位置点 P 可以用其直角坐标分量表示, 即 $P(x, y, z)$ 。从坐标原点指向空间位置点 $P(x, y, z)$ 的矢量, 称其为位置矢量, 用 $\mathbf{r}$ 表示, 即

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1-10)$$

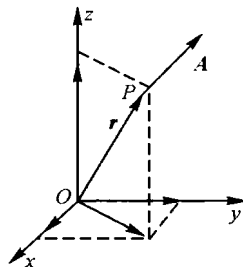


图 1.2.1 直角坐标系

矢量场在任意空间位置 $\mathbf{r}$ 处所对应的矢量 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 可用其三个直角坐标分量, 即 $A_x(\mathbf{r})$, $A_y(\mathbf{r})$ 与 $A_z(\mathbf{r})$ 表示, 即

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + A_y(\mathbf{r})\mathbf{e}_y + A_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z \quad (1-11)$$

二、圆柱坐标系

圆柱坐标系如图 1.2.2 所示。圆柱坐标系中, 表示空间位置点 P 的三个坐标变量为 $P(r, \varphi, z)$, 其中 r 表示该点到 Oz 轴的垂直距离, φ 表示过该点和 Oz 轴的平面与 xOz 平面的夹角, z 表示该点在 Oz 轴上的投影值。位置点 P 的三个正交的单位矢量分别为 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$, 含义如下:

$\mathbf{e}_r$ 为圆柱面在位置点 P 的法线方向;

$\mathbf{e}_\varphi$ 为在位置点 P 平行于 xOy 平面且指向 φ 增加一侧的圆柱面切线方向;

$\mathbf{e}_z$ 为圆柱面在位置点 P 平行于 Oz 轴的切线方向。

可见, 圆柱坐标系中的单位矢量的方向随空间位置变化, 不是常矢量。圆柱坐标系中, 矢量场在任意空间位置 $\mathbf{r}$ 处所对应的矢量可用坐标分量 $A_r(\mathbf{r}), A_\varphi(\mathbf{r})$ 与 $A_z(\mathbf{r})$ 表示, 即

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_r(\mathbf{r})\mathbf{e}_r + A_\varphi(\mathbf{r})\mathbf{e}_\varphi + A_z(\mathbf{r})\mathbf{e}_z \quad (1-12)$$

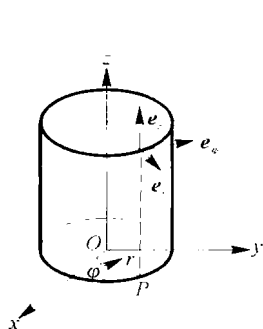


图 1.2.2 圆柱坐标系

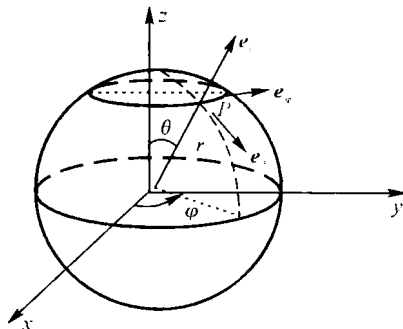


图 1.2.3 球坐标系

三、球坐标系

球坐标系如图 1.2.3 所示。球坐标系中, 表示空间位置点 P 的三个坐标变量为 $P(r, \theta, \varphi)$, 其中 r 表示该点到坐标原点的距离, θ 表示该点的位置矢量与 Oz 轴的夹角, 也称为极角或纬度角。 φ 表示过该点和 Oz 轴的平面与 xOz 平面的夹角, 也称为方位角或经度角。位置点 P 的三个正交的单位矢量分别为 $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$, 含义如下:

$\mathbf{e}_r$ 为圆球面在位置点 P 的法线方向;

$\mathbf{e}_\theta$ 为在位置点 P 的子午面内且指向 θ 增加一侧的圆球面切线方向;

$\mathbf{e}_\varphi$ 为在位置点 P 平行于 xOy 平面且指向 φ 增加一侧的圆球面切线方向。

可见, 球坐标系中的单位矢量的方向也随空间位置变化, 不是常矢量。球坐标系中, 矢量场在任意空间位置 $\mathbf{r}$ 处所对应的矢量可用坐标分量 $A_r(\mathbf{r}), A_\theta(\mathbf{r})$ 与 $A_\varphi(\mathbf{r})$ 表示, 即

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_r(\mathbf{r})\mathbf{e}_r + A_\theta(\mathbf{r})\mathbf{e}_\theta + A_\varphi(\mathbf{r})\mathbf{e}_\varphi \quad (1-13)$$

四、矢量场的不变特性

矢量场的不变特性是指, 在时间 t 为一定值的情况下, 矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 是唯一的, 其大小或方

向与所选择的坐标系无关。即可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{e}_x F_x(x, y, z) + \mathbf{e}_y F_y(x, y, z) + \mathbf{e}_z F_z(x, y, z) = \\ &= \mathbf{F}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{e}_r F_r(r, \theta, \varphi) + \mathbf{e}_\theta F_\theta(r, \theta, \varphi) + \mathbf{e}_\varphi F_\varphi(r, \theta, \varphi) = \\ &= \mathbf{F}(r, \varphi, z) = \mathbf{e}_r F_r(r, \varphi, z) + \mathbf{e}_\varphi F_\varphi(r, \varphi, z) + \mathbf{e}_z F_z(r, \varphi, z)\end{aligned}\quad (1-14)$$

根据矢量场的不变特性, 显然有以下等式成立:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = F_r^2 + F_\varphi^2 + F_z^2 = F_r^2 + F_\theta^2 + F_\varphi^2 \quad (1-15)$$

1.3 标量场的梯度

标量场的梯度用以表征标量场随空间坐标的变化规律, 是进行标量场分析的十分重要的数学工具。

一、梯度的定义

设有一标量场 $u(\mathbf{r})$ 或 $u(x, y, z)$, 从场中一点移位到邻近的另一点, 此时标量值从 u 变化到 $u + du$, du 为标量的增量, 如图 1.3.1 所示。

由数学知识可知, 增量 du 可表示为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (1-16)$$

在直角坐标系中, 位移矢量 $d\mathbf{l}$ 可表示为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \quad (1-17)$$

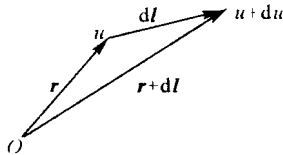


图 1.3.1 标量场的空间变化

根据式(1-16)和式(1-17), 可以考虑将增量 du 改写为

$$du = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz) \quad (1-18)$$

$$\text{令} \quad \nabla u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-19)$$

$$\text{则} \quad du = \nabla u \cdot d\mathbf{l} \quad (1-20)$$

把矢量 ∇u 称为标量场的梯度 (gradient), 其中符号 $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ 是一个微分运算符号, 也称为矢量微分算子。标量场的 $u(\mathbf{r})$ 的梯度也可表示为 $\text{grad} u(\mathbf{r})$ 。需要明确的是, 标量场的梯度是矢量。

二、梯度与方向导数

标量场 $u(x, y, z)$ 沿指定方向 $\mathbf{e}_l$ 的变化率称为标量场在该方向的方向导数, 记为 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 。根据数学知识, 方向导数可由下式进行计算:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-21)$$

式中, $\cos \alpha, \cos \beta$ 与 $\cos \gamma$ 分别是 $\mathbf{e}_l$ 的三个方向余弦。

由于 $\mathbf{e}_l$ 可用方向余弦表示为

$$\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma$$

$$\begin{aligned} \text{则有} \quad \frac{\partial u}{\partial l} &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma) = \\ &\quad \nabla u \cdot \mathbf{e}_l = |\nabla u| \cos \theta \end{aligned} \quad (1-22)$$

式中, θ 为梯度 ∇u 与 $\mathbf{e}_l$ 之间的夹角。

式(1-22)表明,标量场沿着指定方向 $\mathbf{e}_l$ 的变化率就是标量场的梯度 ∇u 在该方向的投影。因此可知,沿梯度 ∇u 的方向,标量场变化最快,变化率最大,其最大变化率就是梯度 ∇u 的模 $|\nabla u|$ 。可见标量场梯度给出了对应的标量场在空间各点上的最大变化率及其方向。

三、梯度的计算公式

根据矢量场的不变特性,标量场的梯度也是与所选的坐标系无关的。但在不同的坐标系下,梯度的计算公式亦有区别。现给出常用坐标系中梯度的计算公式:

$$\text{直角坐标系:} \quad \nabla u = \mathbf{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-23)$$

$$\text{圆柱坐标系:} \quad \nabla u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-24)$$

$$\text{圆球坐标系:} \quad \nabla u = \mathbf{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad (1-25)$$

例 1.3.1 已知矢量场 $\mathbf{A} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, 求 $\mathbf{A}$ 在点 $M(1,0,1)$ 处的梯度以及沿 $\mathbf{l} = \mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z$ 方向的方向导数。

解 由题意,可得: $A = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。根据直角坐标系中梯度的计算公式,即式(1-23),有

$$\nabla A = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{e}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{e}_y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{e}_z$$

将 M 点的坐标代入上式,可得在 M 点处 $\mathbf{A}$ 的梯度为

$$\text{grad} A|_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_z$$

根据梯度与方向导数之间的关系, $\mathbf{A}$ 沿 $\mathbf{l}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial A}{\partial l} = \nabla A \cdot \mathbf{e}_l$$

$$\text{由于} \quad \mathbf{e}_l = \frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|} = \frac{1}{3} \mathbf{e}_x + \frac{2}{3} \mathbf{e}_y + \frac{2}{3} \mathbf{e}_z$$

$$\text{因此有} \quad \left. \frac{\partial A}{\partial l} \right|_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

例 1.3.2 引入距离矢量 $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ 。其中 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{r}'$ 分别是 $P(x, y, z)$ 和 $Q(x', y', z')$ 两点的位置矢量。当 Q 点固定, P 点为动点时, $\frac{1}{R}$ 便是一个标量场;反之,当 P 点为定点, Q 点为动点时, $\frac{1}{R}$ 又为另一个标量场。如图 1.3.2 所示。试证明上述两标量场的梯度之间有下面关系:

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \quad (1-26)$$

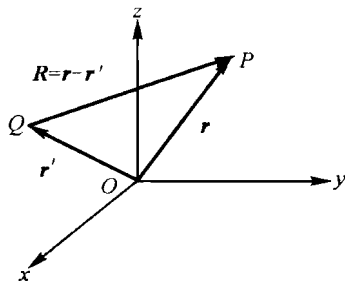


图 1.3.2 场点和源点

式中, ∇ 表示对场点坐标 (x, y, z) 的运算; ∇' 表示对源点坐标 (x', y', z') 的运算。

解 根据题意, 有

$$\nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla' = e_x \frac{\partial}{\partial x'} + e_y \frac{\partial}{\partial y'} + e_z \frac{\partial}{\partial z'}$$

根据梯度的计算公式, 只要证明

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{R} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{R} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{R} \right)$$

即可证明

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$$

由于 $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, 有

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x'} = -\frac{x-x'}{R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{x-x'}{R^3}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{R} \right)$$

同理可证得

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{R} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{R} \right)$$

即证明了

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\nabla' \left(\frac{1}{R} \right)$$

1.4 矢量场的通量与散度

一、矢量场的通量

在矢量场分析中, 穿过任何闭合面 S 上的通量具有特殊的意义。在曲面上取一面元, 该面元除了有面积大小, 在空间还有一定的取向, 称其为面元矢量, 用 $d\mathbf{S}$ 表示, 示意图如图 1.4.1 所示。

若 $d\mathbf{S}$ 取自开平面, 则其方向用右手螺旋法则确定; 若 $d\mathbf{S}$ 取自闭合面, 则其方向为闭合面的外法线方向。

矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 通过面元 $d\mathbf{S}$ 的通量定义为: $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = A(\mathbf{r}) \times \cos \theta dS(\mathbf{r})$, 其中 θ 为 $d\mathbf{S}$ 处 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 与 $d\mathbf{S}$ 方向之间的夹角。

由积分的概念, 矢量 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 通过闭合面 S 的通量可用下列公式表示:

$$\Psi = \oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \oint_S A(\mathbf{r}) \cos \theta dS(\mathbf{r}) \quad (1-27)$$

通量的这一概念可适合于任何矢量场。由通量的定义公式可看出, 矢量通过闭合曲面 S 的通量 Ψ 是标量值。当闭合曲面 S 的法线方向与矢量场的方向一致, 或矢量场沿着曲面法向时, Ψ 为正值; 否则, 当曲面 S 的法线方向与矢量场方向相反, 或矢量场逆着曲面法向时, Ψ 为

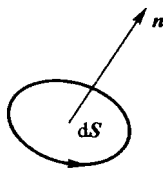


图 1.4.1 面元矢量

负值。

矢量通过闭合曲面的通量具有明确的物理意义,以水的流速场为例进行说明。若 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 是水的流速场,则可对其通过闭合曲面 S 的通量 Ψ 做如下讨论:

(1) 若 $\Psi > 0$,则表示一定有水的净流量从 S 中流出,那么就表明此闭合面中一定有水源,通量 Ψ 就能表示水源出水量的大小;

(2) 若 $\Psi < 0$,则表示一定有水的净流量流入 S 中,那么就表明此闭合面中一定有容纳流入的水的“沟”,或者说是负源,通量 Ψ 就能表示负源吸水量的大小。

(3) 若 $\Psi = 0$,则表示通过 S 的水的净流量为 0,即流出的水等于流进的水,此时 S 中要么没有形成水流的源,要么是水源与负源相互抵消。

将这一含义进行推广,矢量场对任意闭合面的通量就表示此闭合面内有无该矢量场的源,以及源的性质及大小。因此,通量也可称作矢量场的通量源,这是一种标量性质的源。例如,电场强度对闭合面的通量不为零,则该闭合面内一定存在形成电场的源,即电荷。

二、矢量场的散度

由矢量场的通量可以确定空间某一区域中有无矢量场的源,以及场源的总量,这是一个宏观的量。若要研究场源在该区域中是如何分布的,通量就无能为力了。为此,引入矢量场的散度的概念。

为研究矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 在一个点附近的通量特性,把闭合曲面 S 收缩,使包含这个点在内的体积元 $\Delta\tau \rightarrow 0$,则

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}{\Delta\tau} \quad (1-28)$$

此极限值就成为矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 在该点处的散度,记做 $\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 。由定义可知,空间某点处矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 的散度就表示了矢量场在该点单位体积内的通量源的大小,即通量源的强度。例如,静电场的通量源是电荷,其在空间某一点的散度即是该点的电荷密度。

由数学知识可知,直角坐标系中,有

$$\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-29)$$

进一步将式(1-29)进行分析,可得

$$\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1-30)$$

三、散度的计算公式

不同的坐标系下,矢量场散度的计算公式亦有区别,现给出常用坐标系下矢量场散度的计算公式:

$$\text{直角坐标系:} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-31)$$

$$\text{圆柱坐标系:} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1-32)$$

$$\text{圆球坐标系:} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}[(A_\theta) \sin \theta] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1-33)$$

四、高斯公式

对于矢量场 $\mathbf{A}$ 中的某一有限体积 V , 若包围该体积 V 的闭合面为 S , 则有

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (1-34)$$

式(1-34)称为高斯公式。在数学上, 高斯公式反映了体积分与面积分的转换关系, 在矢量分析中, 高斯定理反映了体积表面上的矢量场与体积内的矢量场的关系。由高斯公式, 计算矢量场通过某一闭合面的通量常常也可转化为计算该矢量场的散度在闭合面所包围的体积上的体积分。高斯公式可由散度的定义入手进行证明。

例 1.4.1 求标量场 Φ 的梯度 $\nabla\Phi$ 的散度。

解 根据直角坐标系中梯度的计算公式, 有

$$\nabla\Phi = \mathbf{e}_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

再由直角坐标系中散度的计算公式, 有

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

如果记 $\nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi$, 则称其为拉普拉斯运算, 相应的 ∇^2 就被称为拉普拉斯算子。常用坐标系下拉普拉斯运算的计算公式分别为:

$$\text{直角坐标系:} \quad \nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad (1-35)$$

$$\text{圆柱坐标系:} \quad \nabla^2\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad (1-36)$$

$$\text{圆球坐标系:} \quad \nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \varphi^2} \quad (1-37)$$

例 1.4.2 对于位置矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, 计算其散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 及 $\mathbf{A}$ 穿过一个球心在原点, 半径为 a 的球面的通量。

解

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

根据直角坐标系中散度的计算公式, 可得

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

根据高斯公式, $\mathbf{A}$ 穿过球心在原点, 半径为 a 的球面的通量可转化为求其散度在该球面所包围的体积上的体积分进行, 即

$$\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V 3 dV = 3 \times \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3$$

1.5 矢量场的环量与旋度

一、矢量场的环量

在矢量场 $\mathbf{A}$ 中, 若曲线 C 是一闭合曲线, 则该矢量场沿闭合曲线 C 的线积分可表示为

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C A \cos\theta dl \quad (1-38)$$

式中, $d\mathbf{l}$ 是 C 上的线元矢量, 其大小为 dl , 方向沿闭合曲线 C 的切线方向, θ 角为 $\mathbf{A}$ 与 $d\mathbf{l}$ 之间的夹角。式(1-38)的线积分在矢量分析中, 称为矢量场 $\mathbf{A}$ 沿闭合曲线 C 的环量。环量和通量一样, 也是标量。

同矢量场的通量一样, 矢量场的环量也是描述矢量场特性的重要物理量。若矢量沿着闭合曲线的环量不为零, 则表示闭合曲线内存在着形成矢量场的另外一种源, 称之为漩涡源。例如, 电流的周围会产生磁场, 磁场强度 $\mathbf{H}$ 在环绕电流的闭合曲线上的环量不等于零, 电流就是产生磁场的漩涡源。

二、矢量场的旋度

由环量的定义公式可以看出, 环量是矢量 $\mathbf{A}$ 在大范围闭合曲线上的线积分, 其反映的是闭合曲线内漩涡源分布的情况。而矢量分析中, 总是希望知道空间每个点附近的漩涡源分布的情况。为此, 把闭合曲线 C 收缩, 使其包围的面积元 ΔS 趋于零, 并求以下的极限:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} \quad (1-39)$$

这一极限的意义就是环量的面密度, 也可以看做环量的强度。由于面元是有方向的, 它与闭合曲线 C 的绕行方向成右手螺旋关系, 因此在给定点上, 环量面密度对于不同方向的面元是不同的。引入一个矢量 $\text{rot}\mathbf{A}$ 来表示这一特征, 定义该矢量如下:

$$\text{rot}\mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\left[\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right]_{\max}}{\Delta S} \quad (1-40)$$

把矢量 $\text{rot}\mathbf{A}$ 称为矢量场 $\mathbf{A}$ 的旋度。由公式可以看出, $\text{rot}\mathbf{A}$ 的大小是矢量场 $\mathbf{A}$ 在给定环量面密度的最大值, $\text{rot}\mathbf{A}$ 的方向就是该点处环量面密度取得最大值的方向。矢量场 $\mathbf{A}$ 的旋度 $\text{rot}\mathbf{A}$ 描述了矢量 $\mathbf{A}$ 在空间某点处漩涡源的强度。

由数学知识可知, 在直角坐标系中, 有

$$\text{rot}\mathbf{A} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (1-41)$$

进一步将式(1-41)进行分析, 可得

$$\text{rot}\mathbf{A} = \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z) = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-42)$$

写成行列式形式, 即为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1-43)$$

三、旋度的计算公式

不同的坐标系下, 矢量场旋度的计算公式亦有区别, 现给出常用坐标系下矢量场旋度的计算公式: